ISSN 1814-5566 print
ISSN 1993-3517 online
МЕТАЛЕВІ КОНСТРУКЦІЇ
МЕТАЛЛИЧЕСКИЕ КОНСТРУКЦИИ
METAL CONSTRUCTIONS
N1, ТОМ 16 (2010) 171-178
УДК 533.6.013.42; 696.2

(10)-0218-1

КРИТЕРІЇ ІДЕНТИФІКАЦІЇ НЕЛІНІЙНИХ МОДЕЛЕЙ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ

В. Є. Волкова
Дніпропетровський національний університет залізничного транспорту,
вул. Ак. В. Лазаряна, 2, м. Дніпропетровськ, Україна, 49010.
E-mail: drvev@mail.ru

Отримана 8 липня 2010; прийнята 27 серпня 2010.

Анотація. Розглянуті питання структурної ідентифікації динамічних систем на основі аналізу спостережуваних фазових траєкторій та їх відображень в розширеному фазовому просторі. Виконаний аналіз існуючих методів виявлення нелінійної структури динамічних моделей механічних систем. На основі аналітичного дослідження властивостей фазових траєкторій розроблений метод виявлення нелінійної структури системи без застосування методів параметричного оцінювання. Представлений автором метод демонструє практичну можливість ідентифікації моделей механічних систем з використанням відображень фазових траєкторій на площині «прискорення — переміщення». Пропонований метод близький до методу обробки часових процесів по пиках і на відміну від існуючих методів якісної ідентифікації не громіздкий в реалізації.

Ключові слова: нелінійні динамічні моделі, відображення фазових траєкторій, фазова площина «прискорення — переміщення», структурна ідентифікація.

КРИТЕРИИ ИДЕНТИФИКАЦИИ НЕЛИНЕЙНЫХ МОДЕЛЕЙ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

В. Е. Волкова
Днепропетровский национальный университет железнодорожного транспорта,
ул. Ак. В. Лазаряна, 2, г. Днепропетровск, Украина, 49010.
E-mail: drvev@mail.ru

Получена 8 июля 2010; принята 27 августа 2010.

Аннотация. Рассмотрены вопросы структурной идентификации динамических систем на основе анализа наблюдаемых фазовых траекторий и их отображений в расширенном фазовом пространстве. Выполнен анализ существующих методов выявления нелинейной структуры динамических моделей механических систем. На основе аналитического исследования свойств фазовых траекторий разработан метод выявления нелинейной структуры системы без применения методов параметрического оценивания. Представленный автором метод демонстрирует практическую возможность идентификации моделей механических систем с использованием отображений фазовых траекторий на плоскости «ускорение — перемещение». Предлагаемый метод близок методу обработки временных процессов по пикам и в отличие от существующих методов качественной идентификации не громоздок в реализации.

Ключевые слова: нелинейные динамические модели, отображения фазовых траекторий, фазовая плоскость «ускорение — перемещение», структурная идентификация.

CRITERIA FOR IDENTIFICATION OF NON-LINEAR MODELS OF DYNAMIC SYSTEMS

Viktorija E. Volkova
Dnepropetrovsk National University of the Railway Transport,
2, Ac.V. Lazarjan Str., Dnepropetrovsk, Ukraine, 49010.
E-mail: drvev@mail.ru

Received 8 July 2010; accepted 27 August 2010.

Abstract. The paper considers the problems of structural identification of the dynamic systems on the basis of the analysis of the phase paths and their reflections in the extended phase space. The analysis of the present techniques of revealing of the non-linear structures of the dynamic model of the mechanical system has been done. On the basis of the analytical study of the phase paths properties, the method of non-linear structure revealing of the system without application of parametric estimation methods has been worked out. The method assumed by the author demonstrates the feasibility of identification of mechanical systems models with application of phase paths reflections on the plane «acceleration — displacement». The offered method is close to the method of the temporary processes treatment, but unlike of the present methods of the qualitative identification, it is not so awkward in application.

