ISSN 1814-5566 print
ISSN 1993-3517 online
МЕТАЛЕВІ КОНСТРУКЦІЇ
МЕТАЛЛИЧЕСКИЕ КОНСТРУКЦИИ
METAL CONSTRUCTIONS
N1, ТОМ 14 (2008) 31-41
УДК 624.97:620.91

(07)-0152-1

ВПЛИВ МАСШТАБНИХ КОЕФІЦІЄНТІВ $К_V$, $К_в$, $К_ф$ ТА $К_н$ НА ІМІТАЦІЮ ОЖЕЛЕДІ В КЛІМАТИЧНІЙ КАМЕРІ ДОННАБА

А.М. Альохін
Донбаська національна академія будівництва і архітектури,
вул. Державіна 2, 86123, м. Макіївка, Україна.
E-mail: andrey-alyochin@rambler.ru, Alyokhin_20@mail.ru

Отримана 21 січня 2008; прийнята 25 січня 2008

Анотація. В статті представлені системи основних співвідношень, що містять вісім коефіцієнтів масштабування для імітації ожеледі в кліматичній камері ДонНАБА. Представлені коефіцієнти характеризують умови подібності і залежності між параметрами натурного і модельного процесів осадження хмарних крапель з повітряного потоку на подібних і природних тілах і утворення на них обмерзання. Проаналізовано перші два рівняння системи (1) і (2). Коефіцієнт $К_V$ указує зв'язок між потоками повітря в кліматичній камері ДонНАБА і на натурному об'єкті, а коефіцієнт $К_в$ несе інформацію про розмір випробовуваного об'єкту і натурного. Їх відношення визначає коефіцієнт відношення тимчасових відрізків процесу намерзання льоду. Отримана залежність між коефіцієнтами $К_V$, $К_в$, $К_ф$ и $К_н$. При проведенні експерименту в кліматичній камері необхідно отримати такі значення $К_в$ і $К_V$, щоб вони були меншими, тобто $К_в<1$ і $К_V<1$.

Ключові слова: масштабні коефіцієнти, система рівнянь, кліматична камера ДонНАБА, експеримент, натура, модель, ожеледь, потік повітря, система координат, гіпербола, пряма, крива, ряд Тейлора.

ВЛИЯНИЕ МАСШТАБНЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ $К_V$, $К_в$, $К_ф$ И $К_н$ НА ИМИТАЦИЮ ГОЛОЛЕДА В КЛИМАТИЧЕСКОЙ КАМЕРЕ ДОННАСА

А.М. Алёхин
Донбасская национальная академия строительства и архитектуры,
ул. Державина 2, 86123, г. Макеевка, Украина.
E-mail: andrey-alyochin@rambler.ru, Alyokhin_20@mail.ru

Получена 21 января 2008; принята 25 января 2008

Аннотация. В статье представлены системы основных соотношений, содержащих восемь коэффициентов масштабирования для имитации гололеда в климатической камере ДонНАСА. Представленные коэффициенты характеризуют условия подобия и зависимости между параметрами натурного и модельного процессов осаждения облачных капель из воздушного потока на подобных и естественных телах и образования на них обледенения. Проанализированы первые два уравнения системы (1) и (2). Коэффициент $К_V$ указывает связь между потоками воздуха в климатической камере ДонНАСА и на натурном объекте, а коэффициент $К_в$ несет информацию о размере испытуемого объекта и натурного. Их отношение определяет коэффициент отношения временных отрезков процесса намерзания льда. Получены зависимости между коэффициентами $К_V$, $К_в$, $К_ф$ и $К_н$. При проведении эксперимента в климатической камере необходимо получить такие значения $К_в$ и $К_V$, чтобы они были меньше, т.е. $К_в<1$ и $К_V<1$.

Ключевые слова: масштабные коэффициенты, система уравнений, климатическая камера ДонНАСА, эксперимент, натура, модель, гололед, поток воздуха, система координат, гипербола, прямая, кривая, ряд Тейлора.

INFLUENCE OF SCALE FACTORS K_V, $K_в$, $K_ф$ AND $K_н$ ON THE IMITATION OF RIME IN THE DONNACEA CLIMATIC CHAMBER

A.M. Alyokhin

Donbas National Academy of Civil Engineering and Architecture,
Derzavin str. 2, 86123, Makeyevka, Ukraine.
E-mail: andrey-alyochin@rambler.ru, Alyokhin_20@mail.ru

Received 21 January 2008; accepted 25 January 2008

Abstract. The article is about the systems of basic correlations containing eight scaling factots to imitate rime in the DonNACEA climatic chamber. The factors presented characterize the conditions of similarity and dependence between the parameters of the field and model processes of cloud drops precipitating from the air stream on similar and natural bodies, and icing on them. The first two equations (1) and (2) of the system are analysed. The K_V factor indicates a connection between air streams in the DonNACEA climatic chamber and on a field object model object, and the Kv factor carries the information about the size of the object under testing and a field one. Their relation determines the coefficient of the relations of temporal segments of icing. There are obtained dependences between the K_V, K_V, $K_в$, $K_τ$ and K_H factors . When carrying out the experiment in the climatic chamber it is necessary to get such less values of Kv and K_V, so they are to be Kv<1 and K_V<1.

Keywords: scale factors, system of equations, the DonNACEA climatic chamber, experiment, nature, model, rime, air stream, the system of co-ordinates, hyperbola, straight line, curve, Taylor series.

1. Системы основных соотношений

Согласно вывода системы четырех нелинейных алгебраических уравнений [3]:

$$K_\nu \cdot K_\tau = K_b \qquad (1.)$$

$$K_b^{0,2} \cdot K_\nu^{0,8} = K_V^{0,8} \qquad (2)$$

$$K_d^2 \cdot K_V = K_b \cdot K_\mu \qquad (3)$$

$$K_d^3 \cdot K_n \cdot K_{\rho b} = 1 \qquad (4)$$

где:

K_V – масштабный коэффициент, зависящий от скорости ветра;

K_τ – масштабный коэффициент, зависящий от времени испытания в условиях обледенения;

K_b – масштабный коэффициент, зависящий от размера испытуемой конструкции;

$K_н$ – масштабный коэффициент, зависящий от кинематической вязкости воздуха;

K_d – масштабный коэффициент, зависящий от диаметра капель;

K_μ – масштабный коэффициент, зависящий от динамической вязкости воздуха;

K_n – масштабный коэффициент, зависящий от капель;

K_{pb} – масштабный коэффициент, зависящий от плотности исследуемой конструкции.

