ISSN 1814-5566 print
ISSN 1993-3517 online
МЕТАЛЕВІ КОНСТРУКЦІЇ
МЕТАЛЛИЧЕСКИЕ КОНСТРУКЦИИ
METAL CONSTRUCTIONS
N1, ТОМ 15 (2009) 73-78
УДК 624.042

(09)-0184-1

КІНЦЕВИЙ ЕЛЕМЕНТ ДЛЯ ЧИСЕЛЬНОГО РОЗРАХУНКУ КОНСТРУКЦІЙ З ТОНКОСТІННИХ СТЕРЖНІВ ВІДКРИТОГО ПРОФІЛЮ

О.Р. Туснін
Московський державний будівельний університет, кафедра "Металеві конструкції",
26, Ярославське шосе, 127337, м. Москва, Росія.
E-mail: valeksol@mail.ru

Отримана 20 жовтня 2008; прийнята 23 січня 2009

Анотація. У статті розглянуті питання чисельного розрахунку просторових металевих конструкцій з тонкостінних стержнів відкритого профілю. Для коректного розрахунку таких конструкцій необхідний облік стиснутого крутіння. У вузлах конструкції розглядається 7 ступенів волі (лінійні, кутові переміщення і депланація). Представлено матрицю твердості тонкостінного стержня з урахуванням стиснутого крутіння і матрицю перетворення координат для переходу від місцевої системи координат до загальної. Результати дослідження використані при розробці обчислювального комплексу розрахунку стержневих конструкцій.

Ключові слова: кінцевий елемент, чисельний розрахунок, тонкостінні стержні, стиснуте крутіння, депланація, секторіальне напруження, матриця жорсткості.

КОНЕЧНЫЙ ЭЛЕМЕНТ ДЛЯ ЧИСЛЕННОГО РАСЧЕТА КОНСТРУКЦИЙ ИЗ ТОНКОСТЕННЫХ СТЕРЖНЕЙ ОТКРЫТОГО ПРОФИЛЯ

А.Р. Туснин
Московский государственный строительный университет,
26, Ярославское шоссе, 127337, г. Москва, Россия.
E-mail: valeksol@mail.ru

Получена 20 октября 2008; принята 23 января 2009

Аннотация. В статье рассмотрены вопросы численного расчёта пространственных металлических конструкций из тонкостенных стержней открытого профиля. Для корректного расчёта таких конструкций необходим учёт стесненного кручения. В узлах конструкции рассматривается 7 степеней свободы (линейные, угловые перемещения и депланация). Представлены матрица жёсткости тонкостенного стержня с учётом стесненного кручения и матрица преобразования координат для перехода от местной системы координат к общей. Результаты исследования использованы при разработке вычислительного комплекса расчёта стержневых конструкций.

Ключевые слова: конечный элемент, численный расчет, тонкостенные стержни, стеснённое кручение, депланация, секториальные напряжения, матрица жёсткости.

FINITE ELEMENT FOR NUMERIC COMPUTATION OF STRUCTURES OF THIN-WALLED OPEN PROFILE BARS

Tusnin A.R.
Moscow State University of Civil Engineering,
26, Jaroslavskoye Shosse, 127337 Moscow, Russia.
E-mail: valeksol@mail.ru

Received 20 October 2008; accepted 23 January 2009

Abstract. The article is devoted to the issues of numeric computation of spatial metal structures of thin-walled open profile bars. The computation being correct, a restricted torsion should be taken into consideration. Seven degrees of freedom (linear, angular movements and deplanation) are considered for structure nodes. There is given a stiffness matrix of a thin-walled bar, the restricted torsion being regarded, and the matrix of transformation of coordinates to transfer from the local system of coordinates to a general one. The results of the investigation have been used to develop a calculation complex of framing design.

Keywords: : finite element, numeric computation, thin-walled bars, restricted torsion, deplanation, sectorial stresses, stiffness matrix.

