



(05)-0094-1

МЕТОДИ ПРОДОВЖЕННЯ ПО НАЙКРАЩОМУ ПАРАМЕТРУ У ФІЗИЧНО НЕЛІНІЙНІЙ МОДЕЛІ ПЕРЕТИНУ СТАЛЕВОГО СТРИЖНЯ

Ю.С. Мартинов, В.Є. Новіков

*Кафедра "Металеві конструкції", Білоруський національний технічний університет,
пр-т Ф. Скорини, 150, 220113, г. Мінськ, Білорусь.
E-mail: Vnovikov@sf.unibel.by*

Отримана 25 травня 2005; прийнята 25 липня 2005

Анотація. У роботі розглядається фізично нелінійна розрахункова модель довільного поперечного перерізу сталевго стрижня при складному опорі (розтягання-стиск, вигин і вільне крутіння), що описує його напружено-деформований стан. Наводяться методи рішення нелінійних рівнянь розрахункової моделі поперечного перерізу. Чисельними методами досліджується ефективність використання методів продовження по найкращому параметру в розрахунковій моделі при наявності граничних точок кривої рішень.

Ключові слова: сталевий перетин, складний опір, методи продовження по параметру, пружне-пластичне крутіння, гранична точка.

МЕТОДЫ ПРОДОЛЖЕНИЯ ПО НАИЛУЧШЕМУ ПАРАМЕТРУ В ФИЗИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНОЙ МОДЕЛИ СЕЧЕНИЯ СТАЛЬНОГО СТЕРЖНЯ

Ю.С. Мартынов, В.Е. Новиков

*Кафедра "Металлические конструкции", Белорусский национальный технический университет,
пр-т Ф. Скорины, 150, 220113, г. Минск, Беларусь.
E-mail: Vnovikov@sf.unibel.by*

Получена 25 мая 2005; принята 25 июля 2005

Аннотация. В работе рассматривается физически нелинейная расчетная модель произвольного поперечного сечения стального стержня при сложном сопротивлении (растяжение-сжатие, изгиб и свободное кручение), описывающая напряженно-деформированное состояние. Приводятся методы решения нелинейных уравнений расчетной модели поперечного сечения. Численными методами исследуется эффективность использования методов продолжения по наилучшему параметру в расчетной модели при наличии предельных точек кривой решений.

Ключевые слова: стальное сечение, сложное сопротивление, методы продолжения по параметру, упруго-пластическое кручение, предельная точка.

METHODS OF CONTINUATION ON THE BEST PARAMETER IN MATERIAL NONLINEAR SECTION MODEL OF A STEEL ROD

Yu.S. Martynov, V.Ye. Novikov

Department of metal structures, Byelorussian National Technical University,

F. Scoriny str., 150, 220113, Minsk, Bilorus.

E-mail: Vnovikov@sf.unibel.by

Received 25 May 2005; accepted 25 July 2005

Abstract. In the articles the material nonlinear mathematical model of any cross section of a steel rod at complex resistance (stretching-compression, a bend and free torsion), describing the stress-strain state is considered. Solution methods of the nonlinear equations of mathematical cross section model are resulted. Numerical methods investigate efficiency of continuation methods on the best parameter in mathematical model at presence of limiting points of solution curve.

Keywords: steel section, complex resistance, methods of continuation on parameter, elastic-plastic free torsion, limiting point.

1. Введение

Определение напряженно-деформированного состояния стержневого элемента в линейной постановке представляет собой прямую краевую задачу пространственной теории упругости. Решение задачи сводится к решению системы дифференциальных уравнений в частных производных. Один из подходов к решению такой задачи состоит в сведении геометрически нелинейной объемной задачи (3d) пространственной теории пластичности к физически нелинейной плоской задаче (2d) и геометрически нелинейной одномерной задаче (1d). При решении двумерной задачи обычно рассматривается поперечное сечение, а при одномерной – продольная ось стержневого элемента.

Рассматривается стержневой элемент, который:

- имеет произвольное односвязное поперечное сечение нормальное продольной оси X ;
- воспринимает крутящий M_x и изгибающие моменты в двух плоскостях M_y, M_z , продольное усилие N_x .

Решение одномерной задачи для продольной оси стержня в данной статье не рассматривается. Рассмотрим решение физически нелинейной плоской задачи для поперечного сечения стержня.

Предлагаемая расчетная модель описывает напряженно-деформированное состояние произвольного односвязного стального поперечно-

го сечения (рис. 1), представляет собой систему нелинейных уравнений и включает в себя:

- уравнения равновесия внешних (внутренних для стержня) и опорных усилий в сечении;
- кинематические законы распределения относительных деформаций в сечении;
- зависимости между деформациями и напряжениями (диаграммы деформирования) $\sigma_i = f(\varepsilon_i)$, в общем виде немонотонные и негладкие;
- зависимости деформационной теории пластичности;
- допущение об эквивалентности распределения относительных деформаций в упругой и упругопластической стадиях, что не всегда правомерно, особенно для деформаций сдвига [21].

