



ISSN 1814-5566 print

ISSN 1993-3517 online

МЕТАЛЕВІ КОНСТРУКЦІЇ
МЕТАЛЛИЧЕСКИЕ КОНСТРУКЦИИ
METAL CONSTRUCTIONS

2014, ТОМ 20, НОМЕР 4, 221–234

УДК 539.374

(14)-0321-1

ДО ПИТАННЯ ПРО ПРИДАТНІСТЬ ТЕОРІЇ МАЛИХ ПРУЖНО-ПЛАСТИЧНИХ ДЕФОРМАЦІЙ ПРИ РОЗРАХУНКУ ОБОЛОНОК ПРИ НЕПРУЖНІЙ ПОВЕДІНЦІ МАТЕРІАЛУ

О. І. Демидов

*Донбаська національна академія будівництва і архітектури,
2, вул. Державіна, м. Макіївка, Донецька область, Україна, 86123.
Отримана 12 листопада 2014; прийнята 26 грудня 2014.*

Анотація. Робота присвячена перевірці правомочності застосування раніше розробленої методики по визначенню пружно-пластичного напружено-деформованого стану (НДС) оболонок довільної форми на основі теорії малих пружно-пластичних деформацій при лінеаризації розв'язання задач методом пружних розв'язків. У кожному послідовному наближенні при розв'язанні пружної задачі використовується варіаційне рівняння Лагранжа у переміщеннях точок серединної поверхні оболонки в кінцевих різниці. При запису варіаційного рівняння Лагранжа зв'язок між напруженнями і деформаціями представлено у формі закону Гука, але з додатковими членами, що враховують пластичні деформації. Геометричні рівняння прийнято в лінійній постановці у формі співвідношень Коші. Матеріал характеризується відповідною діаграмою розтягу циліндричного зразка, модулем нормальної пружності і коефіцієнтом Пуассона. Кінематичні граничні умови задовільняються точно, а статичні – на вільних від закріплення краях оболонки наближено. Розглядається задача про правомочність застосування теорії малих пружно-пластичних деформацій і методу пружних розв'язків для незамкнутої циліндричної оболонки постійної товщини, жорстко зацмеленої в окружному напрямку і шарнірно закріпленої у меридіальному напрямку з великим шарнірно закріпленням отвором при дії на неї рівномірно розподіленого нормального до серединної поверхні навантаження. Це підтверджується шляхом побудови траєкторії деформування у тривимірному підпросторі п'ятивимірного векторного простору А. А. Ільюшина для елементів оболонки, що знаходиться у пружно-пластичному стані. Для цього розрахунок даної оболонки здійснено при трьох значеннях навантаження, що дозволяє побудувати траєкторію деформування. Робота присвячена актуальному питанню будівельної механіки оболонок при дії навантаження при пружно-пластичному деформуванні у разі активного процесу навантаження.

Ключові слова: циліндрична оболонка, варіаційно-різницевий метод, метод пружних розв'язків, інтенсивність дотичних напружень, функція пластичності, траєкторії деформування.

К ВОПРОСУ О ПРИМЕНИМОСТИ ТЕОРИИ МАЛЫХ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКИХ ДЕФОРМАЦИЙ ПРИ РАСЧЕТЕ ОБОЛОЧЕК ПРИ НЕУПРУГОМ ПОВЕДЕНИИ МАТЕРИАЛА

А. И. Демидов

*Донбасская национальная академия строительства и архитектуры,
2, ул. Державина, г. Макеевка, Донецкая область, Украина, 86123.
Получена 12 ноября 2014; принята 26 декабря 2014.*

Аннотация. Работа посвящена проверке правомочности применения ранее разработанной методики по определению упруго-пластического напряженно-деформированного состояния (НДС) оболочек произвольной формы на основе теории малых упруго-пластических деформаций при линейаризации решения задач методом упругих решений. В каждом последовательном приближении при решении упругой