Представленные коэффициенты характеризуют условия подобия [6,12,13] и зависимости между параметрами натурного и модельного процессов осаждения облачных капель из воздушного потока на подобных и естественных телах и образования на них обледенения.

Число переменных в системе (1) – (4) превышает число её уравнений, поэтому система имеет бесчисленное множество решений [1, 2, 5, 7, 9, 10, 14]. Для записи хотя бы одного явного функционального представления системы (1) – (4) выделим в ней четыре независимых переменные K_b, K_V, K_d, K_{pb} и четыре зависимые величины K_τ, $K_н$, K_μ, K_n.

Поскольку различных вариантов явного выражения системы будет двенадцать, то предпочтение отдадим следующему:

$$K_\tau = K_b \cdot K_V^{-1} \quad (5)$$

$$K_\nu = K_V \cdot K_b^{-0,25} \quad (6)$$

$$K_\mu = K_d^2 \cdot K_V \cdot K_b^{-1} \quad (7)$$

$$K_n = K_d^{-3} \cdot K_{\rho b}^{-1} \quad (8)$$

что не исключает возможности использования иных форм записи уравнений.

В частности, равенство (7) имеет вид:

$$K_\mu = K_d^2 \cdot K_\tau^{-1} \quad (9)$$

2. Общее и фундаментальное решение задачи

Структура системы уравнений (5) – (8) такова, что ее можно изменить и перейти от операции высшего уровня к операциям нижнего уровня, прологарифмировав каждое уравнение:

$$\ln K_\tau = \ln K_b - \ln K_V$$

$$\ln K_\nu = -0,25 \ln K_b + \ln K_V$$

$$\ln K_\mu = -\ln K_b + \ln K_V + 2\ln K_d$$

$$\ln K_n = -3\ln K_d + \ln K_{\rho b} \quad (10)$$

Считая все логарифмические выражения переменными, система линейных алгебраических уравнений обладает фундаментальным решением [1, 2, 5, 7, 9, 10, 14] рассматриваемой задачи. Ему принадлежит тривиальное нулевое решение, которому соответствует единичное решение системы (1) – (4)

$$K_b=1,\ K_V=1,\ K_d=1,\ K_{pb}=1,$$

$$K_\tau=1,\ K_\upsilon=1,\ K_\mu=1,\ K_n=1 \quad (11)$$

и может теперь называться нетривиальным. Оно несет в себе очень простой очевидный смысл и состоит в том, что натурные и испытания на модели ничем не отличаются.

Каждое другое частное решение системы (10), отличное от тривиального, можно получить при конкретных значениях независимых величин K_b, K_V, K_d и K_{pb}. Пусть они являются координатами некоторой точки М четырехмерного пространства, и поскольку принимают только положительные значения, то эта точка находится в первом квадранте этого пространства. В нем существует четыре независимые направления, и для каждого из них можно записать частное решение.

Система линейных алгебраических уравнений (10) определена в ортогональной системе координат [1, 2, 5, 7, 9, 10, 14]. Независимые переменные lnK_b, lnK_V, lnK_d, lnK_{pb} представлены в нем ортогональной подсистемой, и каждой оси координат принадлежит единичный вектор с точкой приложения в начале координат, а концы векторов имеют координаты:

$$\{1;0;0;0\}$$

$$\{0;1;0;0\}$$

$$\{0;0;1;0\}$$

$$\{0;0;0;1\} \quad (12)$$

Этим точкам соответствуют в другой подсистеме координат величины K_b, K_V, K_d, K_{pb} точки:

$$\{e;1;1;1\}$$

$$\{1;e;1;1\}$$

$$\{1;1;e;1\}$$

$$\{1;1;1;e\} \quad (13)$$

Прямые, проходящие через одну из этих точек и начало координат, образуют четыре независимые направления. Каждому набору значений величин K_b, K_V, K_d, K_{pb} в (13) соответствует независимое решение системы (5) – (8):

$$\{e;e^{-0,25};e^{-1};1\}$$

$$\{e^{-1};e;e;1\}$$

$$\{1;1;e^2;e^{-3}\}$$

$$\{1;1;1;e^{-1}\} \quad (14)$$

Обнуляя множества (13) и (14), записываем фундаментальное решение системы (5) – (8): где C_1, C_2, C_3, C_4 – произвольные значения.

$$\{(K_b;K_V;K_d;K_{\rho b}),(K_\tau;K_\nu;K_\mu;K_n)\}=$$
$$=C_1\{(e;1;1;1),(e;e^{-0,25};e^{-1};1)\}+$$
$$+C_2\{(1;e;1;1),(e^{-1};e;e;1)\}+$$
$$+C_3\{(1;1;e;1),(1;1;e^2;e^{-3})\}+$$
$$+C_4\{(1;1;1;e),(1;1;1;e^{-1})\}$$

где C_1, C_2, C_3, C_4 – произвольные значения.

Такое функциональное представление решения практически ничем не отличается от первоначального (5) – (8), так как не позволяет выявить те значения коэффициентов масштабирования, которые определяют условия проведения эксперимента и не дают возможность установить влияние каждой независимой переменной на зависимую величину.

Данное уравнение разбивает прямые на два семейства прямых, которым соответствуют значения $К_τ<1$ и $К_τ>1$. В первом случае время намерзания льда в климатической камере меньше натурного, а в другом, наоборот, больше.

Учитывая тот факт, что в климатической камере значения масштабных коэффициентов $К_в<1$ и $К_V<1$, последующее увеличение времени намерзания ($К_τ>1$) приводит к снижению наибольшего значения коэффициента $К_V$, который принадлежит интервалу $(0; К_τ^{-1}]$ и $К_в Є(0;1]$; а уменьшение времени намерзания $К_τ<1$ приводит к обратной закономерности $К_V Є(0;1]$ и $К_в Є (0; К_τ^{-1}]$.