Закон распределения относительных деформаций сдвига устанавливается с использованием классической теории кручения Сен-Венана.

Система уравнений расчетной модели устанавливает связь между вектором внешней нагрузки f и вектором параметров деформаций u , она может не иметь решений, либо иметь несколько решений.

Расчетная модель стальных сечений является обобщением и развитием деформационной модели, используемой в теории железобетона

[9], [15], а также методов, используемых для расчета сечений стальных конструкций по критерию ограниченных пластических деформаций [18], [20], [21].

2. Расчетная модель стальных сечений

Уравнения равновесия усилий в сечении [18]:

$$\begin{cases} N_x - \langle \sigma_x \rangle = 0 \\ M_x - \langle \tau_{xy}(z - z_0) - \tau_{xz}(y - y_0) \rangle = 0 \\ M_y - N_x(z_N - z_0) - \langle \sigma_x(z - z_0) \rangle = 0 \\ M_z - N_x(y_N - y_0) - \langle \sigma_x(y - y_0) \rangle = 0 \end{cases} \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{f} - \mathbf{F}(\mathbf{u}) = \boldsymbol{\psi}(\mathbf{u}) = \mathbf{0},$$

где \mathbf{f} – вектор нагрузок на сечение;

$\mathbf{F}(\mathbf{u})$ – вектор-функция отпорных усилий в сечении;

$\mathbf{u} = \{\varepsilon_{0x}, k_x, k_y, k_z\}^T$ – вектор параметров деформаций;

$\sigma_x = \sigma_x(y, z)$, $\tau_{xy} = \tau_{xy}(y, z)$, $\tau_{xz} = \tau_{xz}(y, z)$ – функции нормальных и касательных напряжений;

y, z – координаты рассматриваемой точки сечения;

y_N, z_N – координаты точки приложения продольного усилия N_x ;

y_0, z_0 – координаты центра тяжести сечения.

Заметим, что в случае использования для решения уравнений модели метода переменных параметров упругости центр тяжести перемещается, т.к. модуль упругости не остается постоянным в каждой точке сечения.

В формуле (1) и далее принято обозначение интегрирования по поперечному сечению:

$$\langle \bullet \rangle = \int_A \bullet dA.$$

Распределение относительных деформаций в сечении в упругой стадии:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \varepsilon_{0x} - k_y(z - z_0) - k_z(y - y_0), \\ \varepsilon_y &= \varepsilon_z = -\mu \varepsilon_x, \\ \gamma_{xy} &= k_x(\varphi_y - (z - z_0)), \\ \gamma_{xz} &= k_x(\varphi_z + (y - y_0)), \end{aligned} \quad (2)$$

где $\varphi = \varphi(y, z)$ – функция кручения Сен-Венана (функция депланации), а также здесь и далее принято обозначение частной производной $\varphi_{,\bullet} = \partial \varphi / \partial \bullet$.

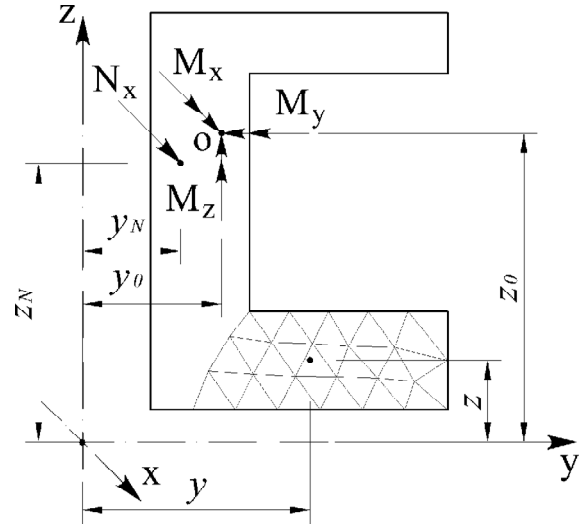


Рисунок 1. Поперечное сечение стального стержня.

Функция интенсивности деформаций:

$$\varepsilon_i = \varepsilon_i(y, z) = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{2(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + \frac{3}{2}(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{xz}^2)} \quad (3)$$

Интенсивности напряжений определяются по диаграммам деформирования материалов $\sigma_i = f(\varepsilon_i)$.