Keywords: non-linear dynamic models, phase paths reflections, phase plane «acceleration — displacement», structural identification.

Введение

Построение математической модели предшествует решению заданий прогнозирования динамического поведения элементов конструкций. Предпосылки используются при построении моделей, как правило, основываются на свойстве ожидаемого решения. Требования достаточной простоты модели по отношению к выбранной системе характеристик связаны со степенью их адекватности. Выполнение детальных нелинейных расчетов относительно произвольного объекта или расчетной схемы связано с существенными вычислительными трудностями. В таком случае становится очевидным, что наиболее рациональным подходом является тщательный анализ некоторых типичных нелинейных моделей, доступных для современной вычислительной техники и сопоставления результатов расчетов с экспериментальными данными. Для определения пределов применимости модели следует учитывать по окончательному результату все возможные упрощения и аппроксимации.

1. Нелинейные модели динамических систем

Большинство механических систем проявляет нелинейные свойства при определенных параметрах внешнего возмущения. Нелинейность является общим свойством динамических систем, а их линейное поведение — это исключение. В динамических системах основными источниками нелинейности являются:

– геометрическая нелинейность, проявляющаяся (наблюдаемая) при значительных перемещениях исследуемой системы. Она является следствием нелинейности выражений потенциальной энергии. Примером таких систем являются гибкие стержни, пологие арки, оболочки и тонкие пластинки;
– нелинейность по материалу, которая наблюдается при нелинейном законе зависимости между напряжениями и деформациями. Данный тип нелинейности часто встречается в задачах колебаний виброизоляторов, выполненных из полимерных материалов;
– нелинейность диссипативных характеристик. По существу диссипация энергии в механических системах является наименее изученным свойством. Модели вязкого трения являются весьма приближенным представлением физической действительности, и их применение часто вызвано удобством последующих вычислений. Удовлетворительное описание энергетических соотноше-

ний в диссипативных системах возможно только с помощью нелинейных моделей. Сухое трение, трение скольжения, гистерезисное трение, аэродинамическое сопротивление являются наиболее яркими примерами нелинейности диссипативных характеристик;

- конструктивная нелинейность, вызванная граничными условиями. Например, нелинейности упругих характеристик, источником которых являются зазоры и податливость соединений, удары, возникающие при контакте с жесткими ограничителями;
- инерционная нелинейность, источником которой является нелинейность выражений кинетической энергии, которая отражается в появлении нелинейных членов, содержащих ускорения и (или) скорость, в уравнениях движения. Например, ускорения Кориолиса в уравнениях движения тел, относительно вращающейся оси.

Различие между линейными и нелинейными системами весьма существенно. Нелинейные системы могут демонстрировать сложное хаотическое поведение при действии внешнего гармонического возмущения, в то время как реакция линейных систем всегда представляет собою периодический процесс на частоте внешнего возмущения. Нелинейные системы склонны к двум противоположным тенденциям, к хаотическому поведению и самоорганизации. Кроме того, даже слабо нелинейные системы могут проявлять чрезвычайно интересные и сложные явления, такие как перескоки, бифуркации, суб - и ультрагармонические колебания, предельные циклы и хаос.

2. Методы идентификации динамических систем

Применение методов идентификации имеет ряд преимуществ. Так, выбор модели динамической системы основывается на объективной информации — результатах экспериментальных измерений и результаты математического моделирования, полученные путем применения полученной модели, являются более достоверными [8, 9, 12, 13, 14].

Основу теории построения математических моделей (идентификации) составляет информационно-алгоритмический подход. В условиях априорной неопределенности информационная составляющая начинает играть доминирующую роль, так как от ее анализа во многом зависит применение тех или иных методов формализации, позволяющих получить математическое описание для исследуемой динамической системы.

