



ISSN 1814-5566 print

ISSN 1993-3517 online

МЕТАЛЕВІ КОНСТРУКЦІЇ
МЕТАЛЛИЧЕСКИЕ КОНСТРУКЦИИ
METAL CONSTRUCTIONS

2012, ТОМ 18, НОМЕР 4, 245–253

УДК 624.04+624.074

(12)-0275-1

ПРО ЗБІЖНІСТЬ ПРУЖНО-ПЛАСТИЧНОГО РОЗВ'ЯЗКУ ЗАДАЧІ ДЛЯ ЦИЛІНДРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ ПРИ ДІЇ ЗОСЕРЕДЖЕНОЇ СИЛИ

В. П. Мущанов, О. І. Демидов

*Донбаська національна академія будівництва і архітектури,
вул. Державіна, 2, м. Макіївка, Донецька область, Україна, 86123.
E-mail: mvf@dgasa.dn.ua*

Отримана 28 листопада 2012; прийнята 21 грудня 2012.

Анотація. Стаття присвячена застосуванню раніше розробленої методики для визначення пружно-пластичного напружено-деформованого стану оболонки довільної форми на основі теорії малих пружно-пластичних деформацій. Лінеаризація розв'язання задач виконується методом пружних розв'язків. У кожному наближенні застосовується варіаційне рівняння Лагранжа у переміщеннях точок середньої поверхні оболонки в кінцевих різницях. При записі варіаційного рівняння Лагранжа зв'язок між напруженнями і деформаціями представлений у формі закону Гука, але з додатковими членами, що враховують пластичні деформації. Геометричні рівняння прийняті в лінійній постановці у формі співвідношень Коші. Матеріал характеризується відповідною діаграмою розтягу циліндричного зразка, модулем нормальної пружності і коефіцієнтом Пуассона. Кінематичні граничні умови задовольняються точно, а статичні – на вільних від закріплення краях оболонки наближено. Розглядається задача про збіжність пружно-пластичного розв'язання незамкнутої циліндричної оболонки постійної товщини, жорстко затисненої по зовнішньому контуру при дії на неї зосередженої сили, нормальної до середньої поверхні. Збіжність розв'язання цієї задачі ведеться за інтенсивністю дотичних напружень залежно від густоти сіткової зони, а також від кількості точок по товщині оболонки, що приймаються при обчисленні додаткових доданків, які залежать від пластичних деформацій за формулою Сімпсона. Робота присвячена актуальному питанню будівельної механіки оболонок при дії зосереджених сил при пружно-пластичному деформуванні у разі активного процесу навантаження.

Ключові слова: циліндрична оболонка, варіаційно-різницевий метод, метод пружних розв'язків, інтенсивність дотичних напружень, функція пластичності, збіжність пружно-пластичного розв'язку циліндричної оболонки.

О СХОДИМОСТИ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДЛЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ПРИ ДЕЙСТВИИ СОСРЕДОТОЧЕННОЙ СИЛЫ

В. Ф. Мущанов, А. И. Демидов

*Донбасская национальная академия строительства и архитектуры,
ул. Державина, 2, г. Макеевка, Донецкая область, Украина, 86123.
E-mail: mvf@dgasa.dn.ua*

Получена 28 ноября 2012; принята 21 декабря 2012.

Аннотация. Статья посвящена применению ранее разработанной методики по определению упруго-пластического напряженно-деформированного состояния оболочек произвольной формы на основе теории малых упруго-пластических деформаций. Линейаризация решения задач выполняется методом упругих решений. В каждом приближении применяется вариационное уравнение Лагранжа в

перемещениях точек срединной поверхности оболочки в конечных разностях. При записи вариационного уравнения Лагранжа связь между напряжениями и деформациями представлена в форме закона Гука, но с дополнительными членами, учитывающими пластические деформации. Геометрические уравнения приняты в линейной постановке в форме соотношений Коши. Материал характеризуется соответствующей диаграммой растяжения цилиндрического образца, модулем нормальной упругости и коэффициентом Пуассона. Кинематические граничные условия удовлетворяются точно, а статические – на свободных от закрепления краях оболочки приближенно. Рассматривается задача о сходимости упруго-пластического решения незамкнутой цилиндрической оболочки постоянной толщины, жестко защемленной по наружному контуру при действии на нее сосредоточенной силы, нормальной к срединной поверхности. Сходимость решения этой задачи ведется по интенсивности касательных напряжений в зависимости от густоты сеточной области, а также от количества точек по толщине оболочки, принимаемых при вычислении дополнительных слагаемых, зависящих от пластических деформаций по формуле Симпсона. Работа посвящена актуальному вопросу строительной механики оболочек при действии сосредоточенных сил при упруго-пластическом деформировании при активном процессе нагружения.

