



(05)-0093-1

## СТІЙКІСТЬ СТЕРЖНІВ З МАТЕРІАЛІВ, ЯКІ ЗМІЦНЮЮТЬСЯ, ТА ЇХ НОРМАТИВНИЙ РОЗРАХУНОК

**А.І. Маневич, О.В. Махін**

*Дніпропетровський національний університет, вул. Комсомольська 74-а, 70, 49000,  
м. Дніпропетровськ, Україна.  
E-mail: aman@atlantis.dp.ua*

*Отримана 6 червня 2005; прийнята 20 липня 2005*

**Анотація.** З використанням пакету "Mathematica" виконано аналіз рішення задачі стійкості центрально та позацентровано стиснутих стержнів в області упругопластичних деформацій. Наведено, що для матеріалів, для яких зміцнення становить більш ніж якесь "порогове" значення, закордонні та вітчизняні норми визначення міцності не мають можливості адекватно визначити граничні навантаження на можливому діапазоні змінення параметру гнучкості. Наведено порівняння з результатами експериментальних досліджень стійкості центрально та позацентровано стиснутих стержнів.

**Ключові слова:** металеві конструкції, стійкість, діаграми напружень, зміцнення, норми проектування.

## УСТОЙЧИВОСТЬ СТЕРЖНЕЙ ИЗ УПРОЧНЯЮЩИХСЯ МАТЕРИАЛОВ И НОРМАТИВНЫЙ РАСЧЁТ

**А.И. Маневич, А.В. Махин**

*Днепропетровский национальный университет, ул. Комсомольская 74-а, 70, 49000,  
г. Днепропетровск, Украина.  
E-mail: aman@atlantis.dp.ua*

*Получена 6 июня 2005; принята 20 июля 2005*

**Аннотация.** С использованием пакета "Mathematica" выполнен анализ решения задачи устойчивости центрально и внецентренно сжатых стержней в упругопластической области. Показано, что для материалов с упрочнением, превосходящим некоторое "пороговое" значение, существующие отечественные и европейские нормы прочности не в состоянии адекватно предсказать предельные нагрузки во всем диапазоне параметра гибкости. Приведено сравнение с результатами экспериментального исследования устойчивости центрально и внецентренно сжатых стержней.

**Ключевые слова:** стальные конструкции, устойчивость, сжатые и сжато-изогнутые стержни, диаграммы напряжений, упрочнение, нормы проектирования.

## STANDABILITY OF RODS FROM HARDENING MATERIALS AND NORMATIVE CALCULATIONS

A.I. Manevych, O.V. Makhin

*Dnipropetrovsk National University, Komsomolska str., 74-a, 70, 49000, Dnipropetrovsk, Ukraine.*

*E-mail: aman@atlantis.dp.ua*

*Received 6 June 2005; accepted 20 July 2005*

**Abstract.** On the base of rigorous analysis of equilibrium paths of compressed elastic-plastic bars under central and eccentric compression the influence of hardening on limit loads is studied for modern materials whose stress-strain diagram has no explicit yielding plateau. It is shown that a certain "threshold" value of the hardening parameter exists below which the limit loads do not practically depend upon hardening. In this range the existing design codes provide a rather good prediction of limit loads. However for modern materials with hardening, which exceeds the threshold value, the existing design codes are not able to predict limit loads in the whole range of slenderness ratio.

**Keywords:** metal construction, standability, stress and stress-bending elements, strain diagrams, hardening, codes.

### Введение

В существующих нормах расчёта устойчивости как отечественных [1], так и зарубежных [2], [3], материал характеризуется некоторым расчётным сопротивлением  $R_y$ , которое обычно отождествляется с пределом текучести материала. Характеристики упрочнения в нормах, как правило, не учитываются. По существу, это означает, что принимается модель идеально упругопластического материала. Такая модель представляется вполне оправданной для материалов с выраженной площадкой текучести. Однако для многих современных материалов диаграмма напряжений характеризуется постепенным уменьшением касательного модуля, и какая-либо характерная точка, которую можно было бы отождествить с расчётным сопротивлением  $R_y$ , отсутствует. Обычно в этих случаях в качестве  $R_y$  принимается некоторая условная величина, например, условный предел текучести  $\sigma_{0,2}$ . Никакого обоснования для этого выбора в задаче устойчивости нет, и выбор в качестве  $R_y$ , например, величины  $\sigma_{0,1}$  или  $\sigma_{0,5}$  может приводить к существенно отличающимся расчётным значениям предельной нагрузки. Более того, любой выбор  $R_y$  означа-

ет замену реальной диаграммы материала на диаграмму идеально упругопластического материала, а такая замена, оказавшись удачной для данной гибкости (и данной диаграммы  $\sigma - \varepsilon$ ), вполне может давать большую погрешность для другой гибкости (или диаграммы напряжений с другим упрочнением). Таким образом, нормативный расчёт устойчивости для многих современных материалов не имеет, по сути, никакого теоретического обоснования.

В данной работе на основе строгого расчёта равновесных ветвей и предельной нагрузки стержней в упругопластической области (использующего пакет «Mathematica») выполнен анализ решения задачи устойчивости для материалов с упрочнением (в том числе без выраженной площадки текучести). Показано, что существует определённое «пороговое» значение параметра упрочнения, до достижения которого предельная нагрузка практически не зависит от упрочнения, и поэтому нормативный расчёт, не учитывающий упрочнения, даёт результат близкий к точному решению. В то же время для материалов с упрочнением, превосходящим «пороговое» значение, при любом выборе расчётного сопротивления  $R_y$  нормативный расчёт даёт значительную ошибку либо при малых, либо при больших гибкостях стержня.