Применению методов параметрической идентификации предшествует выявление структуры модели. Это одна из основных проблем теории идентификации. Как правило, в большинстве работ, посвященных построению математических моделей, структура постулируется априори с точностью до некоторого множества неизвестных параметров. В дальнейшем это множество является основным объектом исследования. Наиболее актуальной, сложной и наименее изученной является проблема оценки структуры нелинейных систем.

3. Методы нелинейной динамики

Традиционно исследование динамических систем происходит во временной области. Развитие геометрических методов позволило получить решения для ряда важных прикладных задач [11], и указало на необходимость исследования для нелинейных систем качественного поведения. В основе нелинейной динамики лежат работы А. Пуанкаре, А. М. Ляпунова, Ж. Адамара. На раннем этапе вклад в развитие внесли Д. Биркхгоф, Е. Хопф. Уже к тридцатым годам прошлого века сформировалась математическая теория колебаний двумерных систем [1, 2, 4, 5]. А. А. Андроновым и Л. С. Понтрягиным определено понятие грубых, структурно-устойчивых систем; А. А. Андроновым, Е. А. Леонтович рассмотрены основные бифуркации предельных циклов; А. А. Андроновым, Л. С. Понтрягиным исследованы полные топологические инварианты для грубых систем, результаты обобщены Е. А. Леонтович и А. Г. Майером. Дальнейшее развитие нелинейной динамики определилось открытием хаотических систем, модели которых имеют простой вид.

Другое направление применения идей и методов нелинейной динамики связано с проблемой обработки сигналов [3, 7]. Таким образом, аппарат нелинейной динамики превращается в инструмент исследования, позволяющий сделать заключение или предположение о структуре объекта, сконструировать его динамическую модель и т. д. Разработку методов и алгоритмов анализа сигналов можно считать важным направлением нелинейной динамики, непосредственно связанным с практическими приложениями. Существуют примеры успешного использования методов нелинейной динамики для анализа и обработки сигналов и построения моделей. Однако особенность данных подходов состоит в том [7, 10], что их применение к экспериментальным данным алгоритма реконструкции не имеет своей целью получение модели, способной воспроизводить исходный режим.

4. Применение фазовых траекторий к исследованию динамических процессов

Фазовое пространство динамических систем многомерно. Каждая его точка характеризуется не менее чем четырьмя координатами, а именно: перемещением, скоростью, ускорением и временем. Реальное пространство трехмерно. Оно более удобно для анализа. Рассмотрим фазовое пространство, ограниченное тремя координатными осями — перемещения, скорости и ускорения (рис. 1).

Известно, что ускорения точек более чувствительны к отклонениям колебаний от гармонических. Сопоставим линейную систему с

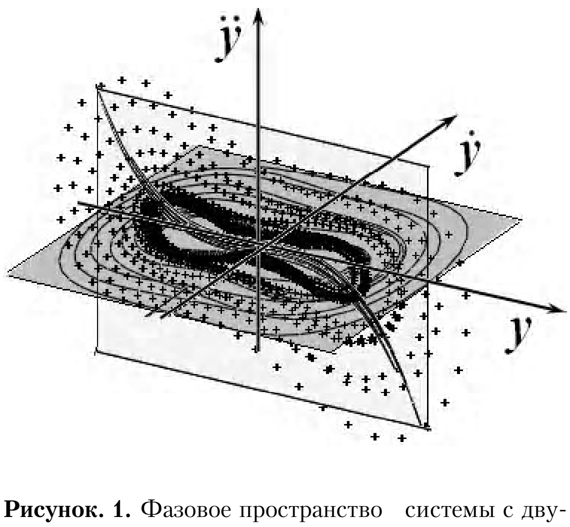

Рисунок. 1. Фазовое пространство системы с двумя потенциальными ямами.

нелинейной симметричной системой с двумя потенциальными ямами.

Заметим, что при некоторых режимах колебаний на частоте внешнего возмущения осциллограммы этих систем подобны и имеют вид моногармонических процессов, а акселерограммы — различны. Так, акселерограммы линейной системы имеют вид гармонического процесса, а несимметричной системы с двумя потенциальными ямами — пилообразный вид (рис. 2).