Ключевые слова: цилиндрическая оболочка, вариационно-разностный метод, метод упругих решений, интенсивность касательных напряжений, функция пластичности, сходимость упруго-пластического решения цилиндрической оболочки.

ABOUT PRECISION OF ELASTOPLASTIC SOLUTION OF PROBLEM FOR CYLINDRICAL SHELL UNDER ACTION OF CONCENTRATED FORCE

Volodymyr Mushchanov, Alexander Demidov

Donbas National Academy of Civil Engineering and Architecture,

2, Derzhavina Str., Makiivka, Donetsk Region, Ukraine, 86123.

E-mail: mvf@dgasa.dn.ua

Received 28 November 2012; accepted 21 December 2012.

Abstract. The article is devoted application of the before developed method on determination of the resiliently-plastic tensely-deformed state of shells of arbitrary form on the basis of theory of small resiliently-plastic deformations. Linearizing of decision of tasks is executed the method of resilient decisions. In every approaching variation equalization of Lagranzha is used in moving of points of middle surface of shell in eventual differences. At the record of variation equalization of Lagranzha connection between tensions and deformations is presented in form law of Guka, but with additional members, taking into account plastic deformations. Geometrical equalizations are accepted in the linear raising in form correlations Koshi. Material is characterized the proper diagram of tension of cylindrical standard, module of normal resiliency and coefficient of Poisson. Kinematics scope terms are satisfied exactly, and static – on the free of fixing edges of shell approximately. A task is examined about precision elastic-plastic decision of the unreserved cylindrical shell of permanent thickness, hardly jammed on an outward contour at operating on it of the concentrated force normal to the middle surface. Precision of decision of this task is conducted on intensity of tangent tensions depending on density of net area, and also from the amount of points after the thickness of shell, additional elements depending on plastic deformations on the formula of Simpsona accepted at a calculation. Work is devoted the present day question of structural mechanics of shells at the action of the concentrated forces at resiliently-plastic deformation at the active process of loading.

Keywords: cylindrical shell, variation and difference method, method of linear approximation, density of tangential stress, function of plasticity. Precision of elastoplastic solution of problem for cylindrical shell.

Постановка задачи

В книге [2] разработана методика численного расчета тонких упруго-пластических оболочек произвольной формы постоянной и переменной толщины при активных процессах нагружения на основе метода упругих решений. В каждом последовательном приближении решение задачи упругости для тонких оболочек выполняется разностным методом на основе вариационного уравнения Ж. Лагранжа. При записи этого уравнения в перемещениях точек u, v, w , точек срединной поверхности физические уравнения приняты в форме обобщенного закона Гука, но с дополнительными членами, зависящими от пластических деформаций:

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^z &= \frac{E}{1-\mu^2} (\varepsilon_{11}^z + \mu \varepsilon_{22}^z + \varepsilon_{11}^{pz}), \\ \sigma_{22}^z &= \frac{E}{1-\mu^2} (\varepsilon_{22}^z + \mu \varepsilon_{11}^z + \varepsilon_{22}^{pz}), \\ \sigma_{12}^z &= \frac{E}{2(1+\mu)} (\gamma^z - \gamma^{pz}), \\ \varepsilon_{33}^z &= -\frac{\mu}{1-\mu} (\varepsilon_{11}^{pz} + \varepsilon_{22}^{pz}) + \frac{1-2\mu}{1-\mu} \varepsilon_{33}^{pz}, \end{aligned} \quad (1)$$

где E – модуль упругости,
 μ – коэффициент Пуассона материала оболочки.

Кроме того, материал оболочки характеризуется диаграммой растяжения цилиндрического образца в виде функции $s = f(\varepsilon)$, которую перестраиваем к виду $S = f(\Gamma)$ по формулам:

$$\Gamma = (1+\mu) \frac{\varepsilon}{\sqrt{3}}, \quad S = \frac{\sigma}{\sqrt{3}}.$$

Дополнительные члены, зависящие от пластических деформаций в уравнениях (1), представлены в виде:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11}^{pz} &= \omega (\mu \varepsilon_{33}^z - (1-\mu) \varepsilon_{11}^z), \\ \varepsilon_{22}^{pz} &= \omega (\mu \varepsilon_{33}^z - (1-\mu) \varepsilon_{22}^z), \\ \gamma^{pz} &= \omega \gamma^z, \quad \varepsilon_{33}^{pz} = \omega \varepsilon_{33}^z. \end{aligned} \quad (2)$$

Значения пластических деформаций уточняются от приближения к приближению в виде дополнительных нагрузок к внешней нагрузке.

