



ISSN 1814-5566 print

ISSN 1993-3517 online

МЕТАЛЕВІ КОНСТРУКЦІЇ
МЕТАЛЛИЧЕСКИЕ КОНСТРУКЦИИ
METAL CONSTRUCTIONS

№2, ТОМ 15 (2009) 97-104

УДК 539.3

(09)-0187-0

ДОСЛІДЖЕННЯ ПРОЦЕСУ РОЗВИТКУ НАПРУЖЕНЬ У КОРОДУЮЧИХ ПЛАСТИНАХ ІЗ КРУГОВИМ ВИРІЗОМ

Д.Г. Зеленцов, О.А. Радуль

ДВНЗ "Український державний хіміко-технологічний університет"

пр. Гагаріна, 8, м. Дніпропетровськ, 49005, Україна.

E-mail: oksan.a@ua.fm

Отримана 25 лютого 2009; прийнята 17 квітня 2009

Анотація. Пропонується розв'язання задачі довговічності плосконапруженої кородуючої пластини, ослабленої круговим вирізом. Розглядається загальний випадок корозійної взаємодії, коли швидкість корозії залежить від механічних напружень. Процес деформування пластини в агресивному середовищі моделюється шляхом чисельного розв'язання задачі Коші для систем диференціальних рівнянь, що описують процес накопичення геометричних пошкоджень в елементах конструкцій, спільно з методом скінчених елементів. Для розв'язання задачі Коші використовується алгоритм, що базується на використанні аналітичної формули, яка визначає взаємозв'язок між початковим і кінцевим значеннями еквівалентного напруження в околі деякої точки, параметрами агресивного середовища, початковою товщиною та часом. В якості таких точок використовуються вузли скінченно-елементної сітки, яка має в даному випадку нерівномірну розбивку. Запропоновано адаптований трикутний скінченний елемент змінної товщини з 12 ступенями свободи, який забезпечує другий порядок апроксимації функції товщини. Задачі напружено-деформованого стану та довговічності розв'язуються в рамках плоскої задачі теорії пружності. Наводяться результати чисельного експерименту.

Ключові слова: плосконапружена пластина, корозійний знос, концентратор напружень, напружено-деформований стан, довговічність, скінченний елемент змінної товщини.

ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОЦЕССА РАЗВИТИЯ НАПРЯЖЕНИЙ В КОРРОДИРУЮЩИХ ПЛАСТИНАХ С КРУГОВЫМ ВЫРЕЗОМ

Д.Г. Зеленцов, О.А. Радуль

ГВУЗ "Украинский государственный химико-технологический университет"

пр. Гагаріна, 8, г. Днепропетровск, 49005, Украина.

E-mail: oksan.a@ua.fm

Получена 25 февраля 2009; принята 17 апреля 2009

Аннотация. Предлагается решение задачи долговечности плосконапряженной корродирующей пластины, ослабленной круговым вырезом. Рассматривается общий случай коррозионного взаимодействия, когда скорость коррозии зависит от механических напряжений. Процесс деформирования пластины в агрессивной среде моделируется путем численного решения задачи Коши для систем дифференциальных уравнений, описывающих процесс накопления геометрических повреждений в элементах конструкций, совместно с методом конечных элементов. Для решения задачи Коши используется алгоритм, основанный на применении аналитической формулы, которая определяет взаимосвязь между начальным и конечным значениями эквивалентного напряжения в окрестности некоторой точки, параметрами агрессивной среды, начальной толщиной и временем. В качестве таких точек используются узлы конечно-элементной сетки, которая имеет в данном случае неравномерную разбивку. Предложен адаптированный треугольный конечный элемент переменной толщины с 12 степенями свободы,

обеспечивающий второй порядок аппроксимации функции толщины. Задачи напряженно-деформированного состояния и долговечности решаются в рамках плоской задачи теории упругости. Приводятся результаты численного эксперимента.

Ключевые слова: плосконапряженная пластина, коррозионный износ, концентратор напряжений, напряженно-деформированное состояние, долговечность, конечный элемент переменной толщины.