3. Анализ первого уравнения системы $K_\tau=\dfrac{K_B}{K_V}$ при отсутствии зависимости между $K_в$ и K_V

Масштабные коэффициенты K_V и $K_в$ являются независимыми величинами. Первый коэффициент указывает на связь между потоками воздуха в климатической камере ДонНАСА [4] и на натурном объекте, а второй несет информацию о размере испытуемого объекта и натурного [11]. Их отношение определяет коэффициент отношения временных отрезков процесса намерзания льда. Если первые два масштабных коэффициента удовлетворяют условию:

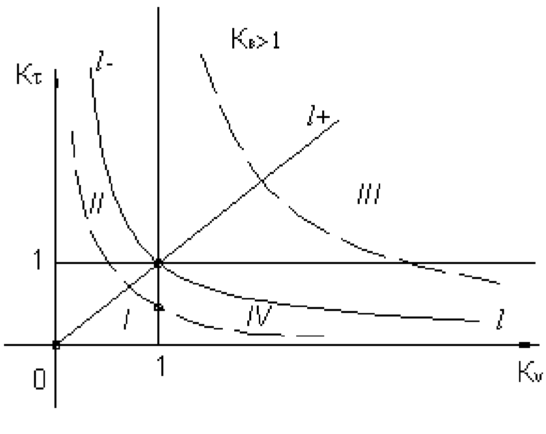
$$0<K_в\le 1,\ 0<K_V\le 1, \qquad (15)$$

то коэффициент $K_τ$ не отрицателен и принимает значение в окрестности значения $[1-\delta;1+\delta]$. Указанная зависимость в пространстве описывает некоторую поверхность, но анализ ее формы не позволит найти то множество точек, которые удовлетворят всей схеме (1).

Для наглядного изображения изучаемых зависимостей выберем две плоскости этого пространства: $Oк_V к_τ$ и $Oк_в к_τ$.

Уравнению $K_\tau=Kв/K_V$ удовлетворяет тривиальное решение ($K_в$, K_V, $K_τ$)=(1;1;1). Оно указывает на неизменяемость натурного и экспериментального процессов.

а)



б)

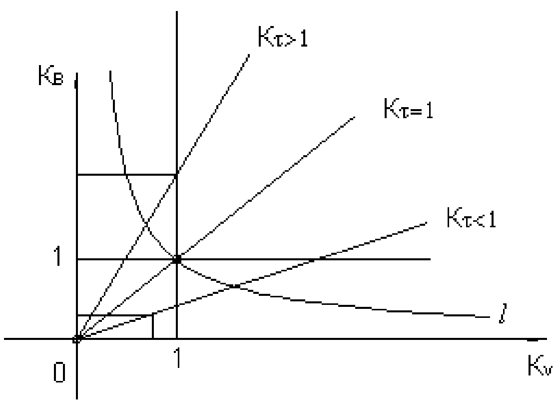


Рис. 1. Зависимость: а – $К_τ$ от $К_V$; б – $К_V$ от $К_в$.

Таблица 1.

	I	II	III	IV
K_V	$K_V<1$	$K_V<1$	$K_V>1$	$K_V>1$
$K_ф$	$K_ф<1$	$K_ф>1$	$K_ф>1$	$K_ф<1$

Зафиксируем значение $K_в$ в упрощенном интервале изменений и построим график исследуемых зависимостей (рис. 1а).

При $K_в=1$ имеем уравнение гиперболы $K\tau=1/K_V$, и ее график проходит через точку (1;1). В случае $K_в<1$ на координатной плоскости $П_1$ величин K_V и K_τ проведем прямые $K_V=1$, $K_\tau=1$ (рис. 1б). Они разделяют первую четверть плоскости на четыре области и в каждой из них коэффициенты K_V и K_τ принимают совместно конкретные значения, указанные в таблице 1.

Интересующие нас области I и II.

При $K_в = 1$ имеем уравнение гиперболы $K_\tau=1/K_в$. И ее график проходит через точку (1;1) и разделяет первую четверть на две подобласти. Если $K_в<1$, то кривая зависимости $K_\tau=K_в/K_V$ проходит ниже первой кривой, а поэтому для $K_в>1$ ветвь гиперболы проходит выше первой кривой. Кривая ℓ^- в области II отсекает множество точек, которые не удовлетворяют условию $K_в<1$. Семейство гипербол между собой не имеют общих точек [1, 2, 5, 7, 9, 10, 14]. Перемещение точки по выбранной кривой связано с изменением величины K_V. Если такая величина фиксирована, то ее изменение указываем приращением K_V, и тогда $K_V + \Delta K_V$ является новой точкой на кривой. Переход с о дной кривой на другую связан с изменением величины $K_в$. Введя приращения $\Delta K_в$, новую ветвь гиперболы будет характеризовать величина $K_в+\Delta K_в$. В связи с этим возникает следующая проблема: указать способы нахождения решений $\Delta K_в$ и ΔK_V, дающих возможность перейти на другую кривую и определить новую точку на ней.

Чтобы перейти с одной прямой на другую или с одной кривой на рядом расположенную, необходимо иметь некоторые приращения. Для того, чтобы оказаться в области квадрата приращения, ΔK_V и $\Delta Kв$ для величин K_V и $Kв$ должны быть отрицательными. Их связь с приращением $\Delta K\tau$ можно заменить, используя формулы Тейлора [8] разложения функции двух переменных в окрестности заданной точки. Такой характерной точкой области квадрата является ее вершина с координатами (1;1). Эти значения удовлетворят получаемому уравнению при $K\tau=1$. Практикой определен набор чисел, которые входят в правильные решения всей системы. Наиболее интересным с точки зрения проведения эксперимента в климатической камере ДонНАСА будут условия $K_V < Kв$ и $K\tau < 1$.

Для функции φ=φ(x,y) двух переменных полное приращение в точке $x=x_0$, $y=y_0$ определяем по формуле Тейлора [8]:

$$\Delta\varphi = \left.\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\ y=x_0}} \Delta X + \left.\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\ x=y}} \Delta y + \\ + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\Delta x^2 + 2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}\Delta x\Delta y\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right) \quad (16)$$

Характерной точкой рассматриваемой задачи является точка: $K_V=1$, $K_в=1$.