Эти дополнительные нагрузки вычисляем по формуле Симпсона путем численного интегрирования, принимая по толщине оболочки определенное количество точек, обеспечивающих требуемую точность решения задачи пластичности. При этом сохраняется матрица системы разностных уравнений. Это дает возможность решать систему уравнений с использованием обращения матрицы.

Основные относительные продольные деформации $\varepsilon_{11}^z, \varepsilon_{22}^z$ по направлению координатных линий α_1 и α_2 и деформации сдвига γ^z приняты в виде геометрически линейных соотношений, связывающих с перемещениями u, v, w , точек срединной поверхности, по книге В. В. Новожилова [4].

Компоненты деватора деформаций $e_{ii}^z = \varepsilon_{ii}^z - \varepsilon_0^z$, ($i = 1, 2, 3$), а средняя деформация:

$$\varepsilon_0^z = \frac{1}{3} (\varepsilon_{11}^z + \varepsilon_{22}^z + \varepsilon_{33}^z).$$

Относительная деформация по направлению нормали к срединной поверхности

$$\varepsilon_{33}^z = -\frac{[3\mu + \omega(1-2\mu)](\varepsilon_{11}^z + \varepsilon_{22}^z)}{3(1-\mu) - 2\omega(1-2\mu)}. \quad (3)$$

Индекс z в формулах (1, 2, 3) определяет положение произвольной точки по толщине оболочки.

Функция пластичности в формулах (2) А. А. Ильюшина [1] представляет такое выражение:

$$\omega = 1 - \frac{G_s}{G}. \quad (4)$$

Секущий модуль G_s и модуль сдвига G находим по диаграмме растяжения цилиндрического образца из соотношений:

$$2G_s = S\Gamma^{-1}, \quad 2G = E(1 + \mu)^{-1}. \quad (5)$$

Интенсивность касательных напряжений S и деформаций сдвига Γ при плоском напряженном состоянии находим по формулам [3, 5, 7]:

$$\begin{aligned} S^z &= \sqrt{\frac{1}{3} [(\sigma_{11}^z)^2 + (\sigma_{11}^z)^2 - \sigma_{11}^z \cdot \sigma_{22}^z + 3(\sigma_{12}^z)^2]}, \\ \Gamma^z &= \sqrt{\frac{1}{6} [(\varepsilon_{11}^z - \varepsilon_{11}^z)^2 + (\varepsilon_{11}^z - \varepsilon_{11}^z)^2 + (\varepsilon_{11}^z - \varepsilon_{11}^z)^2 + \frac{3}{2} (\gamma^z)^2]}. \end{aligned} \quad (6)$$

Это даёт возможность по найденным перемещениям u, v, w , точек срединной поверхности определить деформации $\varepsilon_{11}^z, \varepsilon_{22}^z$ и γ^z , а по формуле (6) найти интенсивность деформаций сдвига. По интенсивности деформаций сдвига, используя диаграмму $S = f(\Gamma)$, найдем секущий модуль G_s (5), функцию пластичности (4) и уточняем дополнительные члены (2) в каждом приближении. Процесс последовательных приближений продолжается до тех пор, пока функция пластичности в двух последовательных приближениях не будет отличаться на сколь угодно малую величину δ , т. е.

$$\frac{\omega_n - \omega_{n-1}}{\omega_n} \leq \delta$$

Воспользуемся этой методикой для решения задачи о сходимости упруго-пластического решения задачи для незамкнутой цилиндрической

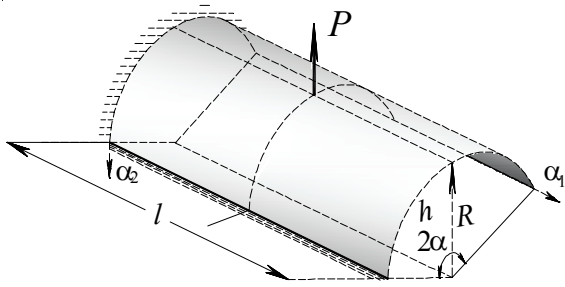
оболочки жестко защемленной по наружному контуру при действии сосредоточенной силы нормальной к её срединной поверхности.

Пример решения задачи

Рассмотрим незамкнутую цилиндрическую оболочку, жестко защемленную по наружному контуру при действии сосредоточенной силы нормальной к её срединной поверхности (рис. 1а).

При расчете приняты такие исходные данные: толщина оболочки $h = 0,02$ м, $R = 0,6$ м, длина оболочки $l = 0,5$ м, угол $\alpha = \pi / 3$. Коэффициент Пуассона $\mu = 0,3$, модуль упругости $E = 1,95 \cdot 10^5$ МПа. Оболочка изготовлена из стали ЭИ-195. Диаграмма растяжения цилиндрического образца из такой стали представлена на рис. 2.