RESEARCH ON THE DEVELOPMENT OF STRESS IN CORRODING PLATES WITH A CIRCULAR CUT-OUT

D.G.Zelentsov, O.A.Radul

The Ukrainian State University of Chemical Engineering

Gagarina Avenue, 8, Dnipropetrovs'k, 49005, Ukraine.

E-mail: oksan.a@ua.fm

Received 25 Februar 2008; accepted 17 April 2009

Abstract. There is offered a solution of the problem of durability of a planar stressed corroding plate weakened with a circular cut-out. A general case of a corrosion interaction when corrosion rate depends on mechanical stresses is considered. The process of a plate deformation in a corrosive medium is modeled both by numerical solution of a Cauchy problem for the systems of differential equations describing the process of accumulating geometrical damages in structure components and by the finite elements method. To solve the Cauchy problem a special algorithm is used. This algorithm is based on the application of the analytical formula which defines a relationship between initial and finite values of a reduced stress at a point, the corrosive medium parameters, an initial thickness and time. Junctions of a finite-element mesh which in this case has a non-uniform spacing are used as these points. There is offered an adapted triangular finite element of a variable thickness with 12 degrees of freedom which provides the second order of approximation of a thickness function. Problems of a mode of deformation and durability are solved within a plane problem of the theory of elasticity. Results of the numerical experiment are given.

Keywords: planar-stressed plate, corrosive wear, stress concentrator, mode of deformation, durability, finite element of a variable thickness.

Вступ

Однією з основних проблем сучасних галузей промисловості є проблема прогнозування довговічності деталей, вузлів, елементів конструкцій з урахуванням вимог по міцності при одночасному зниженні їхньої матеріалоемності. Якщо конструкції експлуатуються в агресивному середовищі, то напруження, що виникають в їх елементах, викликають прискорення корозійного зносу [1]. У свою чергу, корозія призводить до зміни геометричних розмірів елементів, а це викликає перерозподіл напружень і деформацій в них. Тому задачі розробки методів й алгоритмів розрахунку конструкцій, підданих корозійному зносу, є актуальними. Ці методи повинні враховувати зміну в часі геометричних характеристик конструкцій і дозволяти оцінювати розрахунковим шляхом зниження несучої

здатності та зменшення довговічності конструкцій.

Як елементи з'єднань шарнірно-стержневих систем (ШСС) широко застосовуються пластини з круговими вирізами. Ці вирізи є концентраторами напружень і в значній мірі впливають на напружено-деформований стан (НДС) елемента конструкції. Пластини з круговим вирізом є об'єктами багатьох досліджень [2, 3], але в них не враховується вплив агресивних середовищ на НДС. В той же час, як було зауважено в [4], в околі вирізу спостерігається зона різкої зміни величин напружень та деформацій, викликана корозійним руйнуванням. Тому особливий інтерес викликає дослідження процесу збільшення напружень в околі вирізів з урахуванням агресивності середовища, в якому експлуатується конструкція.

Постановка задачі

Пропонується задача дослідження поведінки тонкої кородуючої пластини з вирізом, як найбільш характерного об'єкта, що дозволяє вивчити деякі загальні закономірності, властиві з'єднувальним елементам ШСС, при впливі на них агресивних середовищ. У наведеній роботі розглядається концентрація напружень тільки при деформуванні матеріалу в області пружних деформацій.

Розрахунки міцності є складовою частиною процесу створення великогабаритних конструкцій. Висока точність розрахунків може бути досягнута тільки за умов використання адекватних методів розрахунків і якісної скінченно-елементної моделі (СЕМ) конструкції [5, 6].

Для одержання якісної СЕМ необхідний, насамперед, правильний вибір типів скінченних елементів (СЕ), що моделюють елементи конструкції [7]. Точність результатів, одержуваних при використанні СЕ, суттєво залежить від числа його ступенів свободи. Вибір та обґрунтування типу СЕ, який буде використовуватись при розв'язанні поставленої задачі, наводиться нижче.