Возможен и иной выбор параметров фазовых плоскостей [6, 15]. Наибольший интерес представляет фазовая плоскость $(y, \ddot{y})$. Это связано с тем, что энергетические критерии на ней интерпретируются наиболее наглядно. В частности, площадь, ограниченная кривой $\ddot{y}(y)$, равна работе, а обход ее контура против часовой стрелки соответствует энергии, затраченной системой за один цикл колебаний.

Кроме того, зависимость $\ddot{y}(y)$ зеркально симметрична относительно оси $\ddot{y}$ графику изменения упругой характеристики (рис. 2). Именно диаграмма $\ddot{y}(y)$ позволяет установить вид и степень нелинейности системы.

5. Тест нелинейности

5.1 Анализ существующих методов

Первым и наиболее ответственным этапом идентификации моделей динамических систем является выявление и локализация нелинейностей. Произвольный выбор нелинейностей, как правило, не позволяет осуществить удовлетворительную реконструкцию динамических моделей для реальных систем. Как показано, в работе [9] возможны следующие случаи:

1. Восстановленные уравнения локально описывают динамическое поведение исходной системы. При этом реконструированная модель неустойчива в том смысле, что решение полученных уравнений воспроизводит исследуемый процесс только в течение короткого промежутка времени, или в узком диапазоне частот внешнего воздействия.
2. Имеет место неудовлетворительная локальная предсказуемость исследуемого процесса, однако наблюдается их визуальное сходство

с результатами численного моделирования. В этом случае аттрактор реконструированной модели имеет метрические характеристики, близкие к характеристикам исходного аттрактора.

Существующие методы выявления нелинейностей механических систем основаны на применении известных закономерностей их динамического поведения. Общеизвестны следующие признаки, наличие которых позволяет утверждать, что обследуемая система нелинейна:

1) нарушение принципа суперпозиции;
2) наличие в отклике системы гармонических составляющих на частотах, отсутствующих в спектре внешнего возмущения;
3) неизохронность — зависимость частоты колебаний от амплитуды;
4) возможность реализации нескольких режимов колебаний на фиксированной частоте внешнего возмущения.

Заметим, что данные признаки проявляются не во всех динамических системах.

Наибольшее распространение получили методы, основанные на первом из признаков. Так, чтобы выявить нарушение принципа суперпозиции необходимо и достаточно испытать систему при двух различных тестовых сигналах при раздельном и совместном их действии. В случае линейности исследуемой механической системы реакция от суммы двух тестовых возмущений будет равна сумме реакций, полученных при раздельном их действии. Однако для ряда механических систем невозможно варьировать амплитудой внешнего возмущения, т. к. это