При проектировании конструкций из тонкостенных стержней открытого профиля, как правило, исключается кручение отдельных элементов. Однако для ряда систем полностью предотвратить кручение невозможно. Примером таких конструкций служат подкрановые балки, закручиваемые при эксцентричном приложении вертикального давления кранов и действии горизонтальных тормозных усилий; балки скатных покрытий; балки пола транспортерных галерей; пространственные рамы; мембранные системы с эксцентричным креплением мембраны к опорному контуру и т.п. Кручение тонкостенных стержней открытого профиля может иметь место из-за неточностей изготовления и монтажа, повреждения связей, изменения расчетных схем вследствие ремонта и реконструкции. При кручении тонкостенных стержней открытого профиля, из-за стеснения депланации сечения, появляются дополнительные секториальные нормальные напряжения, вносящие существенный вклад в суммарные напряжения, уменьшая или увеличивая их. Фактическая жесткость на кручение тонкостенного стержня открытого профиля значительно выше, чем жесткость при чистом кручении. Неправильный учет жесткостных параметров стержней ведет к неверному определению усилий и перемещений, что снижает надежность системы.

При невозможности исключить кручение конструктивных элементов расчет стержневых систем в настоящее время, как правило, выполняют только с учетом продольных, изгибных деформаций и чистого кручения. Определенные при расчете усилия и деформации для тонкостенных стержней открытого профиля существенно отличаются от фактических. Следствием неточного расчета являются или излишние запасы несущей способности, или перенапряжение конструкции. Наиболее рационально для расчета сложных пространственных конструкций из тонкостенных стержней открытого профиля использовать стержневые конечные элементы, в связи с чем актуальна разработка тонкостенных конечных элементов (далее ТКЭ), учитывающих не только чистое, но и стесненное кручение.

По сравнению с традиционными стержневыми конечными элементами, у которых начало и конец имеют по шесть степеней свободы (три линейных и три угловых), ТКЭ в начале и конце имеет дополнительно еще одну степень свободы- депланацию (рис.1).

С каждым стержнем связана местная система координат (оси X_1,Y_1,Z_1), произвольно ориентированная относительно общей системы (оси X,Y,Z). Системы координат правые.