Вибір математичної моделі корозійного процесу

Корозійний процес у конструкції (зміна товщини її елементів, як функції координат і часу) моделюється шляхом розв'язання задачі Коші

для системи диференціальних рівнянь (СДР), що описують зміну геометричних характеристик. Для урахування впливу корозійного середовища до відомих рівнянь плоскої задачі теорії пружності — співвідношення Коші при виконанні умов нерозривності:

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = [D] \cdot \{q\} \quad (1)$$

та закону Гука:

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} E & \mu E & 0 \\ 1-\mu^2 & 1-\mu^2 & 0 \\ \mu E & E & 0 \\ 1-\mu^2 & 1-\mu^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E}{2(1+\mu)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = [E] \cdot \{\varepsilon\} \quad (2)$$

додаються рівняння, що описують кінетику корозійного зносу при заданих початкових умовах, загальний вигляд яких представлений наступною моделлю:

$$\frac{d[H]}{dt} = -v_0 \cdot \psi[\sigma_{eq}(t)] \quad [H]_{t=0} = [H]_0 \quad (3)$$

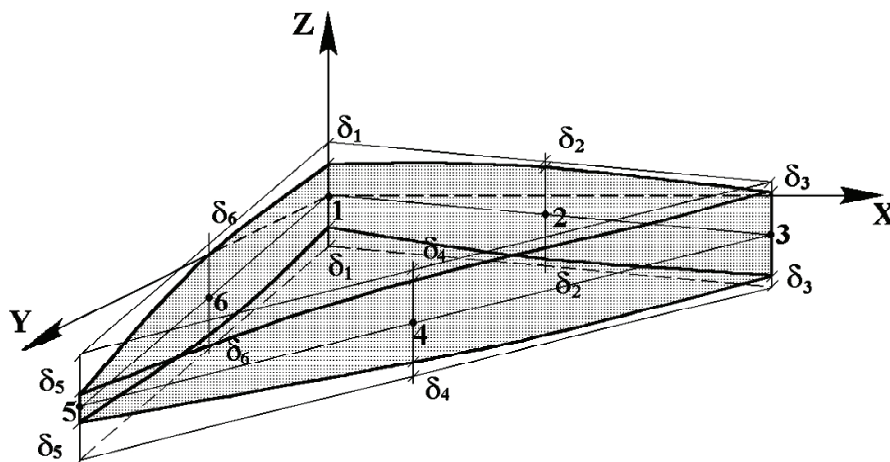


Рис. 1. Трикутний СЕ змінної товщини з 12-ма ступенями свободи.

В формулах (1)-(3) прийняті такі позначення: $[D]$ та $[E]$ – матриці диференціювання та пружності; $[H]$ – матриця $N \times n$ товщин елементів конструкції, що змінюються; $[N]$ – кількість елементів у СЕМ конструкції; n – кількість параметрів, що визначають геометричні розміри елемента; v_0 – швидкість корозії при відсутності напружень; σ_{eq} – абсолютне значення еквівалентного напруження; $\Psi\{\sigma_{eq}(\delta)\}$ – деяка функція.

СЕ змінної товщини

Останнім часом для розрахунку конструкцій, що піддаються корозійному зносу, широко використовується метод скінченних елементів (МСЕ) [8-10]. Але при цьому в задачах моделювання корозійних процесів застосовуються СЕ, спроектовані без урахування корозійних процесів. Оскільки при моделюванні процесу корозії в пластині швидкість корозії залежить від напружень, а НДС істотно неоднорідний по області, то розрахункова схема конструкції в деякий момент часу буде являти собою пластину змінної товщини. У відомих роботах [8, 10, 11] при розрахунку плосконапружених кородуючих пластин використовувалися СЕ постійної товщини, які можуть забезпечити лише нульовий порядок апроксимації функції товщини. Це ускладнює побудову адекватної моделі корозійного процесу, оскільки приводить до появи розривів геометричних характеристик на границях СЕ. Низький порядок апроксимації при необхідному рівні точності може бути компенсований лише збільшенням кількості СЕ в розрахунковій схемі, а це призводить до збільшення розмірності СДР, що описують корозійний процес в елементах конструкції.