Функции нормальных и касательных напряжений в упругопластической стадии:

$$\sigma_x = \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}(\varepsilon_x - \varepsilon_0), \quad \tau_{xy} = \frac{\sigma_i}{3\varepsilon_i} \gamma_{xy}, \quad \tau_{xz} = \frac{\sigma_i}{3\varepsilon_i} \gamma_{xz} \quad (4)$$

Определение функции кручения φ , как известно, сводится к однородной задаче Неймана:

$$\begin{aligned} \Delta \varphi &= 0 \text{ с учетом } \varphi_{,n} = z \cos \alpha - y \sin \alpha = \\ &= z n_y - y n_x \end{aligned} \quad (5)$$

где Δ – двумерный оператор Лапласа; n, α – нормаль к контуру сечения и угол ее наклона к оси Y.

3. Численные методы решения

В расчетной модели сечения встречается три разновидности численных задач: задача численного двумерного интегрирования, краевая

двумерная задача и задача решения системы нелинейных уравнений.

Численное интегрирование по поперечному сечению производится по квадратурным формулам Гаусса для треугольника, для чего необходима предварительная триангуляция области.

Решение краевой задачи для определения функции кручения выполняется вариационным методом в форме метода конечных элементов [16]. Функция формы на треугольном конечном элементе принимается в виде полинома второй или третьей степени.

Для решения системы нелинейных уравнений модели (1) можно использовать методы дискретного или непрерывного продолжения по параметру, а также их сочетания. Рассмотрим данные методы подробнее.

3.1. Методы дискретного продолжения по параметру

Методы дискретного продолжения по параметру (МДПП) являются итерационными, наиболее часто используются метод простой итерации, метод Ньютона-Рафсона и его модификации, обобщенный метод секущих, квазиньютоновские методы. В нашем случае некоторые из перечисленных методов имеют физическую интерпретацию в виде методов переменных параметров упругости [10], дополнительных нагрузок [17], дополнительных деформаций [10], комбинированного метода [20]. Заметим, что перечисленные варианты метода упругих решений [17] являются более общими и могут использоваться не только при сведении задачи к системе нелинейных уравнений.

В качестве первого приближения вектора параметров деформаций \mathbf{u} в МДПП выгоднее принять значения, полученные из упругого расчета:

$$\mathbf{u} = \langle \mathbf{d} \rangle^{-1} \mathbf{f}, \quad (6)$$

где симметрическая матрица:

$$\mathbf{d} = \mathbf{d}(y, z) = \begin{pmatrix} E & 0 & E(z-z_0) & E(y-y_0) \\ & d_{22} & 0 & 0 \\ & & E(z-z_0)^2 & E(y-y_0)(z-z_0) \\ \text{симметрично} & & & E(y-y_0)^2 \end{pmatrix} \quad (7)$$

$$d_{22} = G[\varphi_z(y-y_0) - \varphi_y(z-z_0) + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2].$$

Нулевые элементы матрицы жесткости сечения $\langle \mathbf{d} \rangle$ указывают на отсутствие взаимовлияния (при принятых нами допущениях) соответствующих силовых факторов.

Для метода Ньютона-Рафсона (МНР), имеющего квадратичную скорость сходимости, новый вектор деформаций на i -той итерации определяется:

$$\mathbf{u}_{(i+1)} = \mathbf{u}_{(i)} - \mathbf{J}_{(i)}^{-1}[\mathbf{f} - \mathbf{F}(\mathbf{u}_{(i)})], \quad (8)$$

где $\mathbf{J}_{(i)}^{-1}$ – матрица, псевдообратная матрице Якоби [12].

3.2. Методы непрерывного продолжения по параметру нагрузки

Методы непрерывного продолжения по параметру (МНПП) более медленные, но позволяют проследить напряженно-деформированное состояние сечения на всей истории нагружения, что в том числе дает возможность учесть временные процессы – коррозию, влияние температуры и др. Кроме того, некоторые из них позволяют исследовать “запредельную” работу сечения и найти все возможные решения. Наиболее часто используются методы Эйлера (метод последовательных нагружений), явные и неявные методы Рунге-Кутты различных порядков.

В матричном виде система разрешающих уравнений модели сечения имеет вид:

$$\mathbf{f} - \mathbf{F}(\mathbf{u}) = \psi(\mathbf{u}) = 0, \quad (9)$$

где \mathbf{u} – вектор параметров деформаций, $\mathbf{u} \in R_m$.

После ввода параметра t в вектор нагрузки \mathbf{f} и дифференцирования $\psi(\mathbf{u}, t)$ по t [14]:

$$\mathbf{J}(\mathbf{u}, t) \frac{d\mathbf{u}}{dt} + \frac{\partial \psi(\mathbf{u}, t)}{\partial t} = 0, \quad (10)$$

где $\mathbf{J}(\mathbf{u}, t) = \frac{\partial \psi(\mathbf{u}, t)}{\partial \mathbf{u}}$ – матрица Якоби $m \times m$ (матрица касательной жесткости).