**Постановка задачи и основные уравнения**

**Уравнения устойчивости.** Рассмотрим устойчивость стержня из упруго-пластического материала, сжатого сжимающей силой  $P$ , которая приложена с эксцентриситетом  $e$  относительно его центра тяжести в плоскости симметрии поперечного сечения (рис. 1). Стержень имеет начальное несовершенство – прогиб в форме  $w_0 = f_0 \sin(\pi x/L)$ , где  $x$  – продольная координата,  $L$  – длина. Пусть  $y, z$  – центральные оси поперечного сечения, причём  $z$  – ось симметрии.

Уравнения равновесия стержня имеют вид ( $b(z)$  – ширина поперечного сечения,  $w(x)$  – дополнительный прогиб):

$$\int_{z_1}^{z_2} b(z) \sigma(z) dz = P \tag{1}$$

$$\int_{z_1}^{z_2} b(z) \sigma(z) z dz = P(e + w_0 + w(x))$$

Обычно зависимость между  $\varepsilon$  и  $\sigma$  задаётся экспериментальной кривой, либо аналитически некоторой аппроксимирующей функцией  $\sigma = \sigma(\varepsilon)$  (случай А) или  $\varepsilon = \varepsilon(\sigma)$  (случай В).

Продольная деформация  $\varepsilon$  в произвольном волокне на расстоянии  $z$  от центральной оси выражается через деформации крайних волокон в соответствии с гипотезой плоских сечений:

$$\varepsilon - \varepsilon_0 = \frac{z}{h} (\varepsilon_2 - \varepsilon_1), \tag{2}$$

где  $h = z_2 - z_1$  – высота сечения,  $\varepsilon_0$  – деформация сжатия на осевой линии сечения (положительная – при сжатии),  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$  – минимальная и максимальная деформации сжатия, (при  $z = z_1$  и  $z = z_2$ ). Перейдем от переменной  $z$  в интегралах (1) к деформации сжатия

$\varepsilon$ , используя (2) и вытекающее из него соотношение  $d\varepsilon = (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) dz / h$ :

$$\frac{h}{\varepsilon_2 - \varepsilon_1} \int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} b(\varepsilon) \sigma(\varepsilon) d\varepsilon = P$$

$$\frac{h^2}{(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)^2} \int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} b(\varepsilon) \sigma(\varepsilon) (\varepsilon - \varepsilon_0) d\varepsilon = \tag{3}$$

$$= P(e + w_0 + w(x))$$

В случае В, т. е. когда задана функция  $\varepsilon = f(\sigma)$  и из неё невозможно явно (аналитически) получить функцию  $\sigma(\varepsilon)$ , целесообразно в интегралах (3) сделать замену переменных, перейдя к переменной  $\sigma$  (с учётом того, что функция  $\varepsilon = f(\sigma)$  монотонно возрастающая). Тогда уравнения (3) запишутся в виде интегралов по  $\sigma$  ( $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  – соответственно минимальное и максимальное продольное напряжение на внешних волокнах, т.е. при  $z = z_1$  и  $z = z_2$ ;  $d\varepsilon = f'(\sigma) d\sigma$ ):

$$\frac{h}{f(\sigma_2) - f(\sigma_1)} \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} b(\sigma) \sigma f'(\sigma) d\sigma = P$$

$$\frac{h^2}{(f(\sigma_2) - f(\sigma_1))^2} \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} b(\sigma) \sigma (f(\varepsilon) - f(\varepsilon_0)) f'(\sigma) d\sigma =$$

$$= P(e + w_0 + w(x)) \tag{4}$$

Отметим, что обычно, начиная с работ Кармана и Хвалла, используются уравнения вида (3); что касается уравнений (4), то они, по-видимому, ранее не использовались. Между тем, применение этих уравнений позволяет обойтись без обращения функции  $\varepsilon = f(\sigma)$ , что может существенно упростить задачу.

Примем, что изогнутая линия для шарнирно опертого стержня представляет собой полуволну синусоиды (это приводит к очень малой погрешности (см., напр., [4], стр. 50):

$$w(x) = \bar{w} \sin \frac{\pi x}{L} \tag{5}$$

Известно [4], что при такой аппроксимации эксцентриситет  $e$  эквивалентен начальному прогибу  $(4/\pi) e$ . Поэтому в дальнейшем заменим  $e + w_0$  в уравнениях (3), (4) на величину  $\bar{e} = f_0 + (4/\pi) e$ .

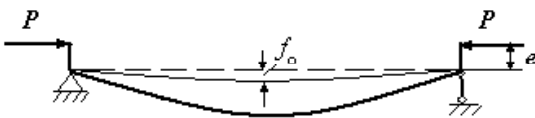


Рис. 1. Сжатый стержень.

Прогиб в среднем сечении стержня  $\bar{w}$  можно связать с деформациями крайних волокон, выразив радиус кривизны  $\rho$  из уравнения  $1/\rho = -d^2w/dx^2$  и из соотношения  $\varepsilon_2 - \varepsilon_1 = h/\rho$ . Получаем:

$$\bar{w} = \frac{L^2(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)}{\pi^2 h} \quad (6)$$

Если рассматривать второе уравнение (3) только для среднего (по длине) сечения, то с учётом (6) получаем из (3) систему двух уравнений относительно переменных  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$  (для заданной силы  $P$ ). Добавляя к этим уравнениям условие равенства нулю якобиана этой системы, получим систему уравнений для нахождения предельной силы  $P$ . Аналогично из (4) получаем систему уравнений относительно  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ .

**Безразмерные параметры и уравнения.** Перейдем к безразмерным параметрам напряжений и деформаций (имеющим порядок единицы) и безразмерным геометрическим параметрам:

$$\begin{aligned} \sigma^* &= \frac{\sigma}{E} 10^3; & \varepsilon^* &= \varepsilon 10^3; \\ b^* &= \frac{b}{L} 10^2; & h^* &= \frac{h}{L} 10; & e^* &= \frac{e}{L} 10 \end{aligned} \quad (7)$$

Тогда система уравнений (3) принимает вид:

$$\begin{aligned} \frac{h^*}{\varepsilon_2^* - \varepsilon_1^*} \left( \int_{\varepsilon_1^*}^{\varepsilon_2^*} b^*(\varepsilon^*) \sigma^*(\varepsilon^*) d\varepsilon^* \right) &= P^* \\ \frac{h^{*2}}{(\varepsilon_2^* - \varepsilon_1^*)^2} \left( \int_{\varepsilon_1^*}^{\varepsilon_2^*} b^*(\varepsilon^*) \sigma^*(\varepsilon^*) (\varepsilon^* - \varepsilon_0^*) d\varepsilon^* \right) &= \\ = P^* \left( e^* + \frac{\varepsilon_2^* - \varepsilon_1^*}{10\pi^2 h^*} \right) & \end{aligned} \quad (8)$$

где введен безразмерный параметр силы  $P^*$  и прогиб  $\bar{w}$  выражен через  $\varepsilon_1^*$  и  $\varepsilon_2^*$ .

$$P^* = \frac{P 10^6}{E L^2}, \quad \bar{w} = \frac{L^2(\varepsilon_2^* - \varepsilon_1^*)}{\pi^2 10^3 h} \quad (9)$$

Система уравнений (8) относительно переменных  $\varepsilon_1^*$ ,  $\varepsilon_2^*$ ,  $P^*$  определяет равновесную ветвь. Интегралы в (8) в общем случае вычисляются в пакете “Mathematica” (для простых

аппроксимаций диаграммы напряжений они находятся элементарно).

Для прямоугольного сечения ширина  $b = const$  может быть вынесена за знаки интегралов. Возможность вынесения ширины за знак интегралов, существенно упрощающая расчёт, сохраняется и для многих других видов поперечных сечений – швеллера, тавра, двутавра и др., так как эти сечения, как правило, можно рассматривать как сечения с кусочно-постоянной шириной.

#### Аппроксимации диаграммы напряжений.

Обычно используемые аппроксимации зависимости  $\sigma(\varepsilon)$  (или  $\varepsilon(\sigma)$ ) можно разделить на два типа: кусочно-гладкие аппроксимации, когда аналитический вид зависимости в упругой и пластической областях различен, и гладкие аппроксимации, описываемые единообразной аналитической зависимостью во всём диапазоне деформации. В данной работе использовались следующие аппроксимации.

##### 1. Кусочно-гладкая зависимость вида:

$$\begin{cases} \sigma = E\varepsilon & (\sigma < \sigma_y) \\ \sigma = E\varepsilon_y + E_t(\varepsilon - \varepsilon_y)^n & (\sigma > \sigma_y) \end{cases} \quad (10)$$

где  $E_t$  – касательный модуль,  $\sigma_y$  – предел текучести,  $\varepsilon_y = \sigma_y / E$ . В безразмерных параметрах (7) эта зависимость принимает вид:

$$\begin{cases} \sigma^* = \varepsilon^* & (\sigma^* < \sigma_y^*) \\ \sigma^* = \varepsilon_y^* + a(\varepsilon^* - \varepsilon_y^*)^n & (\sigma^* > \sigma_y^*) \end{cases} \quad (11)$$

где  $a$  и  $n$  – коэффициенты, характеризующие упрочнение. В частном случае кусочно-линейной зависимости  $a = E_t / E$  и  $n = 1$ , а для идеально упруго-пластического материала  $a = 0$ .

##### 2. Степенная аппроксимация (в размерном и безразмерном виде):

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{\sigma}{E} + 0.002 \left( \frac{\sigma}{\sigma_{0.2}} \right)^n, \\ \varepsilon^* &= \sigma^* + 2 \left( \frac{\sigma^*}{\sigma_{0.2}^*} \right)^n \end{aligned} \quad (12)$$

Изменяя в (12) параметр  $n$ , можно описать широкий спектр диаграмм напряжений (функция такого вида используется в американских

нормах прочности). Эта функция дает гладкую аппроксимацию диаграммы напряжений, без разделения на упругую и пластическую области.

Кривая, соответствующая большим значениям  $n$  (в частности,  $n=6$ ), отвечает материалам с небольшим упрочнением (типа стали Ст3); малые  $n$  соответствуют материалам, не имеющим явно выраженной площадки текучести.

3. Функция вида:

$$\sigma^* = a_1 \text{ArcSinH}(a_2 \varepsilon^*) \quad (13)$$

Условие  $d\sigma^*/d\varepsilon^* = 1$  при  $\varepsilon^* = 0$  (касание кривой (13) прямой  $\sigma^* = \varepsilon^*$  в точке  $\varepsilon^* = 0$ ) приводит к следующей связи между коэффициентами  $a_1$  и  $a_2$ :  $a_2 = 1/a_1$ . Кривые (13) для различных значений  $a_1$  построены на рис. 2.

В отличие от степенной зависимости (12) с фиксированным значением условного предела текучести  $\sigma_{0,2}$ , здесь с увеличением параметра  $a_1$  одновременно с упрочнением возрастает  $\sigma_{0,2}$ . Чтобы найти связь между коэффициентом  $a_1$  и условным пределом текучести, найдём остаточную деформацию  $\varepsilon_{\text{ост}}^*$  при данном напряжении  $\sigma^*$ . Так как (из (13))

$$\varepsilon^* = \frac{1}{a_2} \text{Sinh}\left(\frac{\sigma^*}{a_1}\right), \quad (14)$$

а для упругого материала  $\varepsilon^* = \sigma^*$ , то остаточная деформация равна

$$\varepsilon_{\text{ост}}^* = \frac{1}{a_2} \text{Sinh}\left(\frac{\sigma^*}{a_1}\right) - \sigma^* \quad (15)$$

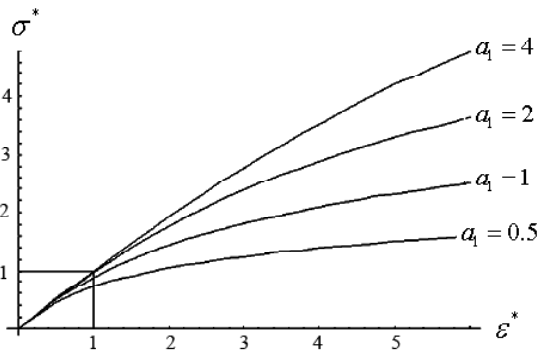


Рис. 2. Кривые  $\sigma^* - \varepsilon^*$  для аппроксимации  $\sigma^* = a_1 \text{ArcSinH}(\varepsilon^*/a_1)$ .