а)



б)

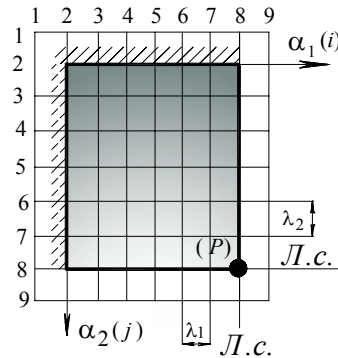


Рисунок 1. Цилиндрическая оболочка при действии сосредоточенной силы и схема нанесения сеточной области на 1/4 её части.

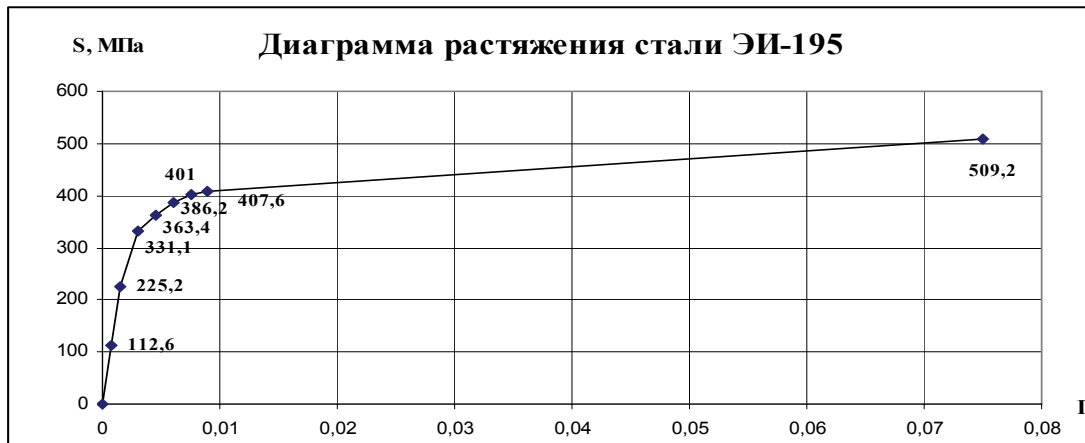


Рисунок 2. Диаграмма растяжения стали ЭИ-195.

С целью получения реальных результатов расчет оболочки ведется при сеточных областях с размерами 9×9 , 15×15 , 27×27 узлов на $\frac{1}{4}$ её части. Схема нанесения сетки показана на рис. 16. Сила $P = 0,3$ МН приложена в узле (8,8).

В таблице 1 представлены значения интенсивности касательных напряжений при решении упруго-пластической задачи при трех значениях густоты сеточной области. Из этой таблицы видно, что по мере сгущения сетки в узле (8, 8), где наиболее развиты пластические деформации при $z = -h / 2$ при сетке размером 15×15 узлов интенсивность касательных напряжений получена $S(-h / 2) = 416,77$ МПа, а при сетке 27×27 – эти же напряжения оказались $S(-h / 2) = 437,55$ МПа. Уточнение составило 4,99 %. В этом же узле при $z = h / 2$ при тех же значениях густоты сетки результаты отличаются на 4,93 %. На рис. 3, 4, 5 дано наглядное пред-

ставление сходимости численного решения упруго-пластической задачи в зависимости от густоты сеточной области.

Кроме того, проведен численный эксперимент по оценке сходимости решения упруго-пластической задачи в зависимости от количества точек, принимаемых по толщине h оболочки, для вычисления дополнительных слагаемых, входящих в правые части системы линейных алгебраических уравнений в качестве дополнительных нагрузок, которые вычислялись путем численного интегрирования по Симпсону в каждом последовательном приближении. В таблице 2 и на рис. 6 показаны полученные результаты для значений интенсивности касательных напряжений при самой густой сеточной области, т. е. 27×27 при количестве точек по толщине оболочки h 3, 5 и 7, соответственно, при $z = \pm h / 2$, $z = 0$ в тех же узлах, что и в

Таблица 1. Упруго-пластическое решение

i	S(-h / 2), МПа			S(0), МПа			S(h / 2), МПа		
	Сетка			Сетка			Сетка		
	9×9	15×15	27×27	9×9	15×15	27×27	9×9	15×15	27×27
2	65,58	71,00	72,35	5,33	8,22	9,29	76,24	87,44	90,92
3	48,56	50,02	50,47	4,37	5,79	6,26	53,83	58,75	60,45
4	61,82	61,47	61,55	3,31	1,91	2,00	64,07	64,64	65,37
5	88,95	89,54	88,94	19,80	15,06	13,97	113,71	108,60	106,86
6	125,40	141,21	136,56	52,02	40,84	38,02	215,75	212,17	202,32
7	194,47	268,10	286,86	109,79	88,93	83,58	323,59	340,91	344,96
8	389,30	416,77	437,55	192,65	163,33	152,64	407,91	420,64	441,38