То же в явном виде:

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{u}, t) \frac{\partial \psi(\mathbf{u}, t)}{\partial t}. \quad (11)$$

Это есть система обыкновенных линейных относительно производной дифференциальных уравнений (ОДУ) первого порядка. Незвестная вектор-функция параметров деформаций $u(t)$ удовлетворяет начальным условиям:

$$u(t_0) = u(0) = \mathbf{0}, \quad (12)$$

что соответствует начальному ненагруженному состоянию сечения.

Данная постановка задачи является методом непрерывного продолжения решения по параметру и сводится к интегрированию задач Коши.

Система ОДУ (11) может быть решена методами Эйлера (метод последовательных нагружений), Рунге-Кутта, Адамса-Штермера и другими.

3.3. Методы непрерывного продолжения по наилучшему параметру

Решение системы (11) образует непрерывную кривую K в $(m+1)$ -мерном евклидовом пространстве $R_{m+1}; \{u, t\}$. Однако кривая K даже при простых нагружениях является немонотонной и негладкой, наряду с регулярными точками имеет особые. В регулярных точках определитель $\det(J) \neq 0$ и ранг матрицы $\text{rank}(J) = m$, в особых $\det(J) = 0$, $\text{rank}(J) = r < m$. Продолжение решения в особых точках невозможно, что обычно приводит к прерыванию процесса решения. Таким образом, может быть получено только одно решение из нескольких, либо не получено ни одного решения [8]. Для возможности продления решения можно использовать смену параметра (иногда неоднократно), но выбор оптимального параметра не очевиден, и его смена усложняет решение.

Более эффективным, с вычислительной точки зрения, подходом является введение нового параметра продолжения s , являющегося длиной кривой K множества решений системы (10) в R_{m+1} [7], [11]. Данная постановка задачи получила название метод продолжения по наилучшему параметру [13]. Данный подход активно развивается, о чем свидетельствует множество работ в открытой печати, некоторые из них [1], [2], [3], [4], [5], [6], [7], [11]. Более подробный обзор можно найти в [13].

После введения параметра продолжения s имеем:

$$y(u, s) = 0, \quad u = u(s), \quad t = t(s). \quad (13)$$

Дифференцируя вектор-функцию y по параметру продолжения s и добавляя выражение для длины кривой K , получим систему:

$$\begin{aligned} \left(\frac{du}{ds}\right)^T \left(\frac{du}{ds}\right) + \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 &= 1, \\ \frac{\partial \psi}{\partial u} \frac{du}{ds} + \frac{\partial \psi}{\partial t} \frac{dt}{ds} &= \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (14)$$

Данную систему нелинейных уравнений относительно производных можно решать непосредственно численными методами.

Последнее матричное уравнение представляет собой недоопределенную систему m линейных ОДУ для $m+1$ неизвестных dv/ds , его можно записать в виде:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \psi}{\partial u} & \frac{du}{ds} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{du}{ds} & \frac{dt}{ds} \end{bmatrix}^T = \mathbf{0} \Leftrightarrow \overline{J} \frac{dv}{ds} = \mathbf{0}, \quad (15)$$

где $v = \{u, t\}^T$ – расширенный вектор-столбец параметров деформаций, $v \in R_{m+1}$;

\overline{J} – расширенная матрица Якоби $m \times (m+1)$.

Уравнение (15) с начальным условием $v|_{s=0} = \mathbf{0}$ (что соответствует ненагруженному состоянию) представляет неявно сформулированную задачу Коши.

Заметим, что среди особых точек ($\det(J) = 0$) кривой решений расчетной модели сечения обычно встречаются предельные, в которых $\text{rank}(\overline{J}) = m$, $\text{rank}(J) = m-1$. Существенно особые точки, в которых возможно ветвление (т.е. $\text{rank}(J) \leq \text{rank}(\overline{J}) < m$) кривой K встречаются редко. Так как в предельных точках $\det(\overline{J}) \neq 0$, то продолжение решения в них возможно.

Система ОДУ (15) в явном виде [13]:

$$v' = \frac{dv}{ds} = \overline{J}^{-1} \mathbf{o}_1 = \text{ort}(\overline{J}, \mathbf{Q}), \quad (16)$$

где v' – неизвестный орт касательной к кривой K в точке v и ортогональный векторам-строкам матрицы \overline{J} , $v' \in R_{m+1}$;

$\overline{\mathbf{J}}_a = \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{J}} \\ \mathbf{Q} \end{bmatrix}$ – дополненная матрица Якоби $(m+1) \times (m+1)$, образованная присоединением $(m+1)$ -мерного вектора-строки \mathbf{Q} снизу;
 $\overline{\mathbf{J}}_a^{-1}$ – псевдообратная дополненная матрица Якоби;

$\mathbf{o}_1 = \{0, \dots, 0, 1\}$ – $(m+1)$ -мерный вектор-строка.