задачи применяется вариационное уравнение Лагранжа в перемещениях точек срединной поверхности оболочки в конечных разностях. При записи вариационного уравнения Лагранжа связь между напряжениями и деформациями представлена в форме закона Гука, но с дополнительными членами, учитывающими пластические деформации. Геометрические уравнения приняты в линейной постановке в форме соотношений Коши. Материал характеризуется соответствующей диаграммой растяжения цилиндрического образца, модулем нормальной упругости и коэффициентом Пуассона. Кинематические граничные условия удовлетворяются точно, а статические – на свободных от закрепления краях оболочки приближенно. Рассматривается задача о правомочности применения теории малых упруго-пластических деформаций и метода упругих решений для незамкнутой цилиндрической оболочки постоянной толщины, жестко заземленной в окружном направлении и шарнирно закрепленной в меридиональном направлении с большим шарнирно закрепленным отверстием при действии на нее равномерно распределенной нормальной к срединной поверхности нагрузки. Это подтверждается путем построения траектории деформирования в трехмерном подпространстве пятимерного векторного пространства А. А. Ильюшина для элементов оболочки, находящихся в упруго-пластическом состоянии. Для этого расчет данной оболочки осуществлен при трех значениях нагрузки, что позволяет построить траекторию деформирования. Работа посвящена актуальному вопросу строительной механики оболочек при действии нагрузки при упруго-пластическом деформировании при активном процессе нагружения.

Ключевые слова: цилиндрическая оболочка, вариационно-разностный метод, метод упругих решений, интенсивность касательных напряжений, функция пластичности, траектории деформирования.

REVISTING THE PERTINENCE OF THEORY OF LITTLE ELASTO-PLASTIC STRAIN WHEN CALCULATING SHELLS IN THE PROCESS OF INELASTIC BEHAVIOR OF MATERIAL

Alexandr Demidov

*Donbas National Academy of Civil Engineering and Architecture,
2, Derzhavina Str., Makiyivka, Donetsk Region, Ukraine, 86123.
Received 12 November 2014; accepted 26 Desember 2014.*

Abstract. The article is devoted to verification of competence of application of the before developed method on determination of the resiliently-plastic tensely-deformed state of shells of arbitrary form on the basis of theory of small resiliently-plastic deformations at linear approximations of decision of tasks the method of resilient decisions. In every progressive approximation at the decision of resilient task, the variation equalization of Lagranzha is used in moving of points of middle surface of shell in eventual differences. At the record of variation equalization of Lagranzha connection between tensions and deformations is presented in form of Hookers law, but with additional members, taking into account plastic deformations. Geometrical equalizations are accepted in the linear raising in form of Cauchy relations. Material is characterized by the proper diagram of tension of cylindrical standard, module of normal resiliency and Poisson ratio. Kinematics scope terms are satisfied exactly, and static, on the free of fixing edges of shell, is approximately. The task about the competence of application of method of resilient decisions for the unreserved cylindrical shell of permanent thickness, hardly jammed in circuitous direction and joint fastened in meridional direction with the large joint fastened opening at operating on it of the evenly distributed normal to the middle surface loading, is considered. It is confirmed by the construction of trajectory of deformation in three-dimensional subspace of the fivemeasured vector space of A. A. Il'yushina for the elements of shell being in the resiliently-plastic state. For this purpose the calculation of this shell is carried out at three values of loading, that allows to build the trajectory of deformation. Work is devoted to the up-to-date question of structural mechanics of shells at the action of loading at resiliently-plastic deformation at the active process of loading.

Keywords: barrel shell, variation and difference method, method of linear approximation, density of shear stress, plasticity function, strain path.