S(-h/2) Интенсивность касательных напряжений S(-h/2)

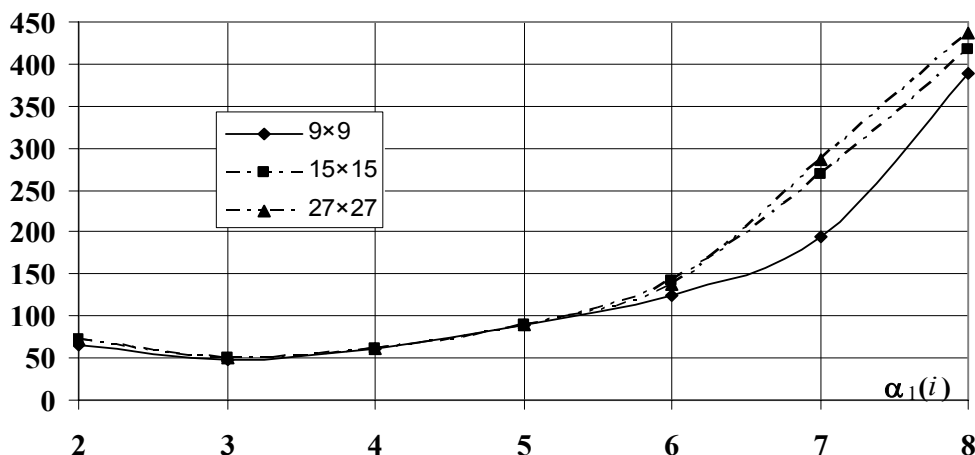


Рисунок 3. Зависимость интенсивности касательных напряжений S(-h / 2) от густоты сеточной области.

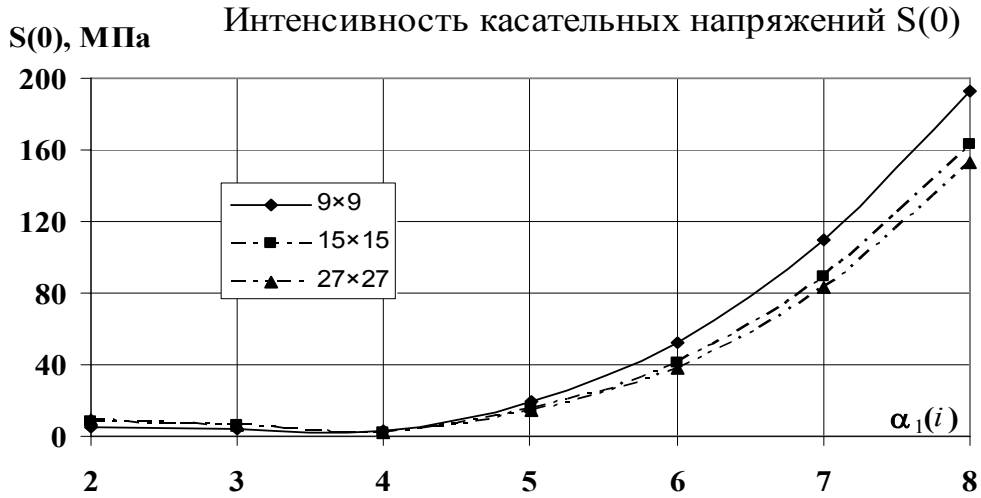
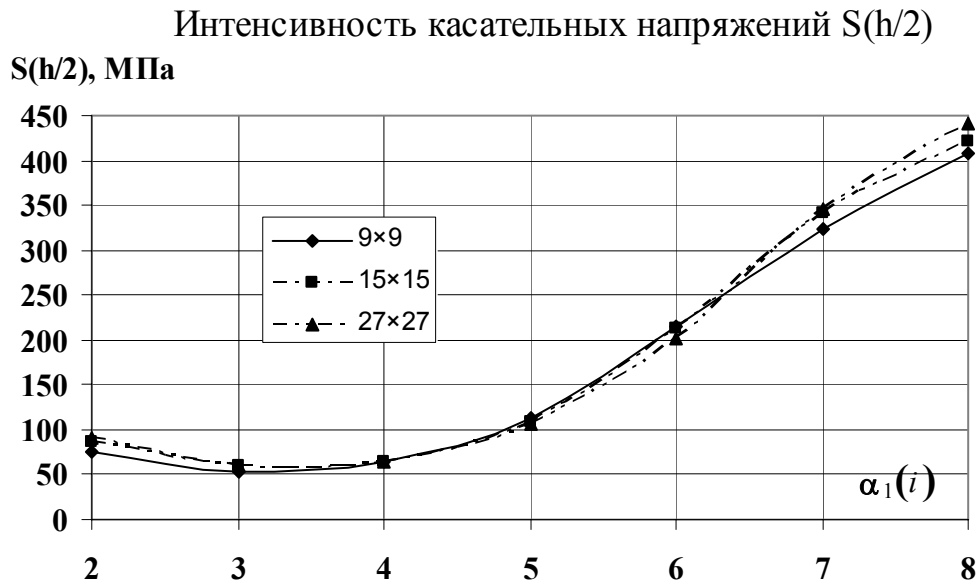
Рисунок 4. Зависимость интенсивности касательных напряжений $S(0)$ от густоты сеточной области.Рисунок 5. Зависимость интенсивности касательных напряжений $S(h/2)$ от густоты сеточной области.