Приняты следующие условные обозначения перемещений: u_1 — линейное перемещение

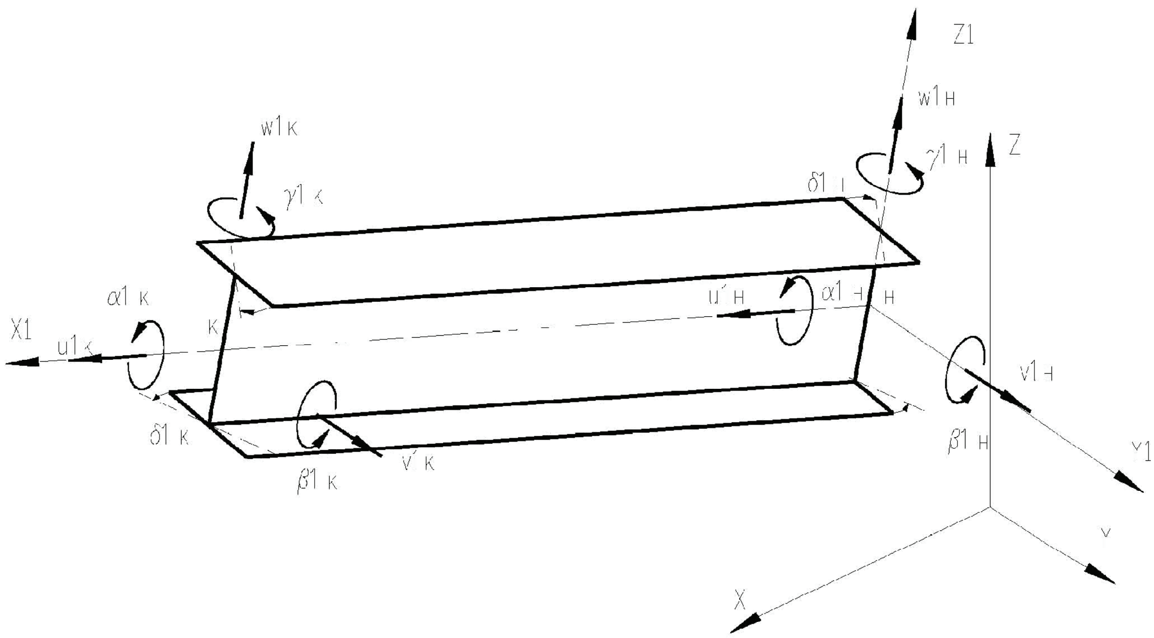

Рис. 1. Возможные перемещения узлов тонкостенного конечного элемента.

вдоль оси X_1; v_1 — линейное перемещение вдоль оси Y_1; w_1 — линейное перемещение вдоль оси Z_1; α_1 — угол поворота относительно оси X_1; β_1— угол поворота относительно оси Y_1; γ_1 — угол поворота относительно оси Z_1; u — линейное перемещение вдоль оси X; v — линейное перемещение вдоль оси Y; w — линейное перемещение вдоль оси Z; α — угол поворота относительно оси X; β — угол поворота относительно оси Y; γ — угол поворота относительно оси Z; δ — депланация сечения. Наличие индекса 1 означает, что перемещения рассматриваются в местной системе координат, а индексы "н" и "к" используются для обозначения перемещений соответственно начала и конца стержня.

Для задач в линейной постановке можно рассматривать перемещения, связанные с изгибом и сжатием стержня, отдельно от перемещений, вызывающих кручение и депланацию. Таким образом, задача по разработке матрицы жесткости ТКЭ сводится к комбинации известной матрицы жесткости, учитывающей линейные перемещения и углы поворота относительно осей Y_1, Z_1, с матрицей жесткости, учитывающей угол поворота относительно оси X_1 и депланацию сечения.

Для жесткостных параметров тонкостенного стержня открытого профиля приняты следующие обозначения: EA — продольная жесткость стержня; EI_y — изгибная жесткость стержня относительно оси Y_1; EI_z — изгибная жесткость стержня относительно оси Z_1; GI_t — жесткость стержня на чистое кручение; EI_ω — секториальная жесткость стержня. Длина стержня — l.

Матрица жесткости ТКЭ основана на теории В.З. Власова [1], имеющей хорошее экспериментальное и теоретическое подтверждение. В наиболее приемлемой для практического использования форме положения этой теории рассмотрены Д.В. Бычковым [2].

Для получения компонентов матрицы жесткости, обусловленных кручением и депланацией, рассмотрим тонкостенный стержень открытого профиля, сечение которого имеет две оси симметрии, с концами закрепленными от кручения и депланации.

Матрица жесткости включает в себя реакции в связях при возможных единичных перемещениях, в качестве которых рассматриваются углы поворота относительно продольной оси и депланация сечения стержня. С учетом ранее установленных закономерностей матрица жесткости ТКЭ с двумя осями симметрии в местной системе координат может быть представлена в виде:

$$
\begin{array}{c|cccc}
 & \alpha_1^{\text{н}} & \delta_1^{\text{н}} & \alpha_1^{\text{к}} & \delta_1^{\text{к}} \\
\hline
\alpha_1^{\text{н}} & \dfrac{\lambda EI_\omega}{l^3} & \dfrac{\alpha EI_\omega}{l^2} & \dfrac{-\lambda EI_\omega}{l^3} & \dfrac{\alpha EI_\omega}{l^2} \\
\delta_1^{\text{н}} & \dfrac{\alpha EI_\omega}{l^2} & \dfrac{\mu EI_\omega}{l} & \dfrac{-\alpha EI_\omega}{l^2} & \dfrac{\gamma EI_\omega}{l} \\
\alpha_1^{\text{к}} & \dfrac{-\lambda EI_\omega}{l^3} & \dfrac{-\alpha EI_\omega}{l^2} & \dfrac{\lambda EI_\omega}{l^3} & \dfrac{-\alpha EI_\omega}{l^2} \\
\delta_1^{\text{к}} & \dfrac{\alpha EI_\omega}{l^2} & \dfrac{\gamma EI_\omega}{l} & \dfrac{-\alpha EI_\omega}{l^2} & \dfrac{\mu EI_\omega}{l}
\end{array},
$$