Таблица 1. Значения  $\sigma_{0,1}^*$  и  $\sigma_{0,2}^*$  для аппроксимации  $\sigma^* = a_1 \text{ArcSinH}(\varepsilon^*/a_1)$ .

Коэффициент $a_1$	$\sigma_{0,1}^*$	$\sigma_{0,2}^*$
0.5	1.0622	1.2817
1.0	1.7291	2.1245
2.0	2.7925	3.4582
4.0	4.4841	5.5850

Полагая здесь  $\varepsilon_{\text{ост}}^*$  равным 0.001 или 0.002, (т.е.  $\varepsilon_{\text{ост}}^*$  равным 1 или 2), получаем соответственно уравнения для определения  $\sigma_{0,1}^*$  (или  $\sigma_{0,2}^*$ ). В таблице 1 приведены значения  $\sigma_{0,1}^*$  и  $\sigma_{0,2}^*$  для некоторых значений  $a_1$  при  $a_2 = 1/a_1$ . Отметим, что значения  $\sigma_{0,1}^*$  и  $\sigma_{0,2}^*$  (для данного  $a_1$ ) значительно различаются между собой.

Интегралы, входящие в уравнения равновесия, при заданной аппроксимации кривой  $\sigma^* - \varepsilon^*$  могут быть вычислены в ряде случаев аналитически. При кусочно-гладкой аппроксимации (11) каждый из интегралов в (8) (или (4)) разбивается на интегралы по упругой и пластической частям поперечного сечения. Интегралы в этом случае вычисляются элементарно. При гладкой аппроксимации, например, вида (12), отпадает необходимость в двух разных интегралах.

Для определения предельной нагрузки к системе уравнений равновесия следует добавить условие равенства нулю якобиана  $J = 0$ , либо искать точку максимума на равновесной ветви.

Результаты численного анализа

Рассмотрим результаты, полученные для случая центрального сжатия стержня. Под центральным будем понимать сжатие со случайным несовершенством, для которого на основании многочисленных экспериментов ([5], [1]) принималось значение начального прогиба  $f_0/L = 1/750$ .

Для тестирования программы были выполнены расчеты предельных напряжений в случае идеально упругопластического материала ( $a = 0$ ) с пределом текучести  $\sigma_p = 240$  МПа;  $E = 2.1 \cdot 10^5$  Мпа, для стержня прямоугольного сечения и идеализированного двутавра с

различными значениями условной гибкости  $\bar{\lambda} = \lambda \sqrt{\sigma_y / E}$ . Под идеализированным двутавром будет понимать двутавр, который состоит только из двух полок (с бесконечно тонкой стенкой  $b_w \rightarrow 0$ ). Такое сечение можно рассматривать как предельный случай сечений, в которых материал наиболее удалён от нейтральной оси (так же как прямоугольное сечение представляет случаи с равномерным распределением материала). Полученные значения коэффициента  $\varphi = P_u / P_t$ , где  $P_u$  – предельная сила,  $P_t = \sigma_p \cdot A$  приведены в таблице 2. Для сравнения даны значения  $\varphi$ , рекомендуемые для стали с приведенными выше значениями  $\sigma_p$  и  $E$  различными нормативными документами.

Полученные значения  $\varphi$  для стержня прямоугольного сечения лежат между значениями, рекомендуемыми СНиП П 23-81 и Справочником проектировщика [6] (несколько выше значений, приведенных в СНиП П 23-81, и очень близко к [6]). Значения коэффициента  $\varphi$  для двутавра оказываются выше, чем для прямоугольного сечения, и заметно превышают их нормативные значения. Это объяснимо, так как в нормах прочности зависимость коэффициента  $\varphi$  от вида поперечного сечения не учитывается, и поэтому рекомендуемые значения  $\varphi$  должны определяться для самого неблагоприятного вида сечения.

**Кусочно-линейная диаграмма напряжений.** Рассмотрим результаты, полученные для материалов с упрочнением на основе кусочно-линейной диаграммой  $\sigma - \varepsilon$ . На рис. 3 построены равновесные ветви (с максимальным прогибом в качестве ведущего параметра) для стерж-

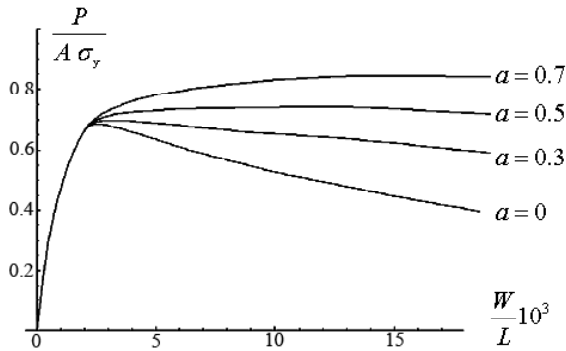
жня прямоугольного сечения при различных значениях коэффициента упрочнения  $a$ , для  $\bar{\lambda} = 3$  (материал с теми же значениями  $\sigma_y$  и  $E$ ).