Таблица 2. Интенсивность касательных напряжений МПа

$j=8$	$S(-h/2)$ при количестве точек по толщине оболочки h			$S(0)$ при количестве точек по толщине оболочки h			$S(h/2)$ при количестве точек по толщине оболочки h			
	i	3	5	7	3	5	7	3	5	7
2		72,35	72,33	72,33	9,29	8,75	8,77	90,92	89,83	89,86
3		50,47	49,80	49,85	6,26	5,76	5,78	60,45	59,11	59,17
4		61,55	58,04	58,23	2,00	2,61	2,56	65,37	62,52	62,65
5		88,94	79,66	80,15	13,97	15,14	15,08	106,86	100,45	100,75
6		136,56	112,86	114,01	38,02	38,48	38,46	202,32	182,53	183,41
7		286,86	231,29	233,65	83,58	79,11	80,15	344,96	315,11	318,46
8		437,55	421,07	422,72	152,64	161,66	160,12	441,38	425,36	426,96

предыдущих случаях. Сравнивая эти результаты, можно сделать вывод, что величины интенсивности касательных напряжений от выбора количества точек по толщине оболочки зависят в некоторой степени. Так, интенсивность напряжений $S(-h/2) = 437,55$ МПа при трех точках, а $S(-h/2) = 421,07$ МПа при пяти точках. Уточнение составило всего 3,21 %. Результаты же при семи и пяти точках практически совпадают. Такая же картина наблюдается и в других узлах, где имеют место пластические области.

В таблице 3 приведено поле интенсивности касательных напряжений в узлах нижней световой поверхности, т. е. при $z = -h/2$ при сетке 27×27 узлов при семи точках принятых по толщине оболочки. На основании этой таблицы на рис. 7 построены соответствующие изолинии, отделяющие области, отличающиеся на-

пряжениями с шагом 50 МПа. На этом рис. видно, что пластическая зона расположена в окрестности узла (8,8), где приложена сосредоточенная сила P , величина которой остается неизменной, однако при решении задачи на действие сосредоточенной силы она заменялась распределенной нагрузкой по площади ячейки сеточной области размером $\lambda_1 \times \lambda_2$ при каждом значении размера сеточной области. Ясно, что чем гуще сетка, тем ближе нагрузка проявляет характер сосредоточенной. Это и отображало локальный характер действующей силы. По мере удаления от точки приложения нагрузки напряжения достаточно быстро затухают.

Таким образом, разработанная методика позволяет рассматривать решение упруго-пластических задач при действии сосредоточенных нагрузок и оценке несущей способности оболочек.

Интенсивность касательных напряжений $S(-h/2)$ (Сетка 27 на 27 узлов)