У роботі [12] була запропонована адаптація МСЕ для розв'язання задач НДС і довговічності кородуючих континуальних конструкцій, яка полягала в побудові чотирикутного СЕ змінної товщини з 8 ступенями свободи, що враховував зміну геометричних характеристик по області елемента.

У даній роботі для моделювання корозійного процесу при розрахунку вищезгаданих об'єктів пропонується використання модифікованого трикутного СЕ змінної товщини з 12

ступенями свободи, товщина якого є функцією координат і часу [13, 14]. У результаті впливу корозійного середовища запропонований СЕ набуває форми, зображеної на рис. 1.

У цьому випадку, на відміну від відомих СЕ [11, 12], приймався закон зміни товщини по області СЕ у вигляді повного поліному 2 ступеня від двох змінних. Він містив шість членів, що відповідає сумі вершин трикутника й числа його серединних точок:

$$h(x, y, t) = A(t) + B(t) \cdot x + C(t) \cdot y + D(t) \cdot x^2 + E(t) \cdot x \cdot y + F(t) \cdot y^2 \quad (4)$$

Процедура побудови матриці товщини СЕ досить детально описана в роботі [13].

Алгоритм розв'язання задачі довговічності

При розв'язанні задач НДС і довговічності поведінка плосконапружених елементів в агресивному середовищі досліджується шляхом чисельного розв'язання задачі Коші для СДР (3) традиційно за допомогою однокрокових чисельних методів. У даній роботі запропонований напіваналітичний алгоритм розв'язання СДР. Він побудований на основі аналітичної формули, що визначає зв'язок між початковим σ_{eq0} і кінцевим σ_{eq} еквівалентними напруженнями в околі деякої точки, початковою товщиною елемента h_0 , параметрами агресивного середовища (v_0, k) і часом t :

$$t = \frac{h_0}{v_0} \sigma_{eq0} \left[k \ln \frac{\sigma_{eq0}(1 + k\sigma_{eq})}{\sigma_{eq}(1 + k\sigma_{eq0})} + \frac{\sigma_{eq} - \sigma_{eq0}}{\sigma_{eq} \sigma_{eq0}} \right] \quad (5)$$

Ця формула дозволяє визначити довговічність кородуючих конструкційних елементів за умови, що в них не відбувається перерозподілу внутрішніх зусиль. Тут використовується еквівалентне напруження, при якому корозійний процес у випадку складного напруженого стану протікає з тією ж швидкістю, що і у випадку простого. В якості його приймається комбінація максимального головного напруження та інтенсивності напружень (ефективні напруження типу Мізеса) [15]:

$$\sigma_{eq} = \sigma_{int} + \omega(\sigma_1 - \sigma_{int}) \quad (6)$$

де ω — константа. В даному випадку:

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (7)$$

$$\sigma_{\text{int}} = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y + 3\tau_{xy}^2} \quad (8)$$

Чисельна ілюстрація та аналіз результатів

Пропонується розв'язання задачі довговічності кородуючої плосконапруженої квадратної пластини, ослабленої малим круговим вирізом, рівномірно розтягнутої уздовж осі OY зусиллями, які розподілені по площі поперечного перерізу торців (рис. 2). Пластина виготовлена з ізотропного матеріалу з характеристиками: $E=2,1 \times 10^5$ МПа, $\mu = 0,3$. Геометрія пластини визначена наступними розмірами: $L=20$ см, $h=2,0$ см, $D=2,0$ см. Параметри агресивного середовища: $v_0 = 0,1$ см/рік, $k = 0,005$ МПа⁻¹;

навантаження $Q = 40$ кН; граничне значення напружень $[\sigma] = 240$ МПа. З огляду на симетрію розглядається четверта частина пластини (рис. 3).