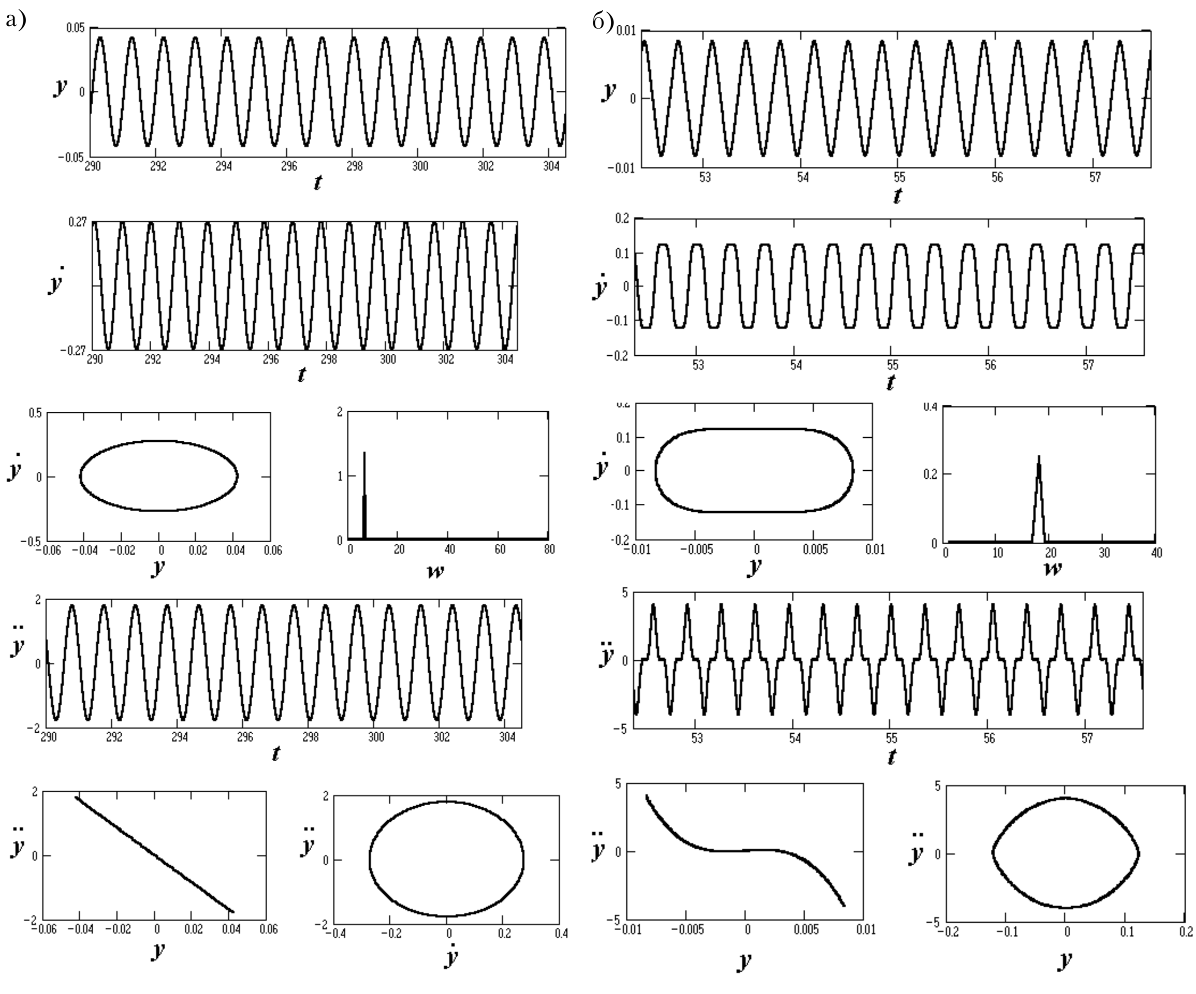

Рисунок. 2. Временные характеристики и фазовые траектории: а) линейной системы; б) нелинейной симметричной системы с двумя потенциальными ямами.

может привести к разрушению или установлению аварийных режимов колебаний. Этот метод весьма громоздок в реализации.

Изохронность колебаний исследуемой системы также не всегда позволяет сделать вывод о линейности характеристики упругой силы. Известно, что среди семейства систем с несимметричной характеристикой упругой силы существуют такие системы, период которых постоянный и не зависит от амплитуды. Например, системы с билинейным и тангенциальным типами характеристик упругой силы [8].

5.2 Применение отображений фазовых траекторий в расширенном пространстве для выявления нелинейности

Предположим, что нам неизвестны функции, описывающие диссипативную и восстанавливающую силы. Первый вопрос состоит в том, чтобы установить линейна система или нет.

Обозначим $\Pi_k = \{y_k, \dot{y}_k, \ddot{y}_k\}, k = 1, \ldots, n$, множество точек, описывающих измеренные значения перемещений, скоростей и ускорений исследуемой системы в моменты времени $t_k = t_0 + kT$, где T — период внешнего возмущения. Если мы представим эти точки в расширенном фазовом пространстве $(y, \dot{y}, \ddot{y})$, то получим набор точек, параметрически связанных по времени t_k (рис. 1).