Для функции (15) находим частные производные первого порядка:

$$\frac{\partial K\tau}{\partial Kв}=\frac{1}{K_V},\ \frac{\partial K\tau}{\partial K_V}=-\frac{Kв}{K_V{}^2}$$

и второго порядка:

$$\frac{\partial^2 K\tau}{\partial Kв^2}=0;\ \frac{\partial^2 K\tau}{\partial K_V\partial Kв}=-\frac{1}{K_V{}^2};\ \frac{\partial^2 K\tau}{\partial K_V{}^2}=2\cdot\frac{Kв}{K_V{}^3}.$$

В выбранной точке все выражения $\frac{1}{K_V}$, $\frac{Kв}{K_V}$, $\frac{1}{K_V{}^2}\cdot\frac{K_\tau}{K_V^2}$ равны 1, поэтому приращение функции $K\tau(Kв, K_V)$ имеет вид:

$$\Delta K\tau = \Delta Kв - \Delta K_V + \\ + \frac{1}{2}\left(0 - 2\Delta Kв\Delta K_V + 2\Delta K_V{}^2\right) = \\ = \Delta K\tau = \left(\Delta Kв - \Delta K_V\right)\left(1 - \Delta K_V\right) \quad (17)$$

Влияние приращений $\Delta Kв$ и ΔK_V на $\Delta K\tau$. Зафиксируем $\Delta K\tau$ в определенных границах, тогда зависимость (17) в плоскости переменных $\Delta K в, \Delta K_V$ описывает кривую второго порядка. Выясним ее форму с помощью инвариантов:

$$A = \begin{vmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\Delta K\tau \end{vmatrix} = 0 + \frac{1}{8}2 - \frac{1}{4} - 0 +$$

$$+\frac{1}{4}\Delta K\tau = \frac{1}{4}\Delta K\tau$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix} = 0 - \frac{1}{4} = -\frac{1}{4} < 0.\ S = 0 \div 1 = 1$$

Знак величины инварианта A зависит от значения приращения $\Delta K\tau$, которое равно нулю при условиях $\Delta K в = \Delta K_V$ и $\Delta K_V = 1$. Так как $A_{33}<0$, то имеем гиперболу. Для определения полуоси *a, b* достаточно решить квадратное уравнение:

$$\lambda^2 - \delta\lambda + A_{33} = 0 \text{ или } \lambda^2 - \lambda + \frac{1}{4} = 0;$$

$$4\lambda^2 - 4\lambda + 1 - 2 = 0.\ (2\lambda - 1)^2 - 2 = 0$$

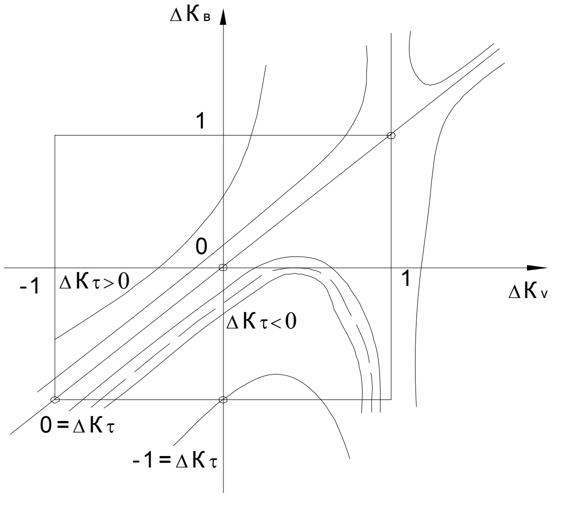


Рис. 2. Зависимость ΔK_V от $\Delta K_в$ и ΔK_τ.

$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}\left(1 \pm \sqrt{2}\right)$, и, учитывая неравенства

$-\frac{A}{\lambda A_{331}} > 0$; $\frac{A}{\lambda_2 A_{33}} > 0$, получаем полуоси при $\Delta K\tau > 0$:

$$a^2 = -\frac{A}{\lambda_1 A_{33}} = \frac{-\frac{1}{4}\Delta K\tau}{\frac{1}{2}\left(1 \pm \sqrt{2}\right)\left(-\frac{1}{4}\right)} =$$

$$= \frac{2\Delta K\tau}{1 + \sqrt{2}} = 2\left(\sqrt{2} - 1\right)\Delta K\tau$$

$$в^2 = \frac{A}{\lambda_2 A_{33}} = \frac{\frac{1}{4}\Delta K\tau}{\frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{2}\right)\left(-\frac{1}{4}\right)} =$$

$$= \frac{2\Delta K\tau}{\sqrt{2} - 1} = 2\left(\sqrt{2} + 1\right)\Delta K\tau$$

При $\Delta K\tau < 0$ имеем:

$$a^2 = -\frac{-\frac{1}{4}\left(-\Delta K\tau\right)}{\frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{2}\right)\left(-\frac{1}{4}\right)} = \frac{2\left(-\Delta K\tau\right)}{\sqrt{2} - 1} =$$

$$= 2\left(\sqrt{2} + 1\right)\left(-\Delta K\tau\right)$$

$$в^2 = \frac{-\frac{1}{4}\left(-\Delta K\tau\right)}{\frac{1}{2}\left(\sqrt{2} + 1\right)\left(-\frac{1}{4}\right)} = \frac{2\left(-\Delta K\tau\right)}{\sqrt{2} + 1} =$$

$$= 2\left(\sqrt{2} - 1\right)\left(-\Delta \kappa\tau\right)$$

Найдем центр кривой второго порядка. Вычисляем частные производные:

$$\frac{\partial\varphi(x, y)}{\partial\Delta K в} = -\Delta K_V + 1 = 0;$$

$$\frac{\partial\varphi(x, y)}{\partial\Delta K_V} = 2\Delta K_V - \Delta K в - 1 = 0.$$

Центр имеет координаты: $\Delta K_V = 1$, $\Delta K в = 1$.