Досліджується розподіл напружень навколо кругового вирізу, в умовах однорідного напруженого стану вдалині від вирізу. Мета розрахунку полягає в дослідженні зміни НДС у часі й оцінці довговічності такої пластини. Для вивчення області, в якій очікуються найбільші зміни напружень, пропонується нерівномірна розбивка за допомогою модифікованих трикутних СЕ [13, 14].

Асимптотично точний розв'язок задач НДС та довговічності визначався чисельно, шляхом згущення сітки розбивки, таким чином, збільшуючи розмірність задачі МСЕ. Початкова СЕМ об'єкта складалася з 32 елементів. Наступні СЕМ склалися з 72 й 128 елементів. Розроблена модель дозволила визначити найбільш напружені місця в модельній конструкції, а отримана кореляція результатів розрахунку для трьох різних скінченно-елементних сіток дозволила зробити висновок про достовірність моделі.

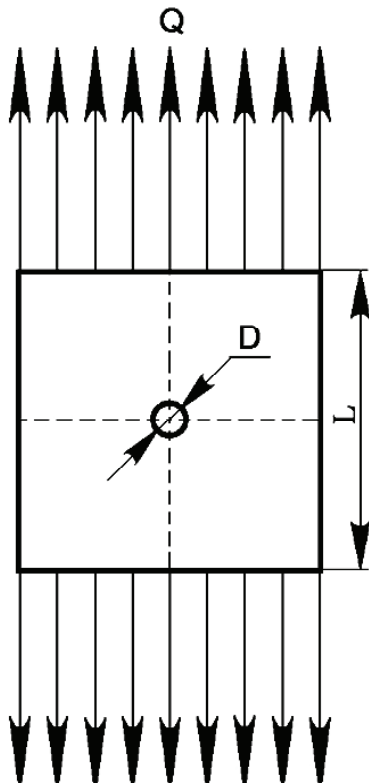


Рис. 2. Розрахункова схема пластини.

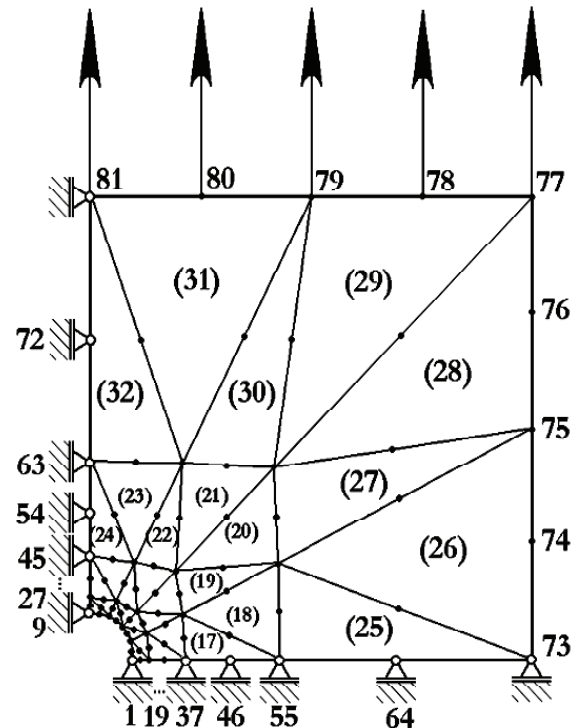


Рис. 3. СЕМ модель конструкції.

Для розв'язання задачі область пластини апроксимувалась 32 трикутними СЕ змінної товщини із 12 ступенями свободи. Дов-

говічність конструкції визначалася моментом часу, коли еквівалентні напруження досягали граничного значення в деякому вузлі СЕ.