По смыслу (15) сводится к определению орта \mathbf{v}' по заданным векторам-строкам $\overline{\mathbf{J}}_{i,j}$, $i=1, m; j=\{1, 2, \dots, m+1\}$ матрицы $\overline{\mathbf{J}}$ и вектору \mathbf{Q} , линейно независимому со строками $\overline{\mathbf{J}}_{i,j}$. Данная операция обозначена оператором $ort(\bullet, \bullet)$.

Заметим, что введение псевдообратной матрицы (Мура-Пенроуза) позволяет улучшить устойчивость численного решения при $rank(\mathbf{J}) < m$. Данная ситуация возможна при наличии только одной ненулевой нагрузки.

Вычислительная погрешность решения системы (15) будет тем меньше, чем ближе \mathbf{Q} к искомому вектору \mathbf{v}' . Очевидно, что на итерации $k+1$ в качестве вектора $\mathbf{Q}_{(k+1)}$ можно принять вектор $\mathbf{v}'_{(k)}$ с предыдущей итерации. На первой итерации обычно принимается $\mathbf{Q}_{(1)} = \{0, \dots, 0, 1\}$.

Рассмотрим две явные схемы непрерывного продолжения решения путем численного интегрирования задач Коши (15) с начальным условием $\mathbf{v}|_{s=0} = \mathbf{0}$ по параметру s .

Обозначим:

$$\mathbf{v}(s_k) = \mathbf{v}_{(k)}, \quad \mathbf{v}'(s_k) = \mathbf{v}'_{(k)}, \\ \overline{\mathbf{J}}(\mathbf{v}(s_k)) = \overline{\mathbf{J}}(\mathbf{v}_{(k)}) = \overline{\mathbf{J}}_{(k)}, \quad \mathbf{Q}(s_k) = \mathbf{Q}_{(k)}. \quad (17)$$

Алгоритм метода Эйлера на итерации $k = 1, 2, 3, \dots$ примет вид [13]:

$$s_1 = 0, \quad \mathbf{v}_{(1)} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{Q}_{(1)} = \{0, \dots, 0, 1\}, \\ s_{k+1} = s_k + \Delta s_k, \quad \mathbf{v}'_{(k)} = ort(\overline{\mathbf{J}}_{(k)}, \mathbf{Q}_{(k)}), \\ \mathbf{v}_{(k+1)} = \mathbf{v}_{(k)} + \mathbf{v}'_{(k)} \Delta s_k, \quad \mathbf{Q}_{(k+1)} = (\mathbf{v}'_{(k)})^T. \quad (18)$$

Алгоритм для 4-х шагового метода Рунге-Кутты 4-го порядка с погрешностью $O(\Delta s^5)$:

$$s_1 = 0, \quad \mathbf{v}_{(1)} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{Q}_{(1)} = \{0, \dots, 0, 1\}, \\ s_{k+1} = s_k + \Delta s_k, \quad \mathbf{v}'_{1(k)} = ort(\overline{\mathbf{J}}(\mathbf{v}_{(k)}), \mathbf{Q}_{(k)}), \\ \mathbf{v}'_{2(k)} = ort(\overline{\mathbf{J}}(\mathbf{v}_{(k)} + 0.5\mathbf{v}'_{1(k)}\Delta s_k), \mathbf{v}'_{1(k)}), \\ \mathbf{v}'_{3(k)} = ort(\overline{\mathbf{J}}(\mathbf{v}_{(k)} + 0.5\mathbf{v}'_{2(k)}\Delta s_k), \mathbf{v}'_{2(k)}), \\ \mathbf{v}'_{4(k)} = ort(\overline{\mathbf{J}}(\mathbf{v}_{(k)} + \mathbf{v}'_{3(k)}\Delta s_k), \mathbf{v}'_{3(k)}),$$

$$\mathbf{v}_{(k+1)} = \mathbf{v}_{(k)} + (1/6)(\mathbf{v}'_{1(k)} + 2\mathbf{v}'_{2(k)} + \\ + 2\mathbf{v}'_{3(k)} + \mathbf{v}'_{4(k)})\Delta s_k, \\ \mathbf{Q}_{(k+1)} = (\mathbf{v}'_{4(k)})^T. \quad (19)$$

Отметим, что для устойчивости процесса численного решения необходимо масштабирование вектора \mathbf{v} .

3.4. Результаты численных расчетов

Численные расчеты проводились для квадратного стального сечения 1×1 .