Постановка задачи

В книге [2] разработана методика численного расчета тонких упруго-пластических оболочек произвольной формы постоянной и переменной толщины при активных процессах нагружения на основе метода упругих решений. В каждом последовательном приближении решение задачи упругости для тонких оболочек выполняется разностным методом на основе вариационного уравнения Ж. Лагранжа. При записи этого уравнения в перемещениях точек u, v, w , точек срединной поверхности физические уравнения приняты в форме обобщенного закона Гука, но с дополнительными членами, зависящими от пластических деформаций:

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^z &= \frac{E}{1-\mu^2} (\varepsilon_{11}^z + \mu \varepsilon_{22}^z + \varepsilon_{11}^{pz}), \\ \sigma_{22}^z &= \frac{E}{1-\mu^2} (\varepsilon_{22}^z + \mu \varepsilon_{11}^z + \varepsilon_{22}^{pz}), \\ \sigma_{12}^z &= \frac{E}{2(1+\mu)} (\gamma^z - \gamma^{pz}), \\ \varepsilon_{33}^z &= \frac{\mu}{1-\mu} (\varepsilon_{11}^{pz} + \varepsilon_{22}^{pz}) + \frac{1-2\mu}{1-\mu} \varepsilon_{33}^{pz}, \end{aligned} \quad (1)$$

где E – модуль упругости, μ – коэффициент Пуассона материала оболочки. Кроме того, материал оболочки характеризуется диаграммой растяжения цилиндрического образца в виде функции $\sigma = f(\varepsilon)$, которая перестраивается к виду $S = f(\Gamma)$ по формулам:

$$\begin{aligned} \Gamma &= (1+\mu) \frac{\varepsilon}{\sqrt{3}}, \\ S &= \frac{\sigma}{\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

Дополнительные члены, зависящие от пластических деформаций в уравнениях (1), представлены в виде:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11}^{pz} &= \omega (\mu \varepsilon_{33}^z - (1-\mu) \varepsilon_{11}^z), \\ \varepsilon_{22}^{pz} &= \omega (\mu \varepsilon_{33}^z - (1-\mu) \varepsilon_{22}^z), \\ \gamma^{pz} &= \omega \gamma^z, \\ \varepsilon_{33}^{pz} &= \omega \varepsilon_{33}^z. \end{aligned} \quad (2)$$

Значения пластических деформаций уточняются от приближения к приближению в виде дополнительных слагаемых к внешней нагрузке. Эти дополнительные слагаемые вычисляем по

формуле Симпсона путем численного интегрирования, принимая по толщине оболочки определенное количество точек, обеспечивающих требуемую точность решения задачи пластичности. При этом сохраняется матрица системы разностных уравнений. Это дает возможность решать систему уравнений с использованием обращения матрицы.

Основные относительные продольные деформации $\varepsilon_{11}^z, \varepsilon_{22}^z$ по направлению координатных линий α_1 и α_2 , и деформации сдвига γ^z приняты в виде геометрически линейных соотношений, связывающих с перемещениями u, v, w , точек срединной поверхности, по книге В. В. Новожилова [4].

Компоненты девиатора деформаций $e_{ii}^z = \varepsilon_{ii}^z - \varepsilon_0^z, (i = 1,2,3)$, а средняя деформация: $\varepsilon_0^z = \frac{1}{3} (\varepsilon_{11}^z + \varepsilon_{22}^z + \varepsilon_{33}^z)$.

Относительная деформация по направлению нормали к срединной поверхности

$$\varepsilon_{33}^z = -\frac{[3\mu + \omega(1-2\mu)](\varepsilon_{11}^z + \varepsilon_{22}^z)}{3(1-\mu) - 2\omega(1-2\mu)}. \quad (3)$$

Индекс z в формулах (1, 2, 3) определяет положение произвольной точки по толщине оболочки.