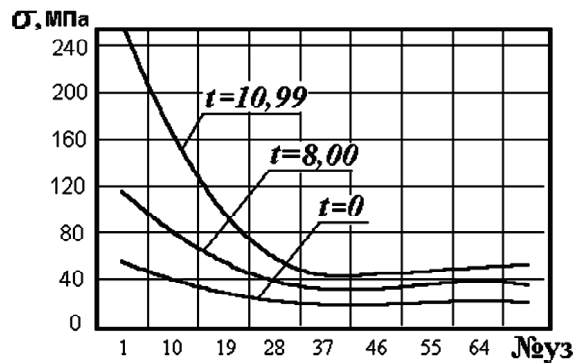
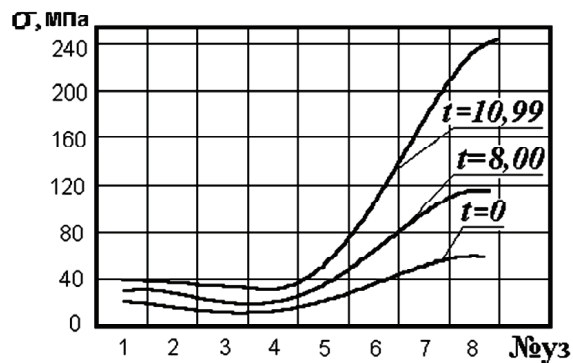


Рис. 4. Зміна напружень по вузлах.

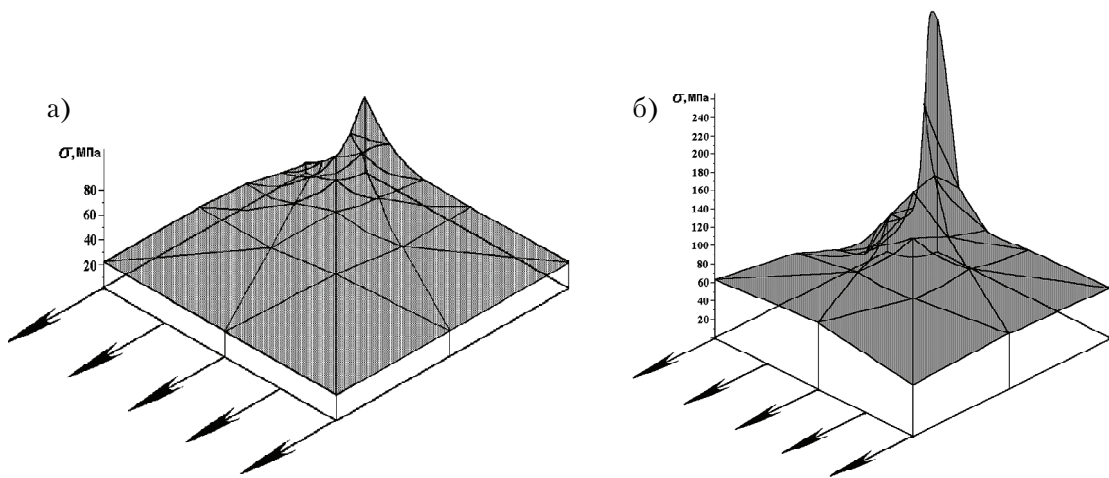


Рис. 5. Розподіл напружень у початковий момент часу (а) і в момент руйнування (б).

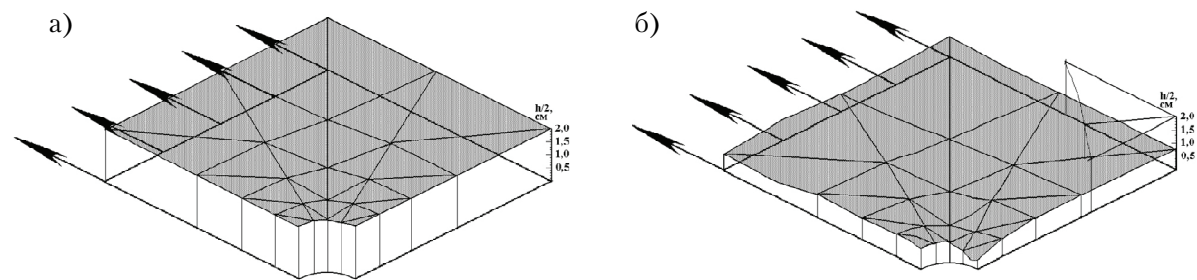


Рис. 6. Розподіл товщини пластини в початковий момент часу (а) та в момент руйнування (б).