Для тестирования использовалась диаграмма одноосного растяжения-сжатия в виде синусоиды с ограниченной областью определения (рис. 2):

$$\sigma_x = \begin{cases} f_y \sin(\varepsilon_x \pi / \varepsilon_u), & \forall \varepsilon_x \in [-\varepsilon_u, \varepsilon_u] \\ 0, & \forall \varepsilon_x \notin [-\varepsilon_u, \varepsilon_u] \end{cases} \quad (20)$$

Данная кривая имеет предельные точки $(-\varepsilon_m, -f_y)$, (ε_m, f_y) и их прохождение имеет интерес. Очевидно, что при использовании данной диаграммы классические методы последовательных нагружений и Ньютона-Раффсона будут давать только одно решение и не будут сходиться при достижении предельной точки.

Заметим, что ниспадающая ветвь диаграммы на участке $[|\varepsilon_m|, |\varepsilon_u|]$ не является абсолютно условной, а присуща некоторым реальным материалам, например, бетону.

Расчеты выполнялись методом Эйлера и 4-х шаговым методом Рунге-Кутты 4-го порядка точности. Точные кривые k_y-M_y , k_x-M_x получены методом последовательных перемещений.

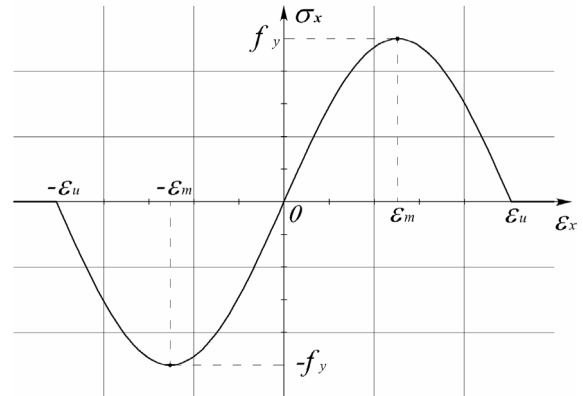


Рисунок 2. Тестовая диаграмма одноосного растяжения-сжатия.