$S(-h/2)$, МПа

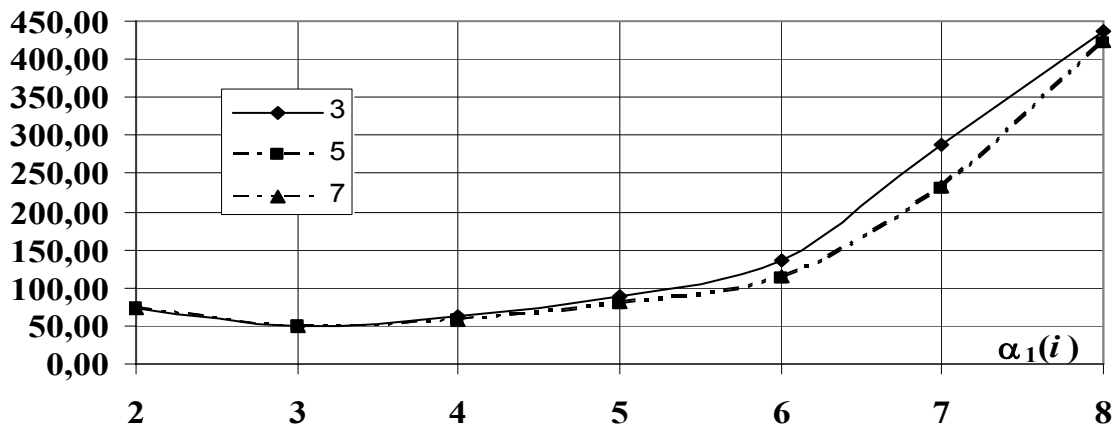


Рисунок 6. Зависимость интенсивности касательных напряжений $S(-h/2)$ от выбора количества точек по толщине h оболочки при вычислении дополнительных слагаемых, связанных с пластическими деформациями.

Таблица 3. Интенсивность касательных напряжений $S(-h/2)$. Сетка 27×27 узлов. Точек по толщине – 7.

	2	3	4	5	6	7	8
2	0	3,0717	15,2481	6,603	22,9017	57,0208	72,3259
3	0,3903	8,7591	19,3009	41,9196	57,3128	56,1251	49,8475
4	15,6682	17,7619	39,7545	65,9222	82,0551	73,4898	58,234
5	29,3361	29,6362	64,8086	91,5092	105,7475	96,2723	80,1453
6	38,8131	42,8309	90,5395	118,5632	129,5951	122,3927	114,0122
7	44,2104	53,2295	110,4243	140,7191	150,0631	162,1507	233,6547
8	45,9467	57,1947	117,9937	149,5204	159,3528	216,8493	422,7159

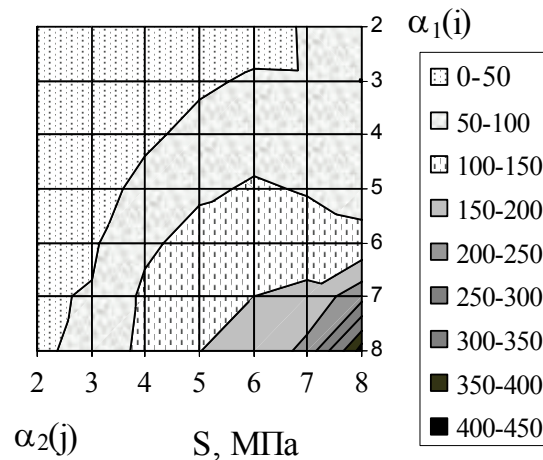


Рисунок 7. Изолинии интенсивности касательных напряжений $S(-h/2)$ на нижней световой поверхности.

Литература

1. Ильюшин, А. А. Сопротивление материалов [Текст] / А. А. Ильюшин, В. С. Ленский. – М. : Физматгиз, 1959. – 372 с.
2. Избранные методы строительной механики в расчетах пространственных конструкций [Текст] / Под общей ред. д.т.н., проф. В. Ф. Мущанова. – Макеевка : ДонНАСА, 2006. – 292 с.
3. Мущанов, В. Ф. Линейные и нелинейные задачи теории упругости в расчетах тонкостенных конструкций [Текст] / В. Ф. Мущанов, А. И. Демидов. – Макеевка : ДонГАСА, 2000. – 182 с.
4. Мущанов, В. Ф. Упруго-пластическое состояние круговой тороидальной оболочки с прямоугольным отверстием [Текст] / В. Ф. Мущанов, А. И. Демидов // Современное промышленное и гражданское строительство. – 2007. – Том 3, № 2. – С. 67–77.
5. Демидов, А. И. Упруго-пластическое напряженно-деформированное состояние тонкой незамкнутой тороидальной оболочки [Текст] / А. И. Демидов // Современное промышленное и гражданское строительство. – 2006. – Том 2, № 4. – С. 163–176.
6. Мущанов, В. Ф. Упруго-пластическое напряженное состояние круговых конических оболочек переменной и постоянной толщины с отверстием [Текст] / В. Ф. Мущанов, А. И. Демидов // Металлические конструкции. – 2008. – Том 14, Номер 3. – С. 125–142.
7. Новожилов, В. В. Теория тонких оболочек [Текст] / В. В. Новожилов. – Ленинград : Судпромгиз, 1962. – 432 с.
8. Шевченко, Ю. Н. Методы расчета оболочек. Теория упруго-пластических оболочек при неизо-термических процессах нагружения [Текст] / Ю. Н. Шевченко, И. В. Прохоренко. – Киев : Наук. думка, 1981. – 296 с.