На рис. 4 показана зміна еквівалентних напружень по перерізу пластини, що проходить через вузли й серединні точки по контуру вирізу (вузли 1-9) (рис. 4 а) та на осі симетрії, перпендикулярно дії сили (вузли 1, 10, 19, 28, 37, 46, 55, 64) (рис. 4 б). При $t=10,99$ років напруження досягають граничних значень в 2-му вузлі СЕ № 1, тобто в найбільш навантаженій у початковий момент точці, що відповідає моменту руйнування конструкції.

Вирізи в пластині змінюють загальну картину НДС. Якщо розподіл напружень на деякій відстані від вирізу близький до лінійного, то в кутових зонах біля вирізів епюри нормальних напружень є криволінійними, що викликано концентрацією напружень поблизу вирізів.

Відповідно до принципу Сен-Венана вплив концентратора напружень позначається на відстані, що не перевищує величини радіуса вирізу. У випадку експлуатації пластини в агресивному середовищі ця відстань збільшується, тому що зона впливу концентратора напружень істотно зростає. Це необхідно враховувати при проектуванні.

Зміна напружень по області пластини у випадку моделювання корозійного процесу з використанням трикутного СЕ змінної товщини в початковий момент часу зображена на рис. 5 а, у момент руйнування — на рис. 5 б. Слід зазначити, що забезпечення нерозривності геометричних характеристик у вузлах СЕ стало можливим тільки завдяки використанню СЕ змінної товщини.

З рис. 5 а видно, що напруження в початковий момент часу приймають найбільші значення на контурі вирізу в перерізі, перпендикулярному до напрямку розтягу, при цьому коефіцієнт концентрації дорівнює 3. У момент руйнування пластини цей коефіцієнт став близьким до 5 (рис. 5 б). Очевидно, що вплив вирізу носить місцевий характер, але зона впливу концентратора значно збільшилася.

На рис. 6 показано розподіл товщини пластини в початковий момент часу (а) та в момент руйнування (б).

Висновки

Побудована математична модель корозійного процесу в пластині з вирізом, що базується на спільному використанні МСЕ та напіваналі-

тичного алгоритму розв'язання СДР. Використання трикутних СЕ змінної товщини дозволило вивчити поведінку плосконапруженої кородуючої пластини, ослабленої вирізом, уникнути появи розривів функцій геометричних характеристик у вузлах СЕМ, знизити розмірність задачі МСЕ й підвищити точність розв'язку задачі довговічності. В результаті чисельного експерименту показана висока ефективність СЕ змінної товщини, особливо в тих зонах, де спостерігається різка зміна поля напружень і товщини пластини. Наведені дослідження дозволили зробити висновок про значне збільшення значення коефіцієнта концентрації напружень поблизу кругових вирізів кородуючої пластини в порівнянні з пластиною, що функціонує в нейтральному середовищі.

Література

1. Петров В.В., Овчинников И.Г., Шихов Ю.М. Расчет элементов конструкций, взаимодействующих с агрессивной средой. — Саратов: СГУ, 1987. — С.288.
2. Walker M. Optimal design of symmetric laminates with cut-outs for maximum buckling load, *Computers & Structures*, Volume 70, Issue 3, 1999, p.337-343.
3. Радуль О.А. Дослідження динаміки концентрації напружень у кородуючих пластинах із круговим вирізом // Тези доповідей 5 Всеукраїнської наукової конференції молодих вчених та студентів "Наукові розробки молоді на сучасному етапі".— 2006.— Київ: КНУТД. — С.114.
4. Zamani N. G., Porter J. F., Mufti A. A. A Survey of Computational Efforts in the Field of Corrosion Engineering, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 23(7), 1986, p.1295-1311.
5. Zienkiewicz O. C. Achievements and some unsolved problems of the finite element method, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 47(1), 2000, p.9-28.
6. Oden J. T., Babuska I., Nobile F., Feng Y., Tempone R. Theory and methodology for estimation and control of errors due to modeling, approximation, and uncertainty / *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering (Selected papers from the 11th Conference on The Mathematics of Finite Elements and Applications)*, Volume 194, Issues 2-5, 2005, p.195-204.
7. Метод конечных элементов. / Под ред. П.М. Варвака. — К.: Вища школа, 1981. — С.176.
8. Lee S. W., Dai C. C., Yeom C. H. A Triangular Finite Element for Thin Plates and Shells, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 21(10), 1985, p.1813-1831.