где

$$\alpha = \frac{k^2 l^2 (ch(kl)-1)}{kl\,sh(kl)-2ch(kl)+2}, \gamma = \frac{kl(sh(kl)-kl)}{kl\,sh(kl)-2ch(kl)+2},$$

$$\lambda = \frac{k^3 l^3 sh(kl)}{kl\,sh(kl)-2ch(kl)+2}, \mu = \frac{kl(kl\,ch(kl)-sh(kl))}{kl\,sh(kl)-2ch(kl)+2},$$

$k = \sqrt{\dfrac{GI_t}{EI_\omega}}$ — изгибно-крутильная характеристика стержня.

Комбинация матрицы жесткости от кручения и депланации с известной матрицей жесткости от линейных перемещений и изгиба позволила получить матрицу жесткости ТКЭ с двумя осями симметрии в местной системе координат, которая имеет размерность 14x14. В таблице 1 показана структура матрицы жесткости ТКЭ. В незаполненных ячейках таблицы 1 располагаются нули. Матрица жесткости симметрична относительно главной диагонали, поэтому в таблице 1 представлены только члены, расположенные справа и вверху матрицы жесткости.

Таблица 1. Матрица жесткости ТКЭ с двумя осями симметрии.

	$u_1^{\text{н}}$	$v_1^{\text{н}}$	$w_1^{\text{н}}$	$\alpha_1^{\text{н}}$	$\beta_1^{\text{н}}$	$\gamma_1^{\text{н}}$	$\delta_1^{\text{н}}$	$u_1^{\text{к}}$	$v_1^{\text{к}}$	$w_1^{\text{к}}$	$\alpha_1^{\text{к}}$	$\beta_1^{\text{к}}$	$\gamma_1^{\text{к}}$	$\delta_1^{\text{к}}$
$u_1^{\text{н}}$	$r_{1,1}$							$r_{1,8}$						
$v_1^{\text{н}}$		$r_{2,2}$				$r_{2,6}$			$r_{2,9}$				$r_{2,13}$	
$w_1^{\text{н}}$			$r_{3,3}$		$r_{3,5}$					$r_{3,10}$		$r_{3,12}$		
$\alpha_1^{\text{н}}$				$r_{4,4}$			$r_{4,7}$				$r_{4,11}$			$r_{4,14}$
$\beta_1^{\text{н}}$					$r_{5,5}$					$r_{5,10}$		$r_{5,12}$		
$\gamma_1^{\text{н}}$						$r_{6,6}$			$r_{6,9}$				$r_{6,13}$	
$\delta_1^{\text{н}}$							$r_{7,7}$				$r_{7,11}$			$r_{7,14}$
$u_1^{\text{к}}$	Симметрично относительно							$r_{8,8}$						
$v_1^{\text{к}}$	главной диагонали								$r_{9,9}$				$r_{9,13}$	
$w_1^{\text{к}}$										$r_{10,10}$		$r_{10,12}$		
$\alpha_1^{\text{к}}$											$r_{11,11}$			$r_{11,14}$
$\beta_1^{\text{к}}$												$r_{12,12}$		
$\gamma_1^{\text{к}}$													$r_{13,13}$	
$\delta_1^{\text{к}}$														$r_{14,14}$

Неравные нулю члены матрицы жесткости даны в [3].