Дополнительные свойства гиперболы определяем из явного уравнения:

$$\Delta K в = \frac{(2\Delta K_V - 1)^2 - (1 + 4\Delta K\tau)}{4(\Delta K_V - 1)} \quad (18)$$

Отсюда находим вертикальную $\Delta K_V = 1$ и наклонную $\Delta K в = \Delta K_V$ асимптоты, которые проходят через центр кривой – точку (1;1). Ветви гиперболы имеют точки пересечения с осью $O_{\Delta Kv}$, при $\Delta K\tau > 0$:

$$\Delta K_V^{\ +} = 0{,}5\left(1 + \sqrt{1 + 4\Delta K\tau}\right) > 1 \text{ и}$$

$$\Delta K\tau^{-} = 0{,}5\left(1 - \sqrt{1 - 4\Delta K\tau}\right) < 0,$$

При $-\frac{1}{4} \le \Delta K\tau \le 0$:

$$0 < \begin{matrix} \Delta K_V^{\ -} = 0{,}5\left(1 - \sqrt{1 + 4\Delta K\tau}\right) \le \\ \le \Delta K_V^{\ +} = 0{,}5\left(1 + \sqrt{1 - 4\Delta K\tau}\right) \end{matrix} < 1 \ .$$

Данное равенство имеет место при $\Delta K\tau = -0{,}25$.

При стремлении, $\Delta K\tau \to 0$ как справа, так и слева полуоси обоих семейств гипербол уменьшаются, а ветви гипербол сближаются с асимптотами (рис. 2). При $\Delta K\tau \to 0$ гиперболы сближаются с прямыми, являющимися асимптотами [3, 4, 5, 6].

Ветвь гиперболы проходит через точки (0;-1), тогда приращение: $\Delta K\tau = (1-0)(-1-0) = -1$, а значит $K\tau = 0$, $K в = 0$, $K_V = 0$, так как $\Delta K в = -1 = \Delta K_V$.

Для каждого $\Delta K\tau < 0$ получаем: $\Delta K в < 0$, $\Delta K_V < 0$, так как $\Delta K в < \Delta K_V$, то $K в < K_V$.

Можно указать аналитическое выражение левой части ветви гиперболы, которая пересекает треугольную область.

Оценим условия:

$\Delta K\tau = \Delta K в$ и $\Delta K\tau = \Delta K_V$.

Проверим выполнение равенства

$\Delta K\tau = \Delta K в$:

$$\Delta K в = \Delta K в - \Delta K_V - \Delta K в \Delta K_V + \Delta K_V^{\ 2} = 0;$$

$$\Delta K_V\left(\Delta K_V - \Delta K в - 1\right) = 0;$$

1) $\Delta K_V = 0$ (точки пересечения с осью);
2) $\Delta K в = \Delta K_V - 1$ (прямая не проходит через области).

Проверим выполнение равенства:

$$\Delta K\tau = \Delta K_V$$

$$\Delta K_V = \Delta K в - \Delta K_V - \Delta K в \Delta K_V + \Delta K_V^{\ 2};$$

$$\Delta K в(\Delta K_V - 1) = \Delta K_V^{\ 2} - 2 \cdot \Delta K_V;$$

$$\Delta K в = \frac{\Delta K_V(\Delta K_V - 2)}{\Delta K_V - 1};$$

$\Delta K_V = 1$ асимптота $\Delta K в = \Delta K_V - 1$.

$\Delta K в = -1$

$\Delta K_V^{\ 2} - 2\Delta K\tau + \Delta K_V - 1 = 0$

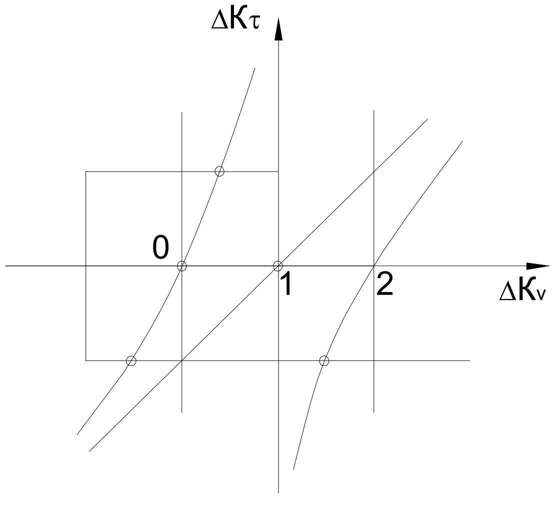


Рис. 3. Зависимость ΔK_V от ΔK_τ.

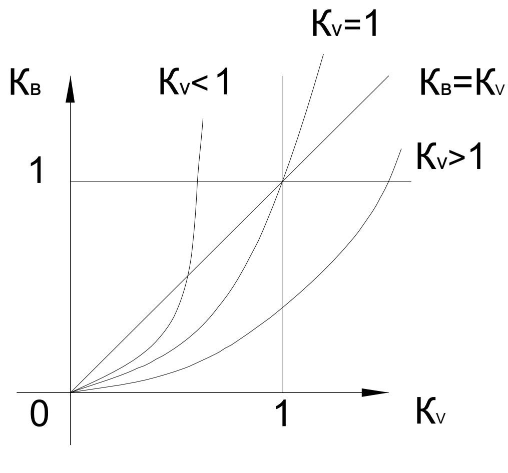


Рис. 4. Зависимость K_V от $K_в$.

$$\Delta K_V{}^2 - \Delta K\tau - 1 = 0$$

$$\Delta Kv = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2};\ \Delta K_V{}^- = \frac{1-\sqrt{5}}{2};$$

$$\Delta K_V{}^+ = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

$$\Delta K\text{в} = 1$$

$$\Delta K_V{}^2 - 3\Delta K_V + 1 = 0$$

$$\Delta K_V = \frac{3 \pm \sqrt{9-4}}{2} - 3 \pm \sqrt{5}\,.$$

4. Анализ второй зависимости

$$K_{в}^{0,2} \cdot K_{\nu}^{0,8} = K_{\mathrm{V}}^{0,8}$$

Возведем обе части этого равенства в пятую степень:

$$K_{в} = K_{\nu}^{-4} \cdot K_{\mathrm{V}}^{4} \qquad (19)$$

Для величин $К_в$ и $К_V$ эта зависимость является нелинейной с коэффициентом $К_\nu^{-4}$, который получен в виде отношения коэффициентов кинематической вязкости воздуха в критерии Прандтля: $P_r = \gamma / a$ [6, 12, 13].