9. Oliver J., Onate E. A Total Lagrangian Formulation for the Geometrically Non-linear Analysis of Structures using Finite Elements. Part I. Two-dimensional Problems: Shell and Plate Structures, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 20(12), 1984, p.2253-2281.
10. Phaal R., Calladine C. R. A Simple Class of Finite Elements for Plate and Shell Problems. I: Elements for Beams and Thin Flat Plates, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 35(5), 1992, p.955-977.
11. Фридман М.М. Метод конечных элементов в задачах проектирования конструкций, подверженных коррозионному износу // Придніпровський науковий вісник. Фізико-математичні науки. — Дніпропетровськ: Наука і освіта, 1998. — № 12(179). — С. 49 - 55.
12. Зеленцов Д.Г., Науменко Н.Ю. Математическое моделирование коррозионных процессов в континуальных конструкциях с использованием модифицированных конечных элементов переменной жесткости // Системні технології. Регіональний міжвузівський збірник наукових праць. — Вип. 5 (34). — Дніпропетровськ, 2004. — С. 80-88.
13. Зеленцов Д.Г., Радуль О.А. Модифицированный треугольный конечный элемент переменной толщины в задачах моделирования коррозионных процессов в плосконапряженных пластинах // Вопросы химии и химической технологии. — 2005. — № 4. — С. 139 - 143.
14. Радуль О.А. Расчет корродирующих конструкций с помощью модифицированного треугольного конечного элемента переменной жесткости // Тезисы докладов II между. науч.-техн. конф. "Химия и современные технологии". — Днепропетровск, 2005. — С. 256.
15. Работнов Ю.М. Ползучесть элементов конструкций. — М.: Наука, 1966. — С.752.

Радуль Оксана Анатоліївна — асистент кафедри "Вища математика" ДВНЗ "Український державний хіміко-технологічний університет". Наукові інтереси: будівельна механіка, кородуючі конструкції, оптимальне проектування, математичне моделювання, використання методу скінченних елементів.

Зеленцов Дмитро Гегемонович — завідуючий кафедри "Вища математика" ДВНЗ "Український державний хіміко-технологічний університет". Наукові інтереси: будівельна механіка, кородуючі конструкції, оптимальне проектування, математичне моделювання, використання методу скінченних елементів.

Радуль Оксана Анатольевна — ассистент кафедры "Высшая математика" ГБУЗ "Украинский государственный химико-технологический университет". Научные интересы: строительная механика корродирующих конструкций, оптимальное проектирование, математическое моделирование, использование метода конечных элементов

Зеленцов Дмитрий Гегемонович — заведующий кафедрой "Высшая математика" ГБУЗ "Украинский государственный химико-технологический университет". Научные интересы: строительная механика корродирующих конструкций, оптимальное проектирование, математическое моделирование, использование метода конечных элементов.

Oksana A. Radul — an assistant of Higher Mathematics Department of the Ukrainian State University of Chemical Engineering. The research interests: structural mechanics, corroding constructions, optimal design, mathematical simulation, application of the finite element method.

Dmytro G. Zelentsov — Head of Higher Mathematics Department of the Ukrainian State University of Chemical Engineering, D.Sc. The research interests: structural mechanics, corroding constructions, optimal design, mathematical simulation, application of the finite element method.