Как видно из рис. 3, изменение упрочнения в некотором, достаточно широком, диапазоне практически не влияет на предельную нагрузку. Увеличение коэффициента  $a$ , начиная от 0, вначале влияет лишь на нисходящий участок равновесной ветви (после достижения предельной нагрузки). Начиная с некоторого значения (зависящего от гибкости), увеличение коэффициента  $a$  приводит к повышению точки максимума на равновесной кривой. Таким образом, можно говорить о существовании «порогового» значения коэффициента упрочнения  $a^*$ , до которого упрочнение не повышает предельную нагрузку. При уменьшении гибкости стержня интервал «нечувствительности» предельного напряжения к упрочнению сужается, т.е. «пороговое» значение коэффициента упрочнения уменьшается. Для  $\bar{\lambda} = 3$  пороговое значение примерно равно  $a^* \cong 0.5$ , для  $\bar{\lambda} = 2 - a^* \cong 0.2$ , для  $\bar{\lambda} = 1 - a^* \cong 0.05$ .

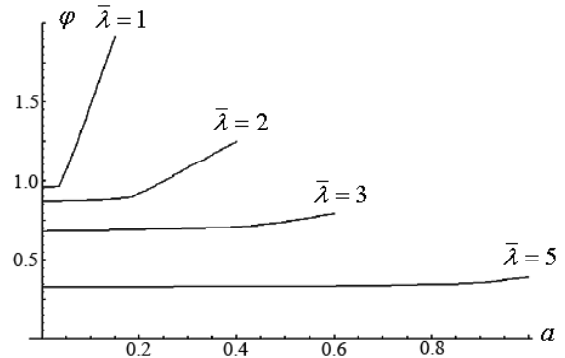
Зависимости относительной предельной нагрузки от коэффициента упрочнения для разных гибкостей представлены на рис. 4. Горизонтальные участки кривых на рис. 4 соответствуют интервалам «нечувствительности» предельного напряжения к коэффициенту упрочнения. На кривых отчетливо видно пороговое значение коэффициента упрочнения и его снижение при уменьшении гибкости. Вывод о существовании порогового значения коэффициента упрочнения, по-видимому, ранее в литературе не отмечался.

**Таблица 2.** Сравнение расчётных значений коэффициента  $\varphi$  для идеально упруго-пластического материала с приведенными в СНиП П 23-81 [1] и Справочнике [6].

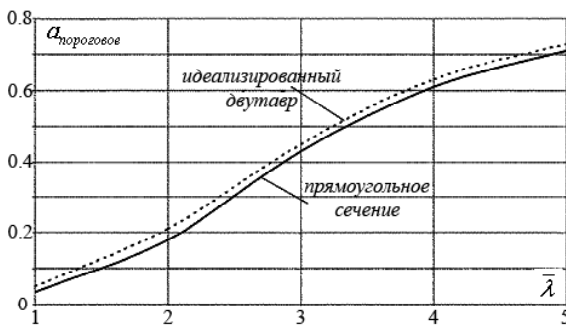
Условная гибкость	Расчёт по предельной нагрузке		СНиП П 23-81	Справочник проектировщика [6]
	Прямоугольное сечение	Двутавр		
$\bar{\lambda} = 1$	0.949 (0.893)	0.958 (0.901)	0.931	0.95
$\bar{\lambda} = 2$	0.839 (0.772)	0.903 (0.853)	0.805	0.86
$\bar{\lambda} = 3$	0.648 (0.597)	0.808 (0.758)	0.612	0.69
$\bar{\lambda} = 5$	0.319 (0.307)	0.485 (0.466)	0.293	0.32



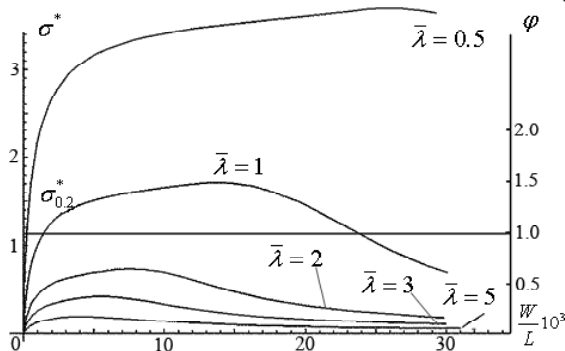
**Рис. 3.** Равновесные ветви для стержня из идеально упругопластического материала с кусочно-линейной диаграммой  $\sigma - \varepsilon$ , при различных значениях коэффициента упрочнения  $a$  (прямоугольное поперечное сечение, гибкость  $\bar{\lambda} = 3$ ).



**Рис. 4.** Зависимость коэффициента  $\varphi$  от коэффициента упрочнения  $a$  для стержня прямоугольного сечения из материала с кусочно-линейной диаграммой  $\sigma - \varepsilon$ .



**Рис. 5.** Зависимость «порогового» значения коэффициента упрочнения  $a$  от условной гибкости  $\bar{\lambda}$  для стержня из материала с кусочно-линейной диаграммой  $\sigma - \varepsilon$ .



**Рис. 6.** Равновесные ветви для стержня прямоугольного сечения, из материала с диаграммой напряжений (12) при  $n=2$ .

При значениях коэффициента упрочнения больших порогового значения, коэффициент продольного изгиба  $\varphi$  существенно зависит от упрочнения (в случае малой гибкости он также может оказаться выше единицы). Это означает, что расчет стержня из материала с таким упрочнением по отечественным и зарубежным нормам будет давать существенно заниженные значения предельной нагрузки.

Расчёты, выполненные для других типов профилей, в частности, идеализированного двутавра, дали аналогичные результаты. На рис. 5 показана зависимость «порогового» значения  $a$  от условной гибкости.