Функция пластичности в формулах (2) А. А. Ильющина [1] представляет такое выражение:

$$\omega = 1 - \frac{G_s}{G}. \quad (4)$$

Секущий модуль G_s и модуль сдвига G находим по диаграмме растяжения цилиндрического образца из соотношений:

$$2G_s = S\Gamma^{-1}, 2G = E(1+\mu)^{-1}. \quad (5)$$

Интенсивность касательных напряжений S и деформаций сдвига Γ при плоском напряженном состоянии находим по формулам [3, 5, 7, 8]:

$$\begin{aligned} S^z &= \sqrt{\frac{1}{3} [(\sigma_{11}^z)^2 + (\sigma_{22}^z)^2 - \sigma_{11}^z \cdot \sigma_{22}^z + 3(\sigma_{12}^z)^2]}, \\ \Gamma^z &= \sqrt{\frac{1}{6} [(\varepsilon_{11}^z - \varepsilon_{22}^z)^2 + (\varepsilon_{11}^z + \varepsilon_{22}^z)^2 + (\varepsilon_{11}^z - \varepsilon_{11}^z)^2 + \frac{3}{2}(\gamma^z)^2]}. \end{aligned} \quad (6)$$

Это даёт возможность по найденным перемещениям u, v, w , точек срединной поверхности

определить деформации ε_{11}^z , ε_{22}^z и γ^z , а по формуле (6) найти интенсивность деформаций сдвига. По интенсивности деформаций сдвига, используя диаграмму $S=f(\Gamma)$, найдем секущий модуль G_s (5), функцию пластичности (4) и уточняем дополнительные члены (2) в каждом приближении. Процесс последовательных приближений продолжается до тех пор, пока функция пластичности в двух последовательных приближениях не будет отличаться на сколь угодно малую величину δ , т. е.:

$$\frac{\omega_n - \omega_{n-1}}{\omega_n} \leq \delta.$$

Вспользуемся этой методикой для решения задачи о сходимости упруго-пластического решения задачи для незамкнутой цилиндрической оболочки жестко защемленной по наружному контуру при действии сосредоточенной силы нормальной к её срединной поверхности.

Компоненты трехмерного вектора для плоского напряженного состояния для элементов оболочки, находящихся в упруго-пластическом состоянии, определяются по формулам [9]:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_{11} \sqrt{\frac{3}{2}}; \quad \varepsilon_2 = \varepsilon_{11} \sqrt{2} \left(\frac{1}{2} \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} \right); \quad \varepsilon_3 = \gamma \sqrt{2}. \quad (7)$$

Для каждого значения нагрузки, таким образом, получаем точки трехмерного векторного подпространства. Соединяя их, получаем пространственную линию. Если эта линия представляет прямую, то происходит процесс простого

нагружения [1, 9]. В этом случае теория малых упруго-пластических деформаций при решении данной задачи достоверно описывает напряженно-деформированное состояние оболочки.

Пример решения задачи

Рассмотрим незамкнутую цилиндрическую оболочку, жестко защемленную в окружном направлении и шарнирно закрепленную в меридиональном направлении. Оболочка ослаблена большим прямоугольным отверстием. Края отверстия шарнирно закреплены так, что перемещение по нормали к срединной поверхности ограничено полностью, т. е. прогибы w на краях отверстия не возникают.

При расчете приняты такие исходные данные: толщина оболочки $h = 0,05$ м, $R = 1,5$ м, длина оболочки $l = 6,4$ м, угол $\alpha = \pi$. Коэффициент Пуассона $\mu = 0,3$, модуль упругости $E = 1,95 \cdot 10^5$ МПа. Оболочка изготовлена из стали ЭИ-195. Диаграмма растяжения цилиндрического образца из такой стали, представлена на рис. 1. Расчетная схема данной оболочки представлена на рис. 2, на котором показана сеточная область размером 26×20 узлов с тем расчетом, что задача упругости будет решаться вариационно-разностным методом в каждом последовательном приближении.