При проведении эксперимента в климатической камере [4], необходимо получить такие

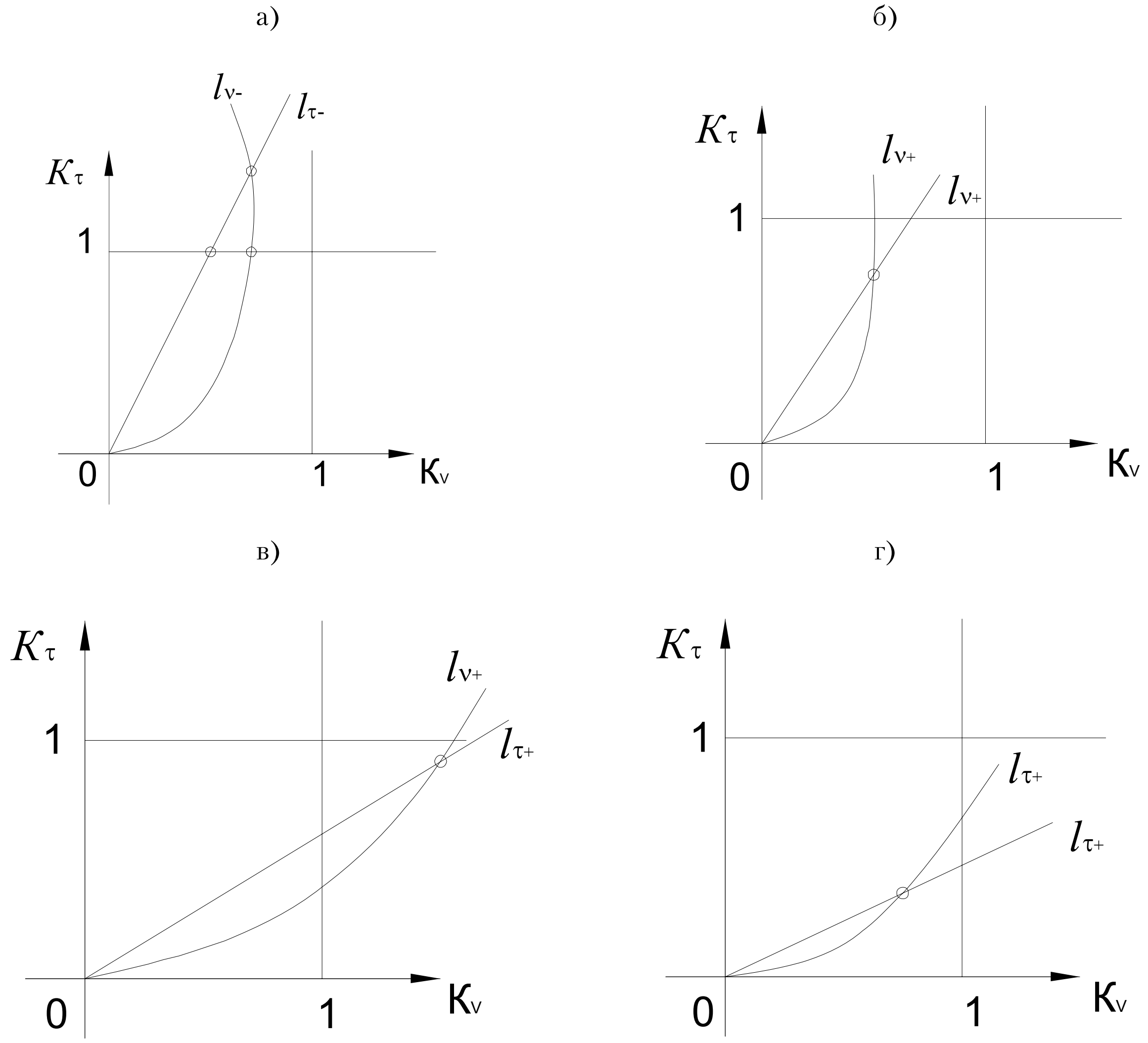


Рис. 5. Расположение кривых ℓ_ν и ℓ_τ в зависимости от коэффициентов $К_в$ и $К_V$.

значения $К_в$ и $К_V$, чтобы они были меньше, т.е. $К_в<1$ и $К_V<1$. Осями системы координат и прямыми $К_V=1$, $К_в=1$ выделяем единичный квадрат (рис. 4.). Диагональ $К_в=К_V$ разделяет этот квадрат на два треугольника.

Условия (20) выполняются для точек нижнего треугольника.

$$К_в<К_V<1 \qquad (20)$$

При разных фиксированных значениях масштабного коэффициента $К_ν$ строим графики зависимости (19). Если коэффициент $К_ν=1$, т.е. вязкость жидкости в климатической камере и натурном процессе одинакова, то график уравнений $К_в=К_V^4$ располагаем в нижнем треугольнике (рис. 4), который проходит через точки (0;0),(1;1) и разделяет кривые четвертого порядка (19) на два семейства коэффициентами $К_ν<1$ и $К_ν>1$.

Каждая кривая, построенная с $К_ν<1$, пересекает прямую $К_в=К_V$ в точке $K_V=\sqrt[3]{K_\nu^4}$, которая является верхней границей изменения величины $К_V$. При этом меняя значения на отрезке $\left[0;\sqrt[3]{K_\nu^4}\right]$ с выбранным шагом $ΔК_V$, можно найти, согласно (19), значения $К_в$ на отрезке $\left[0;\sqrt[3]{K_\nu^4}\right]$. Для коэффициента $К_ν>1$ вычисляем следующие значения $К_V Є[0;1]$ и $К_в Є\left[0;\sqrt[4]{K_\nu}\right]$.

Неравенства (21) справедливы для точек ($К_V$;$К_в$) верхнего треугольника единичного квадрата (рис. 4).

$$К_V<К_в<1 \qquad (21)$$

Его пересекают только кривые (19) с коэффициентом $К_ν<1$. Исследуемые величины изменяем так: $К_в Є\left[\sqrt[3]{K_\nu^4};1\right]$, $К_V=\left[\sqrt[3]{K_\nu^4};K_\nu\right]$.