**Гладкая диаграмма напряжений.** Были рассмотрены стержни из материала, диаграм-

ма напряжений которого задана гладкой функцией  $\varepsilon - \sigma$  вида (12). На рис. 6 построены равновесные ветви для стержней прямоугольного сечения при различных  $\lambda$  для  $n=2$ . При расчете по СНИП предельные напряжения  $\sigma_{\max}^*$  (безразмерные) не могут превышать  $\sigma_{0,2}^*$ , которое в данном случае равно 1.143. Однако из этих рисунков видно, что при малых значениях гибкости стержня  $\sigma_{\max}^*$  может значительно превышать эту величину.

На рис. 7 построены графики зависимости максимального напряжения от относительной гибкости для различных значений  $n$ , и дано сравнение с расчетами по СНИП. Для степенной зависимости  $\sigma - \varepsilon$  с большим значением  $n$  предельные напряжения близки к кривой,

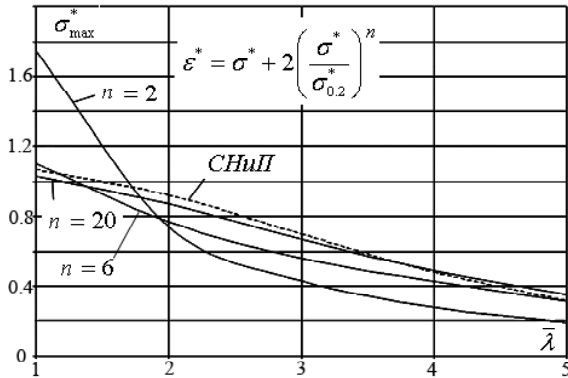


Рис. 7. Расчётные предельные напряжения в зависимости от гибкости для степенной диаграммы напряжений, и данные расчёта по СНиП.

полученной по СНиП. Но при малых значениях  $n$  ( $n=2$ ), т.е. при заметном упрочнении, результаты оказываются существенно отличными. Действительное значение предельной нагрузки при малых значениях  $\bar{\lambda}$  значительно выше полученных по СНиП (для больших  $\bar{\lambda}$  они оказываются меньше, это объясняется тем, что степенная аппроксимация (12) предполагает постепенное падение модуля упругости с самого начала нагружения, а не с некоторого предела пропорциональности).

Данные, приведенные на рис. 7, и результаты других расчётов показывают, что при любом выборе расчётного сопротивления  $R_y$  нормативный расчёт не отражает реальной зави-

симости предельных напряжений от гибкости (для рассматриваемых диаграмм  $\sigma - \varepsilon$ ). Если выбрать расчётное сопротивление  $R_y$  так, чтобы нормативные значения предельной нагрузки были близки к действительным значениям в диапазоне средних и больших гибкостей, то при малой гибкости расчётная нагрузка окажется значительно заниженной. И, напротив, при подборе  $R_y$  из условия близости нормативной кривой к кривой предельных напряжений при малых гибкостях нормативный расчёт будет существенно завышать несущую способность при средних и больших гибкостях.

### Сравнение расчетных и экспериментальных результатов

Для проверки точности приведенного решения проводилось сравнение с результатами экспериментов, описанных в [7]. В экспериментах исследовалась устойчивость тонкостенных стержней открытого профиля при центральном и внецентренном сжатии. Стержни с поперечным сечением в виде швеллера с отбортовками изготавливались гибкой листовых заготовок из нержавеющей стали ("cold formed profiles"). На рис. 8 показаны поперечное сечение стержней и обозначения и приведена схема нагружения.

Всего было испытано 77 образцов с двумя размерами поперечного сечения, указанными в таблице 3 (сечения обозначены ТНН и ТНК, соответственно). Длина  $L$  варьировалась от 222

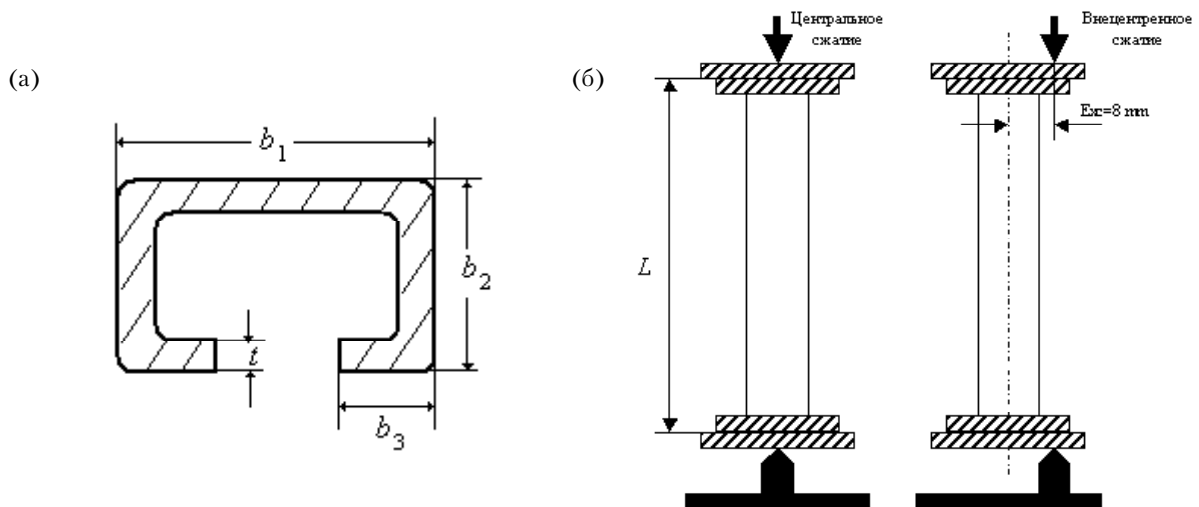


Рис. 8. а) Поперечное сечение – швеллер с отбортовкой; б) схема нагружения стержня.



Таблица 3. Усредненные размеры швеллера с отбортовкой.