В таблице 1 показаны величины прогибов в узлах по ряду $i = 13$ в направлении узлов

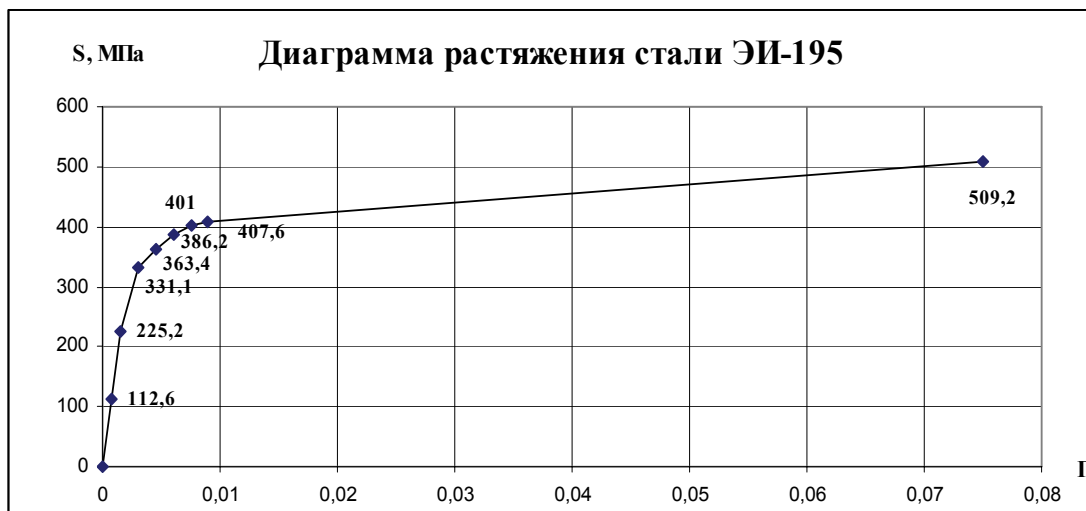


Рисунок 1. Диаграмма растяжения стали ЭИ-195.

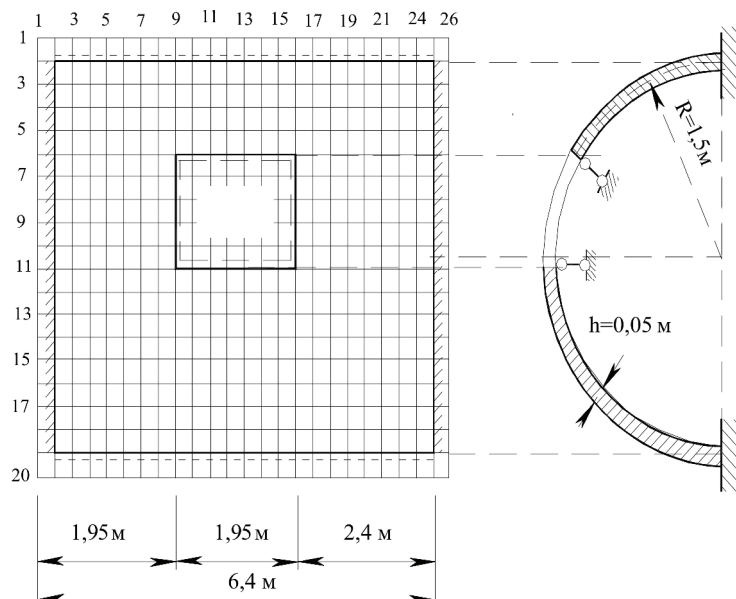


Рисунок 2. Расчетная схема цилиндрической оболочки с большим несимметрично расположенным шарнирно закрепленным прямоугольным отверстием.

$2 \leq j \leq 20$ при упругом и упруго-пластическом решении для нагрузки $q=11$ МПа. Эта таблица проиллюстрирована соответствующими графиками на рис. 3. Из этой таблицы и графиков следует, что с учетом пластического деформирования оболочки с несимметричным вырезом график прогибов значительно смещается в положительном направлении координатной оси α_2 . При этом в узле 13,13 прогибы уменьшились на 25,25%, а в узле 13,16 их значения возросли на 16,67%. Следует отметить изменение качественной картины прогибов в направлении линии $\alpha_2(j)$ оболочки, так как в этом направлении нарушена симметрия оболочки отверстием, а это соответствует большому значению равнодействующей внешней загрузки q для нижней поверхности оболочки.