Предположим, что ошибка измерений отсутствует, тогда

$$m\,\ddot{y}_k + H(\dot{y}_k, y_k) + R(y_k) = c$$

$$m\ddot{\bar{y}}_k + H(\bar{y}_k, \dot{\bar{y}}_k) + R(\bar{y}_k) = c \text{ для}, \qquad (1)$$

где $c = F(t_0) = F(t_k)$ — постоянная величина для всех значений k.

Это означает, что все точки находятся на поверхности, которая может быть описана уравнением $mw + h(u, v) + r(u) = 0$ в (u, v, w) — пространстве. Если функции, описывающие диссипативную и упругую характеристики механической системы $H(y, \dot{y})$ и $R(y)$, линейны, то поверхность в расширенном фазовом пространстве вырождается в плоскость, т. е. все точки множества Π_k должны лежать на плоскости E. Тогда, существуют два действительных числа — a_1 и a_2, такие, что все точки множества Π_k должны удовлетворять условию,

$$m\ddot{y}_k + a_1\dot{y} + a_3 y = c, \text{ для}$$

$$k = 1, \ldots, n, \qquad (2)$$

которое является признаком линейности системы. Изменим амплитуду вынуждающей силы $F(t)$ на $a_3 F(t)$, где действительное положительное число $a_3 > 0$, то соответствующее множество результатов измерений $\Pi_k^{(a_3)}$ удовлетворяет условию $\Pi_k^{(a_3)} = a_3 \Pi_k$, что является вторым признаком линейности системы.

Конечно, на практике измерения имеют некоторую погрешность. Если существуют константы a_1 и a_2, такие, что все измеренные точки лежат на плоскости или в окрестности плоскости, определяемой a_1 и a_2 и c, то мы можем сделать заключение о том, что система (1) линейная или слабо нелинейная.

Спроектируем множество Π_k вдоль плоскости E на плоскости $(y, \dot{y})$, $(y, \ddot{y})$ и $(\dot{y}, \ddot{y})$, тогда в случае линейности функций $H(y, \dot{y})$и $R(y)$, описывающих диссипативную и упругую характеристики механической системы, все точки проекций будут располагаться на прямой линии. Например, на первом шаге мы рассмотрим линейное уравнение

$$\ddot{y} + 0.1\dot{y} + y = 0. \qquad (3)$$

Предположим, что поведение системы характеризовалось устойчивым положением равновесия $y = 0$ для начального момента времени. В момент времени $t = 0$ была приложена внешняя вынуждающая сила $\cos(t)$ и численно была решена соответствующая задача Коши

$$\ddot{y} + 0{,}1\dot{y} + y = \cos(t),$$

$$y(0) = \dot{y}(0) = 0. \qquad (4)$$

В результате было получено множество точек $\Pi_k = \{y_k, \dot{y}_k, \ddot{y}_k\}$, описывающих перемещения, скорости и ускорения в моменты времени $t = t_k = 2\pi k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$. Все эти точки обязательно удовлетворяют отношению

$$\ddot{y} + 0.1\dot{y} + y = 1. \qquad (5)$$

Введем обозначение $\ddot{y} + 0{,}1\dot{y} + y = \cos(t)$, тогда рис. 3 показывает, что все точки множества Π_k лежат на прямой.