Рис. 1б и рис. 4 выполнены в одной системе координат $O_{KVKв}$. Совместим эти рисунки и выполним анализ расположения кривых (рис. 5), определяемых соотношениями (1) и (19). Прямую $К_в=1$ при $\ell_{\nu\text{-}1}$ и $\ell_{\tau\text{-}1}$ пересекают в точках $К_{Vν}=К_V$ и $К_{Vτ}=К_τ^{-1}$, совпадающее при условии $К_τ·К_ν=1$.

Наличие у кривых $\ell_{\nu\text{-}}$ и $\ell_{\tau\text{-}}$ общей точки означает, что система равенств (1) и (19) обладает решением. Если на прямой $К_в=1$ или $К_V=1$ справедливо равенство $К_τ^{-1}<К_ν$, то решение системы уравнений (1) и (19) не принадлежит единичному квадрату. Однако при выполнении условия (22) решение системы уравнений будет принадлежать единичному квадрату.

$$К_t^{-1}>К_V \text{ (или } К_t К_V=1) \qquad (22)$$

Изучим в окрестности точки $(К_V; К_в)=(1;1)$ зависимость между приращениями $ΔК_в$, $ΔК_V$ и $ΔК_ν$ для переменных (рис. 6), составляющих формулу (19). Для этой цели используем ряд Тейлора [3, 4, 5, 6], записав его для функции $К_ν(К_в,К_V)$ двух переменных $К_в$,$К_V$:

$$K_\nu = K_в^{-\frac{1}{4}}\cdot K_V \qquad (23)$$

Вычисляем частные производные первого порядка [1, 2, 5, 7, 9, 10, 14]:

$$\frac{\partial K_\nu}{\partial K_в}=-\frac{1}{4}K_в^{-\frac{5}{4}}\cdot K_V; \qquad \frac{\partial K_\nu}{\partial K_V}=K_в^{-\frac{1}{4}}$$

и второго порядка:

$$\frac{\partial^2 K_\nu}{\partial K_в}=\frac{5}{16}K_в^{-\frac{9}{4}}\cdot K_V;$$

$$\frac{\partial^2 K_\nu}{\partial K_в \partial K_V}=-\frac{1}{4}K_в^{-\frac{5}{4}};$$

$$\frac{\partial^2 K_\nu}{\partial K_V^2}=0$$

В точке (1;1) выражения $K_V\cdot K_в^{-\frac{5}{4}}, K_в^{-\frac{1}{4}}$, $K_в^{-\frac{9}{4}}, K_в^{-\frac{5}{4}}$ равны 1, поэтому приращение примет следующий вид:

$$\Delta K_\nu=-\frac{1}{4}\Delta K_в+\Delta K_V+\frac{1}{2}\left(\frac{5}{16}(\Delta K_в)^2-\frac{1}{2}\Delta K_в \Delta K_V\right).$$

Относительно приращений $ΔК_в$, $ΔК_V$ при известном приращении $ΔК_n$ получаем уравнение второго порядка $f(ΔК_V;ΔК_в)$:

$$5(\Delta K_в)^2-8\Delta K_в\cdot\Delta K_\nu-8\Delta K_в+$$
$$+32\Delta K_V-32\Delta K_\nu=0 \qquad (24)$$

Форму этой кривой установим с помощью вычисления ее инварианта A, A_{33}, S. Найдем инвариант:

$$A=\begin{vmatrix}5 & -4 & -4\\ -4 & 0 & 16\\ -4 & 16 & -32\Delta K_\nu\end{vmatrix}=16^2(2\Delta K_\nu-3)<0,$$

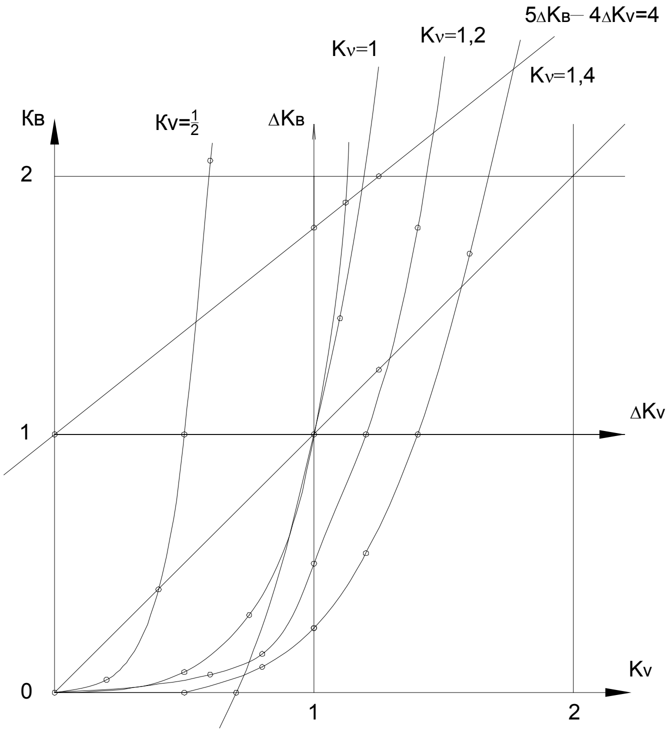


Рис. 6. Зависимость между приращениями ΔK_V, $\Delta K_в$ и ΔK_v.

так как считаем $\Delta K_v \in (-1;1)$;

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 5 & -4 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} = -16 < 0; \qquad S = 5 + 0 = 5 > 0$$

При $A \neq 0$ и $A_{33} < 0$ имеем гиперболу.

Из равенств нулю частных производных первого порядка функции $f\,(\Delta K_v;\Delta K_в)$:

$$\frac{\partial f}{\partial K_в} = 2(5\Delta K_в - 4\Delta K_v - 4);$$

$$\frac{\partial f}{\partial K_v} = -8(\Delta K_в - 4)$$

Получаем уравнения $5\Delta K_в - 4\Delta K_v = 4$ и $\Delta K_в = 4$ прямых.

На первой из них располагаются вершины гиперболы

$$\Delta K_v = 4 \pm \sqrt{5(3 - 2\Delta K_v)},$$

$$\Delta K_в = 4 \pm 0{,}8\sqrt{5(3 - 2\Delta K_v)},$$

и в этом можно убедиться, записав (4.2) в виде

$$16(\Delta K_v - 4)^2 - (5\Delta K_в - 4\Delta K_v - 4)^2 = \\ = 80(3 - 2\Delta K_v).$$

Отсюда также следует, что прямая $\Delta K_v = 4$ будет мнимой осью гиперболы.