Стержень	Стенка Ширина $b_1$ (мм)	Полка Ширина $b_2$ (мм)	Выступ Ширина $b_3$ (мм)	Толщина $t$ (мм)
ТНН	28.00	14.88	7.45	2.43
ТНК	38.00	17.19	9.99	3.05

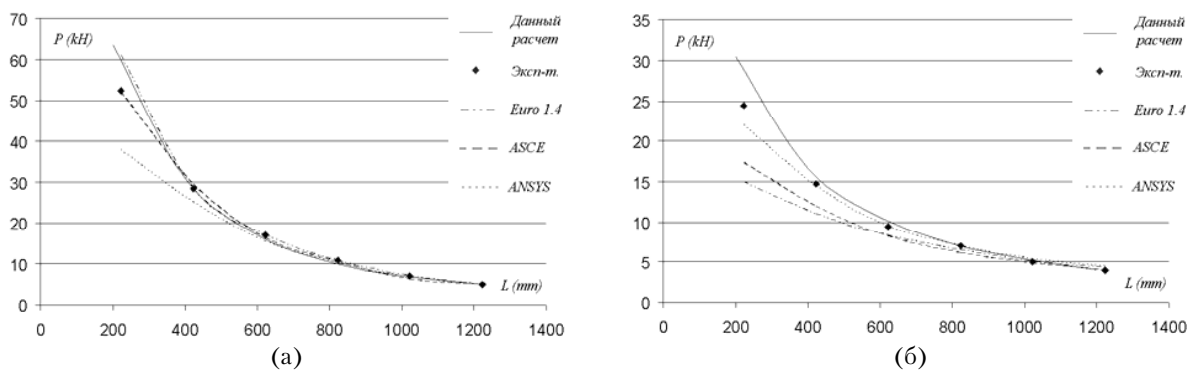


Рис. 9. Расчётные и экспериментальные предельные нагрузки в случае (а) центрального и (б) внецентренного сжатия швеллера с профилем ТНН.

до 1222 мм (11 различных значений длины, гибкость – от 38 до 207 для сечений ТНК и от 42 до 234 – для ТНН).

В работе [7] не приведены диаграммы напряжений материала, а даны лишь сведения об условном пределе текучести. Значения условного предела текучести материала  $\sigma_{0,2}$  определялись для образцов, вырезанных из исходного листа (до гибки) и из швеллеров (после изготовления). Так как сам процесс изготовления связан с нагартовкой материала, эти значения не совпадали. Для исходных листов  $\sigma_{0,2}$  в среднем равнялось 480 Н/мм<sup>2</sup> и 460 Н/мм<sup>2</sup> после изготовления – 520 Н/мм<sup>2</sup> и 540 Н/мм<sup>2</sup>, для ТНН и ТНК соответственно. В наших расчётах было принято среднее из этих двух значений, т.е.  $\sigma_{0,2} = 500$  Н/мм<sup>2</sup>. Диаграмма напряжений аппроксимировалась функцией  $\sigma^* = a_1 \text{ArcSinH}(\varepsilon^*/a_1)$ , где принято  $a_1 = 1.26$  (в соответствии с принятым значением  $\sigma_{0,2}$ ).

Результаты данного расчёта сравнивались не только с экспериментальными данными, но также с результатами расчётов по европейским (Eurocode 3, part 1.4) и американским (ASCE) нормам, а также полученными по методу конечных элементов в программе ANSYS (эти расчётные данные приведены в работе [7]). В европейских нормах материал считается, по

существу, идеально упругопластическим, причём предел текучести отождествляется с  $\sigma_{0,2}$ . В американских нормах диаграмма напряжений аппроксимируется степенной зависимостью (12) с  $n=6.216$ . Степенная зависимость с таким большим значением  $n$  лишь в слабой степени отражает упрочнение материала (она близка при  $\sigma > \sigma_{0,2}$  к диаграмме идеально упруго-пластического материала); в случае же малых  $n$  она приводит к заметному занижению расчётного модуля упругости для  $\sigma < \sigma_{0,2}$ .

На рис. 9, (а), (б), приведены графики зависимости предельной нагрузки от длины стержня для центрального и внецентренного сжатия профиля типа ТНН, полученные в различных расчётах, и даны экспериментальные точки. На рис. 10, (а), (б), приведены аналогичные результаты для профиля ТНК.

Расчеты по американским (ASCE) и европейским (Eurocode 3 (1.4)) нормам в случае центрального сжатия дают результаты, достаточно близкие к экспериментальным данным, почти во всем диапазоне гибкостей (для профиля ТНК соответствие с ASCE ухудшается для стержней малой гибкости (длина  $L < 400$ )). При внецентренном сжатии расчётные значения предельной нагрузки по обеим нормам весьма далеки от экспериментальных (занижение на 20–80 %).

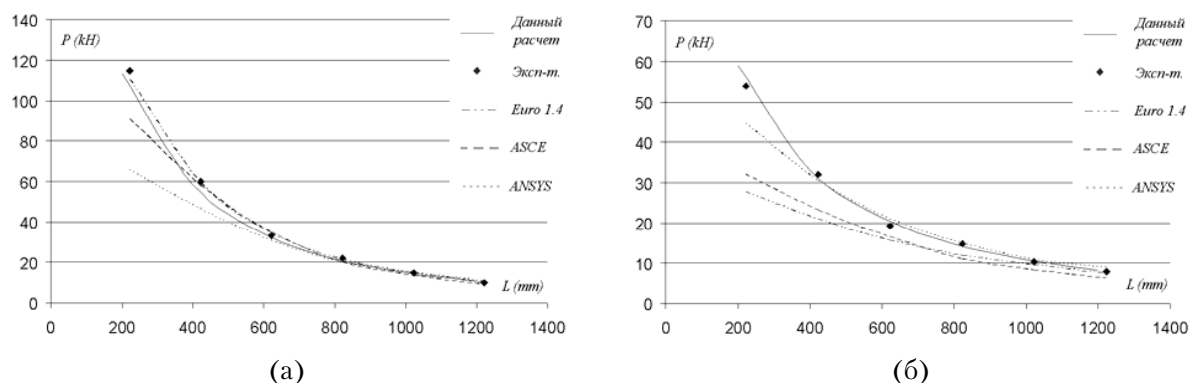


Рис. 10. Расчётные и экспериментальные предельные нагрузки в случае (а) центрального и (б) внецентренного сжатия швеллера с профилем *ТНК*.