References

1. Iliushin, A. A.; Lenskii, V. S. Structural resistance. Moscow: Fizmatgiz, 1959. 372 p. (in Russian)
2. Select methods of structural building mechanics in analysis of space structures. Edited by V. F. Mushchanov. Makiivka: DonNASEA, 2006. 292 p. (in Russian)
3. Muschanov, V. F.; Demidov, A. I. Linear and non-linear problems of elasticity theory in analysis of thin wall design. Makiivka: DonNASEA, 2000. 182 p. (in Russian)
4. Mushchanov, V. F.; Demidov, A. I. An Elastic-Plastic State of a Circle Toroidal Shell with a Rectangular Opening. In: *Modern Industrial And Civil Construction*, 2007, Том 3, Number 2, p. 67–77. (in Russian)
5. Demidov, A. I. An Elastic-Plastic Stressed-Deformed State of a Thin Unclosed Toroidal Shell. In: *Modern Industrial And Civil Construction*, 2006, Том 2, Number 4, p. 163–176. (in Russian)
6. Muschanov, V. F.; Demidov, A. I. Plasto-elastic stressed state circular conical shell structure of a tapered and constant thickness with a hole. In: *Metal Constructions*, 2008, Том 14, Number 3, p. 125–142. (in Russian)
7. Novozhilov, V. V. Theory of thin shell. Leningrad: Sudpromgiz, 1962. 432 p. (in Russian)
8. Shevchenko, Yu. N.; Prohorenko, I. V. Methods of shell analysis. Theory of elasto-plastic shells during nonisothermal process of loading. Kyiv: Scientific Thought, 1981. 296 p. (in Russian)
9. Sen, S. K.; Gould, P. L. Criteria for finite element discrimination of shells of revolution. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1973, Volume 6, Issue 2, p. 265–274.
10. Strang, G. Linear algebra and its applications. New York: Academic Press, 1976. 456 p.
11. Kolarov, D.; Boncheva, N. Mechanics of plastic media. Sofia: Publishing house of Bulgarian Academy of Science, 1975. 510 p. (in Russian)

9. Sen, S. K. Criteria for finite element discrimination of shells of revolution [Текст] / S. K. Sen, P. L. Gould // International Journal for Numerical Methods in Engineering. – 1973. – Volume 6, Issue 2. – P. 265–274.
10. Strang, G. Linear algebra and its applications [Текст] / G. Strang. – New York : Academic Press, 1976. – 456 p.
11. Коларов, Д. Механика на пластичните среди [Текст] / Д. Коларов, Н. Бончева. – София : Издательство на Българската Академия на науките, 1975. – 510 с.

Мущанов Володимир Пилипович – д. т. н., професор, завідувач кафедри теоретичної і прикладної механіки, проректор з наукової роботи Донбаської національної академії будівництва і архітектури. Член міжнародної організації «Інститут цивільних інженерів» та міжнародної асоціації «Просторові конструкції», академік Української Академії наук, Академії будівництва України, член-кореспондент Академії архітектури України. Наукові інтереси: теорія надійності, розрахунок, проектування та технічна діагностика просторових металевих конструкцій.

Демидов Олександр Іванович – к. т. н., доцент кафедри теоретичної і прикладної механіки Донбаської національної академії будівництва і архітектури. Наукові інтереси: фізичні лінійні і нелінійні задачі теорії тонких оболонок постійної і змінної товщини з отворами.

Мущанов Владимир Филипович – д. т. н., профессор; заведующий кафедрой теоретической и прикладной механики, проректор по научной работе Донбасской национальной академии строительства и архитектуры. Член международной организации «Институт гражданских инженеров» и международной организации «Пространственные конструкции», академик Украинской Академии наук, Академии строительства Украины, член-корреспондент Академии архитектуры Украины. Научные интересы: теория надежности, расчет, проектирование и техническая диагностика пространственных металлических конструкций.

Демидов Александр Иванович – к. т. н., доцент кафедры теоретической и прикладной механики Донбасской национальной академии строительства и архитектуры. Научные интересы: физически линейные и нелинейные задачи теории тонких оболочек постоянной и переменной толщины с отверстиями.

Volodymyr Mushchanov – DSc (Eng.), Professor; Head of the Theoretical and Applied Mechanics Department, vice-rector on the scientific activity of the Donbas National Academy of Civil Engineering and Architecture. A member of the international organization «Institute of Civil Engineer» and international organization of «Spatial Structures», academician of the Ukrainian Academy of Science and Ukrainian Building Academy, Corresponding Member of Ukrainian Academy of Architecture. The academician of the Engineering Academy in Ukraine. His research interests include the reliability theory, analyses, designing and engineering diagnostics of spatial metal structures.

Alexander Demidov – PhD (Eng.), Associate Professor; Theoretical and Applied Mechanics Department of Donbas National Academy of Civil Engineering and Architecture. Scientific interests: physically linear and nonlinear tasks of theory of thin shells of permanent and variable thickness with openings.