Затем рассмотрим систему, описываемую дифференциальным уравнением вида

$$\ddot{y} + 0.1\dot{y} + y + \beta y^3 = 0. \qquad (6)$$

Приложим внешнее возмущение $\cos(t)$ и исследуем задачу начальных значений

$$\ddot{y} + 0{,}1\dot{y} + y + \beta y^3 = \cos(t),\; y(0) = \dot{y}(0) = 0. \quad (7)$$

Получим соответствующее множество точек $\{\Pi^{\beta}{}_k\}$, удовлетворяющих условию

$$\ddot{y}_k + 0.1\dot{y}_k + y_k = 1 - \beta y_k{}^3. \quad (8)$$

Рис. 3 показывает, что для значений параметра $\beta = 0.1$ и $\beta = 0.5$ эти точки не лежат на прямой линии. Отклонения от прямой увеличиваются с увеличением параметра β, их значения уменьшаются с увеличением числа циклов колебаний.

Начальные отклонения отображающих точек от прямой возрастают с увеличением параметра β. Однако с увеличением числа циклов колебаний k отклонения $P(k)$ затухают — стремятся к некоторому постоянному значению.

Заключение

Таким образом, предложенный метод структурной идентификации состоит в построении фазовых траекторий и их отображений в расширенном фазовом пространстве. На основе исследования экспериментальных данных предложено выявление нелинейности структуры уравнений, решение которых имеет адекватное динамическое поведение, моделируя при этом качественную динамическую сложность изучаемого динамического процесса.

Литература

1. Качественная теория динамических систем второго порядка / [Андронов А. А., Леонтович Е. А., Гордон И. И., Майер А. Г.]. — М. : Наука, 1966. – 568 с.
2. Теория бифуркаций динамических систем на плоскости / [Андронов А. А., Леонтович Е. А., Гордон И. И., Майер А. Г.]. — М. : Наука, 1967. – 488 с.
3. Анищенко В. С. Реконструкция динамических систем в приложении к защите информации / В. С. Анищенко, А. Н. Павлов, Н. Б. Янсон // ЖТФ. – 1998. — Т. 68, № 12. – С. 1–8.
4. Баутин Н. Н. Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости / Н. Н. Баутин, Е. А. Леонтович. — М. : Наука, 1976. – 274 с.
5. Биркгоф Дж. Д. Динамические системы / Биркгоф Дж. Д. — М. - Ижевск : НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2002. (переизд. 1941). – 405 с. – ISBN 5-93972-202-4.
6. Казакевич М. И. Фазовые траектории нелинейных динамических систем. Атлас / М. И. Казакевич, В. Е. Волкова. — Днепропетровск : Наука и образование, 2002. — 94 с.
7. Карабутов Н. Н. Структурная идентификация систем: Анализ динамических структур / Карабутов Н. Н. — М. : МГИУ, 2008. — 160 с.