В таблице 2 и на рис. 4 даны значения изгибающих моментов M_2 по ряду $i = 13$ в направлении узлов $2 \leq j \leq 20$ при упругом и упруго-пластическом решении также для нагрузки $q=11$ МПа. По этим моментам статические граничные условия удовлетворяются на всех шарнирно закрепленных краях оболочки и отверстия. В пластической области в зоне отверстия при перераспределении внутренних усилий в сечениях оболочки изменились, например, моменты M_2 : узел 13.5 при упругом решении $M_2 = 148,034$ кНм/м до значения

$M_2 = 100,949$ кНм/м при пластическом решении; узел 13.12 при упругом решении $M_2 = 117,948$ кНм/м до значения $M_2 = -65,682$ кНм/м при пластическом решении.

Расчетом установлено, что первые остаточные деформации начинают появляться в узле 13.11 при нагрузке $q = 1,6$ МПа, что соответствует значению интенсивности касательных напряжений по диаграмме растяжения $S = 225,2$ МПа. В таблице 3 представлены значения интенсивности касательных напряжений в этом узле при значениях данной нагрузки 3, 5 и 8 МПа при упругом и упруго-пластическом решении задачи по определению НДС по толщине оболочки. Здесь видно, что возник пластический шарнир. При изменении нагрузки q в от 5 до 8 МПа в зоне пластического шарнира интенсивность касательных напряжений S возросла от 371,9 до 405,4 МПа, т. е. на 8,25%. При увеличении нагрузки q от 8 до 11 МПа процесс упрочнения материала значительно снизился к 1,8%.

В таблицах 4, 5 даны поля интенсивности касательных напряжений S , которые возникли при действии нагрузки $q = 11$ МПа на нижней световой поверхности оболочки. В соответствии с этими значениями на рис. 5 и 6 представлены графики этих напряжений при упругом и пластическом решении.

Таблица 1. Значения прогибов по ряду узлов $i=13$

| Прогибы $w \cdot 10^3$ (м) | | |
|----------------------------|-----------------|----------------------|
| j | Упругое решение | Пластическое решение |
| | i=13 | |
| 2 | 0,000 | 0,000 |
| 3 | 6,630 | 6,866 |
| 4 | 9,409 | 9,409 |
| 5 | 7,252 | 6,570 |
| 6 | 0,000 | 0,000 |
| 7 | 0,000 | 0,000 |
| 8 | 0,000 | 0,000 |
| 9 | 0,000 | 0,000 |
| 10 | 0,000 | 0,000 |
| 11 | 0,000 | 0,000 |
| 12 | 7,555 | 2,450 |
| 13 | 11,080 | 8,254 |
| 14 | 11,650 | 11,140 |
| 15 | 10,510 | 11,370 |
| 16 | 8,448 | 9,856 |
| 17 | 5,861 | 7,218 |
| 18 | 2,983 | 3,831 |
| 19 | 0,000 | 0,000 |

Таблица 2. Моменты M_2 при упругом и при пластическом решении

| Вид решения | | |
|-------------|-------------|--------------|
| j | упругое | пластическое |
| | i=13 | |
| | M_2 кНм/м | M_2 кНм/м |
| 2 | 0,0002 | 0 |
| 3 | 111,3406 | 118,4385 |
| 4 | 142,4549 | 140,4875 |
| 5 | 148,034 | 100,939 |
| 6 | 0 | 0,0608 |
| 7 | 0 | 0 |
| 8 | 0 | 0 |
| 9 | 0 | 0 |
| 10 | 0 | 0 |
| 11 | -0,0002 | 0,0255 |
| 12 | 117,948 | -65,682 |
| 13 | 85,0692 | 83,4854 |
| 14 | 46,0603 | 73,1117 |
| 15 | 22,5157 | 45,8805 |
| 16 | 10,9445 | 27,8915 |
| 17 | 5,606 | 18,2727 |
| 18 | 2,4782 | 11,8195 |
| 19 | 0,00 | 0,0 |