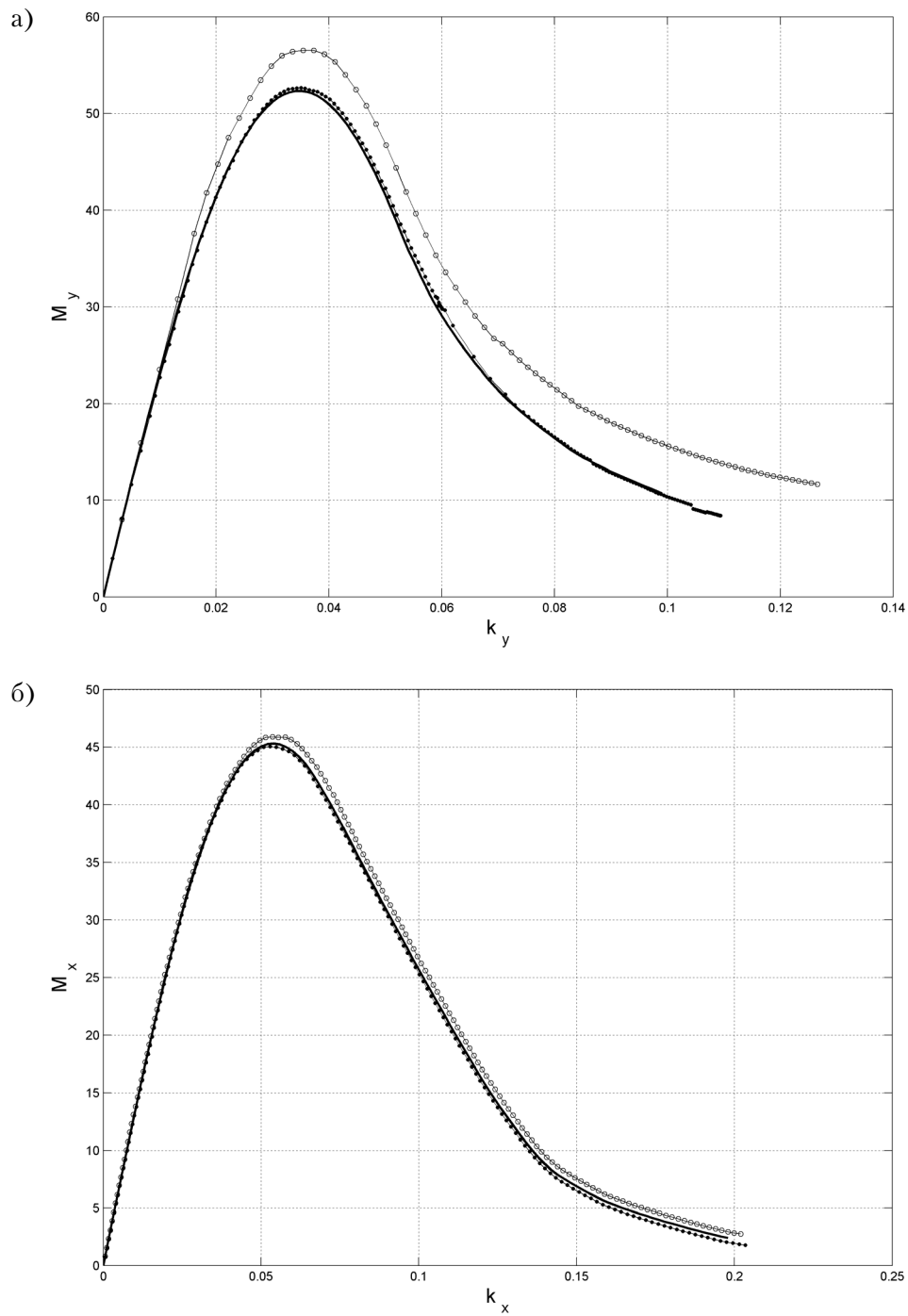


Рисунок 3. Зависимости параметры деформаций–нагрузка для квадратного сечения

- а) $k_y - M_y$ для нагрузки $N_x = M_x = M_z = 0, M_y \neq 0$,
 б) $k_x - M_x$ для нагрузки $N_x = M_y = M_z = 0, M_x \neq 0$;

- — точная кривая;
- — кривая, полученная методом Эйлера;
- — кривая, полученная методом Рунге-Кутты 4-го порядка

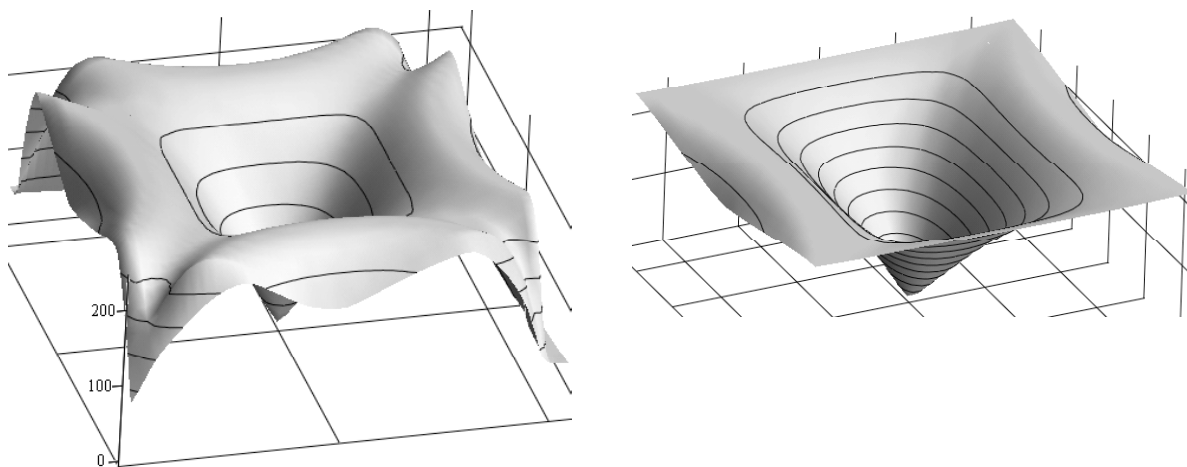


Рисунок 4. Поверхности интенсивностей напряжений в упругопластической стадии при действии моментов
 а) при действии предельного крутящего момента $M_{x,lim}$
 б) при действии одновременно крутящего и изгибающего моментов.

Результаты двух расчетов разными методами при действии на сечение только изгибающего момента M_y и только крутящего момента M_x приведены на рис. 3.

В обоих расчетах Метод Рунге-Кутты показал хорошую сходимость, во втором расчете ($M_x \neq 0$) вследствие малого шага параметра λ неплохую сходимость показал также метод Эйлера.

На рис. 4 представлены поверхности интенсивностей напряжений в упругопластической стадии при действии крутящих и изгибающих моментов. Упруго-пластическое кручение при использовании диаграммы Прандтля исследовано в [19].

Приведенные алгоритмы реализованы в компьютерной программе FPLASTIC (<http://helpstud.narod.ru>), работающей под управлением пре-постпроцессора FEMAP.