Расчеты по ANSYS, напротив, показывают хорошее согласие с экспериментом для внецентренного сжатия, но дают заниженные результаты в случае центральной нагрузки, в диапазоне малой и средней гибкости (также примерно на 20–80 %).

Теоретическое решение, приведенное в данной работе, с аппроксимацией диаграммы напряжений в виде (13), оказывается в хорошем соответствии с экспериментальными данными как при центральном, так и внецентренном сжатии. При центральном сжатии расчётные данные весьма близки к расчёту по Eurocode 3 (1.4). Для профиля *ТНК* они практически совпадают с экспериментальными результатами для профиля *ТНК* во всем диапазоне гибкостей как для центрального, так и внецентренного сжатия; для профиля *ТНН* отмечаются расхождения до 10–15 % в случае очень коротких стержней.

## Выводы

Нормативный расчёт устойчивости ориентирован на материалы, диаграмма напряжений которых имеет выраженную площадку текучести, и не учитывают влияние упрочнения. Результаты приведенных расчётов показывают, что в определённом диапазоне упрочнение действительно не оказывает существенного влияния на предельную нагрузку. Однако для материалов с «плавной» диаграммой и постепенным уменьшением касательного модуля нормативный расчёт не отражает реальной зависимости предельных напряжений от гибко-

сти при любом выборе расчётного сопротивления  $R_y$ . Если выбрать расчётное сопротивление  $R_y$  так, чтобы нормативные значения предельной нагрузки были близки к действительным значениям в диапазоне средних и больших гибкостей, то при малой гибкости расчётная нагрузка окажется значительно заниженной. И, напротив, при подборе  $R_y$  из условия близости нормативной кривой к кривой предельных напряжений при малых гибкостях нормативный расчёт будет существенно завышать несущую способность при средних и больших гибкостях. Введение в нормы прочности характеристики упрочнения позволило бы учесть резервы несущей способности реальных материалов с упрочнением. При этом для аппроксимации диаграммы напряжений удобной является функция (13) с одним параметром упрочнения.

## Литература

1. СНиП II-23-81. Строительные нормы и правила. Часть 2. Нормы проектирования. Глава 23. Стальные конструкции. Москва 1990. Госстрой СССР.
2. ENV 1993 Eurocode 3: Design of steel structures. Part 1.1. General Rules and Rules for Buildings / CEN.— Brussels, 1992.
3. Polska Norma. Konstrukcje stalowe. Obliczenia statyczne i projektowanie. PN-90/B-03200. Polski Komitet normalizacji, miar i jakości. Wydawnictwo Normalizacyjne "ALFA", 1990.
4. Блейх Ф. Устойчивость металлических конструкций. — М.: ГИФМЛ. — 1959. — 544 с.
5. Тимошенко С.П. Устойчивость упругих систем. — М.: Гостехиздат. 1955. — 568 с.

6. Справочник проектировщика (расчётно-теоретический), под ред. А.А. Уманского, Книга 2, Изд.-е 2-ое. — М.: Стройиздат, 1973.
7. J. Rhodes, M. Macdonald M. Kotelko and W. McNiff. Buckling load capacity of stainless steel columns subject to concentric and eccentric loading.

In: Thin-Walled Structures. Advances and developments (Third International Conference on Thin-Walled Structures, Cracow, 2001), Ed. J. Zaras, K. Kowal-Michalska, J. Rhodes. Elsevier Science Ltd., 2001, pp. 225-232.

**Маневич Аркадій Исаакович** є професором кафедри обчислюваної механіки та міцності конструкцій Дніпропетровського Національного університету. Член Європейського общества механіків (EUROMECH) и німецького общества прикладної математики и механіки (GAMM). Наукові інтереси: Стійкість тонкостінних конструкцій, нелінійна динамка систем с багатьма степенями свободи и континуальних систем, методи безумовної та умовної мінімізації функцій и оптимальне проектування конструкцій.

**Махін Олександр Володимирович** є аспірантом кафедри обчислюваної механіки та міцності конструкцій Дніпропетровського Національного університету. Наукові інтереси: Стійкість стержнів в уруго-пластичної області.

**Маневич Аркадій Исаакович** является профессором кафедры вычислительной механики и прочности конструкций Днепропетровского национального университета. Член Европейского общества механиков (EUROMECH) и немецкого общества прикладной математики и механики (GAMM). Научные интересы: устойчивость тонкостенных конструкций, в частности, нелинейная теория связанной потери устойчивости стержней, пластин и оболочек; нелинейная динамика систем с несколькими степенями свободы и континуальных систем (оболочек вращения); методы безусловной и условной минимизации функций и оптимальное проектирование конструкций (тонкостенных стержней, подкреплённых пластин и оболочек).

**Махин Александр Владимирович** является аспирантом кафедры вычислительной механики и прочности конструкций Днепропетровского национального университета. Научные интересы: устойчивость стержней в уругопластичной области.

**Manevych Arkadiy Isaakovych** is a professor of Department of applied mechanics and structures strength of Dnipropetrovsk National University. The member of European society of mechanics (EUROMECH) and Germany society of applied mathematics and mechanics. His research interests include the stability of thin-walled structures, non-linear dynamics of systems and continual systems, methods of minimizing functions and structural optimization.

**Makhin Oleksandr Volodymyrovych** is an assistant of Department of applied mechanics and structures strength of Dnipropetrovsk National University. His research interests include the stability of structures.