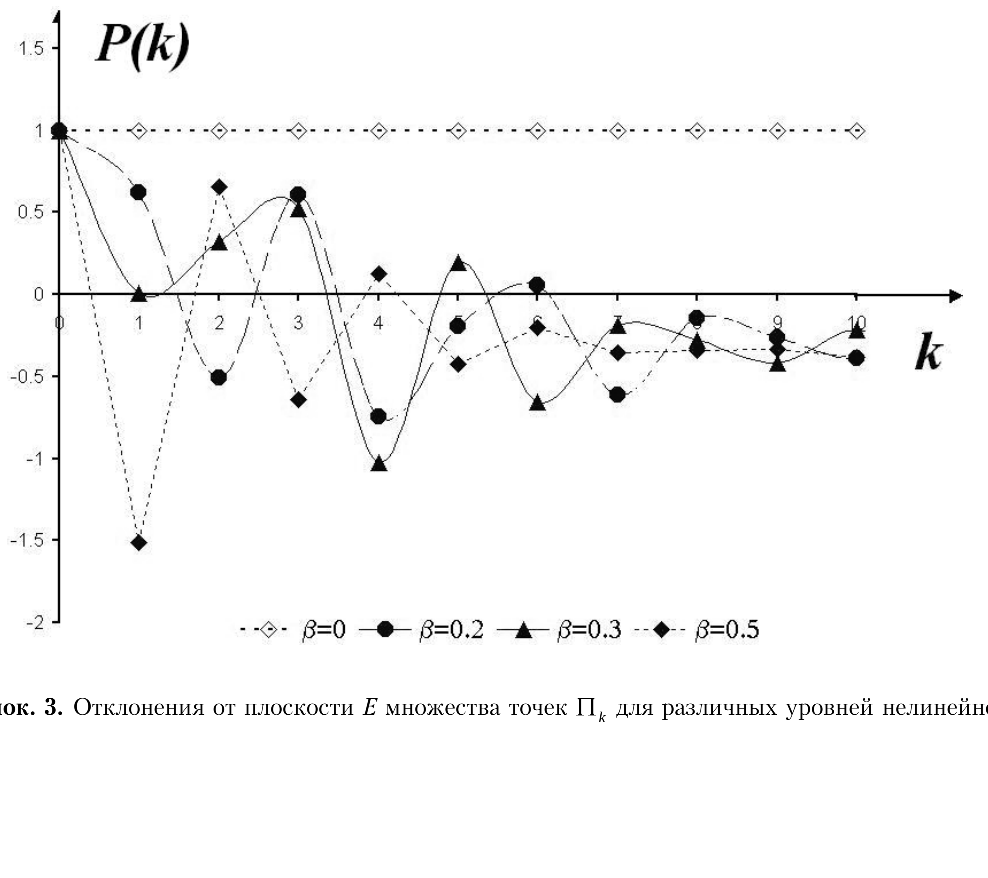

Рисунок. 3. Отклонения от плоскости E множества точек Π_k для различных уровней нелинейности.

8. Кононенко В. О. Методы идентификации механических нелинейных колебательных систем / В. О. Кононенко, Н. П. Плахтиенко. — К. : Наукова думка, 1976. — 114 с.
9. Меньшиков Ю. Л. Идентификация внешних воздействий / Ю. Л. Меньшиков, Н. В. Поляков. — Днепропетровск : Наука и образование, 2009. — 188 с.
10. Никульчев Е. В. Геометрический подход к моделированию нелинейных систем по экспериментальным данным : монография / Никульчев Е. В. — М. : МГУП, 2007. — 162 с. – ISBN 978-5-8122-0926-1.
11. Фершинг Г. Основы аэроупругости / Фершинг Г. — М. : Машиностроение, 1984. — 600 с.
12. Тихонов А. Л. Методы решения некорректных задач / А. Л. Тихонов, В. Я. Арсенин. — М. : Наука, 1979. — 285 с.
13. Kerschen G. Past, present and future of nonlinear system identification in structural dynamics / Kerschen G., Worden K., Vakakis A. F., Golinval J.-C. // Mechanical Systems. Signal Process. — 2006. – Vol. 20 (3). — P. 505—592.
14. Kulisiewics M. Modelling and identification of nonlinear mechanical systems under complex load / Kulisiewics M. — Wroclaw (Poland) : Oficyna wydawnicza Politechniki Wroclawickiej, 2005. — 190 p.
15. Volkova V. E. Qualitative theory and identification of dynamic system with one degree of freedom / V. E. Volkova, K. Schneider // Прикладная механика. — 2005. — Т. 41, № 6. — С. 134—139.

Волкова Виктория Евгеньевна — доцент кафедры «Строительные конструкции» Днепропетровского национального университета железнодорожного транспорта. Научные интересы: прогнозирование динамического поведения элементов конструкций, идентификация динамических моделей механических систем.

Волкова Вікторія Євгенівна – доцент кафедри «Будівельні конструкції» Дніпропетровського національного університету залізничного транспорту. Наукові інтереси: прогнозування динамічної поведінки елементів конструкцій, ідентифікація динамічних моделей механічних систем.

Viktorija E. Volkova – a D. Sc. (Engineering), is an Assistant Professor of the Building Structures Department of the Dnipropetrovsk National University of the Railway Transport. Research interests: forecasting of the dynamic behaviour of structural elements and identification of non-linear dynamic systems.