При построении матрицы жесткости всей конструкции необходимо выполнить преобразование матрицы жесткости ТКЭ из местной системы координат в общую систему координат. Преобразование выполняется так:

$$R=T^{T}r\cdot T,$$

где R — матрица жесткости ТКЭ в общей системе координат; r — матрица жесткости в местной системе (таблица 1); T — матрица преобразования координат; T^{T} — транспонированная матрица преобразования координат.

$$T=\begin{vmatrix} C & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_н & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_к \end{vmatrix},$$

$$T^{T}=\begin{vmatrix} C^{T} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C^{T} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_н & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C^{T} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C^{T} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_к \end{vmatrix},$$

где $C=\begin{vmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{vmatrix}$ — матрица направляющих косинусов;

$C^{T}=\begin{vmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{vmatrix}$ — транспонированная матрица направляющих косинусов; $d_н$ и $d_к$ — коэффициенты преобразования депланации для начала и конца стержня; l_1 — направляющий косинус оси X_1 относительно оси X; m_1 — направляющий косинус оси X_1 относительно оси Y; n_1 — направляющий косинус оси X_1 относительно оси Z; l_2, m_2,n_2 — направляющие косинусы оси относительно осей X, Y, Z, соответственно; l_3, m_3,n_3 — направляющие косинусы оси относительно осей X, Y, Z, соответственно.

Коэффициенты преобразования депланации определяются конструкцией узлов сопряжения стержней, направляющие косинусы зависят от геометрии конструкции.

Представленный в статье ТКЭ использован в вычислительном комплексе расчета пространственных конструкций из тонкостенных стержней открытого профиля.

Литература

1. В.З.Власов. Тонкостенные упругие стержни. М., 1940. — 256 с.
2. Д.В.Бычков. Расчет балочных и рамных стержневых систем из тонкостенных элементов. М., 1948. — 208 с.
3. Туснин А.Р. Построение матриц жесткости тонкостенных стержней открытого профиля. — Брест: Брестский государственный технический университет, 2001. — 122 с.
4. Джанелидзе Г.Ю., Пановко Я.Г. Статика упругих тонкостенных стержней. — М., 1948. — 208 с.
5. Горбунов Б.Н., Стрельбицкая А.И. Теория рам из тонкостенных стержней. — М., 1948. — 198 с.
6. Barsoum R.S., Gallagher R.U.. Finite element analysis of torsional and torsional-flexural stability problems // International Journal For Numerical Methods In Engineering. — 1970. — N2.- p.335-352.
7. Bazant P., Nimeiri M.E. Large-deflection spatial bucling of thin-walled beams and frame // Journal of Structural Engineering. — ACSE, 1973. — N99.- p.1259-1281.
8. Chan S.L., Kitipornchai S.. Geometric nonlinear analysis of asymmetrical thin-walled beams-columns // Engineering Structure. — 1987.- N9.- p.243-254.
9. Programm: Biegetorsionstheorie II. Ordnung BT II. — Stuttgart, 1991. — 42 s.
10. Rajasekaran, S. Finite element analysis of thin-walled for open cross sections//Structural Engineering Report/Department of Civil Engineering, University of Alberta, Edmonton, Canada. — 1971.- No.34.- Sept. — p.144-160.
11. Rajasekaran, S. Instability of tapered thin-walled beams of generic section // Journal of Engineering Mechanics. — 1994.- v.120.- N8. — p.1630-1640.

Туснін Олександр Романович є професором кафедри “Металеві конструкції”. Наукові інтереси: розрахунок і проектування металевих просторових конструкцій, мембранні конструкції.

Туснин Александр Романович является профессором кафедры "Металлические конструкции". Научные интересы: расчёт и проектирование металли ческих пространственных конструкций, мембранные конструкции.

Tusnin Alexandr is Professor of Metal Structures Department. His research interests include computation of spatial metal structures, membrane structures.