Литература

1. Crisfield M.A. An arc-length method including line searches and accelerations // *Internat. J. Numer. Methods Engrg.* – 1983. – Vol. 19. – pp. 1269–1289.
2. Crisfield M.A. A new arc-length method for handling sharp snap-backs // *Computers & Structures.* – 1998. – Vol. 66, № 5. – pp. 705–709.
3. Doedel E.J., Keller H.B., Kernevez J.P. Numerical analysis and control of bifurcation problems: I // *Int. J. Bifurcation and Chaos.* – 1991. – Vol. 1, №3. – pp. 493–520.
4. Keller H.B. Numerical solution of bifurcation and nonlinear eigenvalue problems // *Applications of Bifurcation Theory*, ed. Rabinowitz P.H. (Academic Press, New York). – 1977. – pp. 359–384.
5. Ragon S.A., Gurdal Z., Watson L.T. A comparison of three algorithms for tracing nonlinear equilibrium paths of structural systems // *International Journal of Solids and Structures.* – 2002. – Vol. 39, № 3. – pp. 689–698.
6. Riks E. An incremental approach to the solution of snapping and buckling problems // *Int. J. Solids and Struct.* – 1979. – Vol. 15, №7. – pp. 529–551.
7. Riks E. The application of Newton's method to the problem of elastic stability // *Journal of Applied Mechanics.* – 1972. – Vol. 39, №4. – pp. 1060–1065.
8. Алявдин П.В., Симбиркин В.Н. Решение негладких задач расчета элементов железобетонных конструкций // *Будуаінцтва. Строительство. Construction.* – 2000. – №1. – с. 11–20.
9. Байков В.Н., Додонов М.И., Расторгуев Б.С. Общий метод расчета железобетонных конструкций // *Бетон и железобетон.* – 1987. – № 5. – с. 13–17.
10. Биргер И.А. Расчет конструкций с учетом пластичности и ползучести // «*Известия АН СССР. Механика*». – 1965. – №2. – с. 113–119.
11. Ворovich И.И., Зипалова В.Ф. К решению нелинейных краевых задач теории упругости методом перехода к задаче Коши // *Прикл. математика и механика.* – 1965. – Т. 29, Вып. 5. – с. 894–901.
12. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. – М.: Наука, 1967. – 576 с.
13. Григолюк Э.И., Шалашилин В.И. Проблемы нелинейного деформирования: Метод продолжения по параметру в нелинейных задачах механики твердого деформируемого тела. – М.: Наука. 1988. – 232 с.

14. Давиденко Д.Ф. О приближенном решении систем нелинейных уравнений // Укр. мат. журн. – 1953. – Т. 5, №2. – с. 196–206.
15. Залесов А.С., Чистяков Е.А., Ларичева И.Ю. Деформационная расчетная модель железобетонных элементов при действии изгибающих моментов и продольных сил // Бетон и железобетон. – 1996. – №5. – с. 16–18.
16. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. – М.: Мир, 1975. – 542 с.
17. Ильюшин А.А. Пластичность. – М.: Гостехиздат, 1948. – 376 с.
18. Мартынов Ю.С., Новиков В.Е. Физически нелинейная расчетная модель сечений стальных стержней при сложном сопротивлении // Сб. тр. VIII Украинской научно-технической конференции «Металлические конструкции: взгляд в прошлое и будущее». – Киев: «Сталь». – 2004. – с. 376–385.
19. Новиков В.Е. Физически нелинейная модель прямолинейных стержневых стальных элементов произвольного сечения // Материалы XI Международного научно-методического межвузовского семинара «Перспективы развития новых технологий в строительстве и подготовке инженерных кадров Республики Беларусь». Часть 1. – Брест, 2004. – с. 68–73.
20. Потапкин А.А. Проектирование стальных мостов с учетом пластических деформаций. – М.: Транспорт, 1984. – 200 с.
21. Чернов Н.Л., Шебанин В.С., Купченко Ю.В., Ебрахим Валид, Артюшкин И.А. Прочность сечений стальных тонкостенных стержней при ограниченных пластических деформациях // Изв. вузов. Строительство и архитектура. – 1990. – №4. – с. 1–5.

Мартинів Юрій Семенович є професором кафедри “Металеві та дерев’яні конструкції”. Наукові інтереси: розрахунки металевих конструкцій з урахуванням фізичної нелінійності.

Новіков Віталій Євгенович є старшим викладачем кафедри “Металеві та дерев’яні конструкції”. Наукові інтереси: розрахунки металевих конструкцій з урахуванням фізичної нелінійності.

Мартынов Юрий Семенович является профессором кафедры “Металлические конструкции”. Научные интересы: расчеты металлических конструкций с учетом физической нелинейности.

Новиков Виталий Евгеньевич является старшим преподавателем кафедры “Металлические конструкции”. Научные интересы: расчеты металлических конструкций с учетом физической нелинейности.

Martynov Yuriy Semenovych is a Professor of Department “Steel and Wood Constructions”. His research interests include the calculations of metal structures taking into account non-linear effects.

Novikov Vitaliy Yevgenovych is a Senior Lecturer of Department “Steel and Wood Constructions”. His research interests include the calculations of metal structures taking into account non-linear effects.