Вторая прямая является горизонтальной асимптотой гиперболы и это следует из явного уравнения

$$\Delta K_v = \frac{5(\Delta K_в)^2 - 8\Delta K_в - 32\Delta K_v}{8(\Delta K_в - 4)}.$$

Представленная зависимость позволяет найти наклонную асимптоту $5\Delta K_в - 8\Delta K_V + 12 = 0$, вычислив два предела:

$$\lim_{\Delta K_B \to \infty} \frac{\Delta K_v}{\Delta K_в} = \frac{5}{8} \quad \text{и} \quad \lim_{\Delta K_B \to \infty} \left(\Delta K_v - \frac{5}{8}\Delta K_в \right) = \frac{3}{2}.$$

Ветвь гиперболы, которая проходит через квадрат с центром в начале координат и стороны длины 2, описывается уравнением:

$$\Delta K_в = 0{,}8\left[(\Delta K_в + 1) \pm \sqrt{(\Delta K_в - 4)^2 - 5(3 - 2\Delta K_v)}\right],$$

что удобно использовать для численного построения кривой. При этом координата вершины $\Delta K_v = 4 - \sqrt{5(3 - 2\Delta K_v)}$ будет верхней границей переменной ΔK_v, а нижним значением: ΔK_v=-1 (рис. 4, рис. 5). Значения фиксированной величины ΔK_v принадлежат отрезку [-1;53/32]. Если ΔK_v=-1, то соответствующая гипербола касается вершиной стороны квадрата ΔK_v=-1. В случае ΔK_v=53/32, гипербола имеет с квадратом единственную общую точку в его вершине (1;-1).

Отметим случай сохранения вязкости ΔK_v=0, тогда гипербола проходит через начало координат и пересекает стороны квадрата $\Delta K_в$=1; $\Delta K_в$=-1 в точках $\Delta K_v = -1/8$ и $\Delta K_v = -13/40$. Без изменения вязкости воздушных масс возможно уменьшение масштабных коэффициентов $K_в$ и K_v.

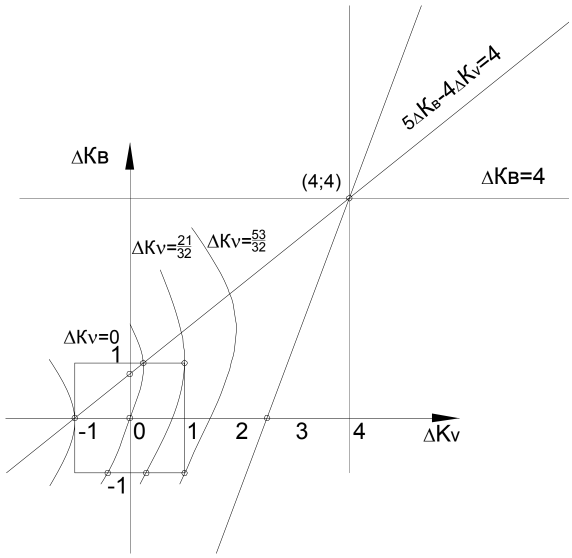


Рис. 7. Определение приращений ΔK_V, $\Delta K_в$ и ΔK_v.

Литература

1. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов: Пер. с нем. /Под ред. Г. Гроше, В. Циглера. – Изд. перераб.–М.: Наука; Лейпциг: Тойбнер, 1981.– 718 с.
2. Выгодский М.Я. Справочник по высшей математике /М.Я. Выгодский.–11-е изд., стереотип. – М.: «Наука», 1975. – 871 с.
3. Горохов Е.В., Васылев В.Н., Коваль В.И., Алёхин А.М. Краевые условия для постановки испытаний в условиях искусственного обледенения // Металеві конструкції. – 13. – 2, 2007.– С. 97-102.
4. Горохов Е.В., Васылев В.Н., Тимофеев Н.В., Саливон Ю.И., Алёхин А.М. Климатическая камера ДонНАСА // Вісник ДонДАБА. – Макіївка, 2004. – Вып. 2004-2(44). – С. 150-153.
5. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. Для научных работников и инженеров. – М., 1978. – 832.
6. Гухман А.А., Введение в теорию подобия. – Изд. 2-е, доп. и перераб. – Учеб пособие для втузов. – М.: Высшая школа, 1973. – 296с.
7. Клетенник Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии. – М., 1980г., 240 стр. с илл.
8. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. М., 1975.–432 с.
9. Математический энциклопедический словарь / Гл. ред. Ю.В. Прохоров. – М.: Сов. энцикл., 1988. – 845с.
10. Пак В.В., Лосенко Ю.Л. Высшая математика: Учебник. – Д.: Сталкер, 1997. – 560 с.
11. Пенхерест Р., Холдер Д. Техника эксперимента в аэродинамических трубах. – М.: Наука, 1955.
12. Седов Л.И. Методы подобия и размерности в механике. – М.: Наука, 1967.
13. С.Дж. Клайн, Подобие и приближённые методы /Перевод с английского, под ред. И.Т. Аладьева, К.Д. Воскресенского. – М.: Мир, 1968.
14. Фильчаков П.Ф. Справочник по высшей математике. – К.: Наукова думка, 1972. – 743с.

Альохін Андрій Михайлович є асистентом кафедри «Металеві конструкції» Донбаської національної академії будівництва і архітектури. Наукові інтереси: ожеледні навантаження та впливи на будівельні конструкції; надійність повітряних ліній електропередачі.

Алёхин Андрей Михайлович является аспирантом и преподавателем кафедры «Металлические конструкции» Донбасской национальной академии строительства и архитектуры. Научные интересы: гололедные нагрузки на строительные конструкции, надежность воздушных линий электропередачи.

Alyokhin Andrey Mykhaylovych is a postgraduate and a lecturer of the Department "Metal Structures" of the Donbas National Academy of Civil Engineering and Architecture. His research interests include icing loads on building structures, reliability of overhead power transmission lines.