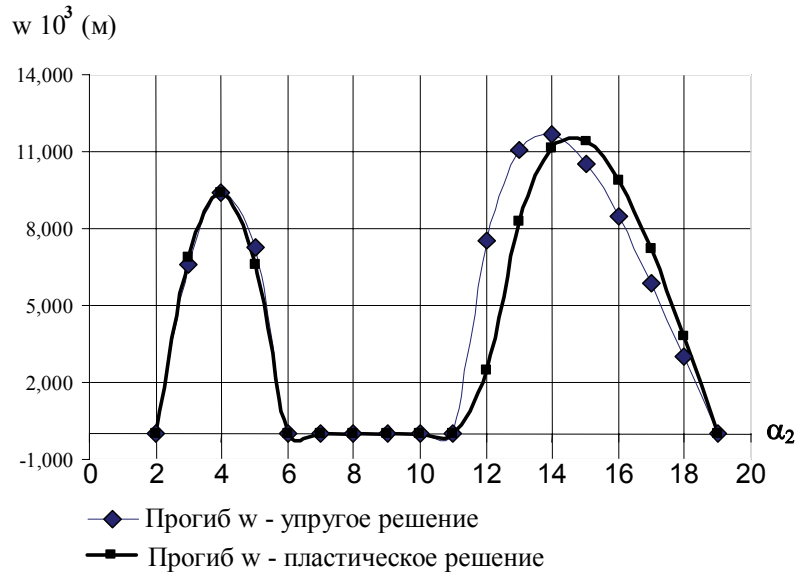


Рисунок 3. Прогибы $w \cdot 10^3$ (м) по ряду узлов $i=3$ сеточной области при упругом и пластическом решении задачи.

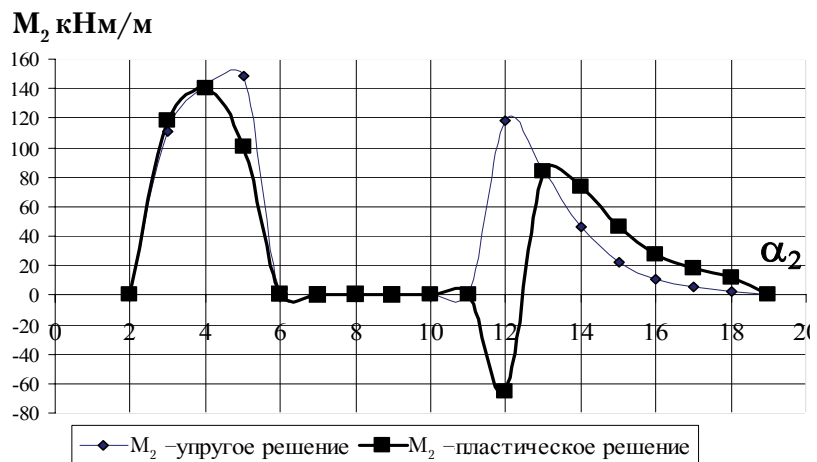


Рисунок 4. Изгибающие моменты M_2 по линии узлов $i=13$ при упругом и пластическом решении при нагрузке $q=11$ МПа.

Таблица 3. Интенсивность касательных напряжений (узел 13.11) при упругом и пластическом решении задачи

| Вид решения | Нагрузка на оболочку, МПа | | | | | | | | |
|--------------|---------------------------|-------|--------|---------|--------|--------|---------|--------|--------|
| | 5,0 | | | | 8,0 | | | | |
| | S(-h/2) | S(0) | S(h/2) | S(-h/2) | S(0) | S(h/2) | S(-h/2) | S(0) | |
| Упругое | 703,8 | 703,3 | 703,3 | 1126,2 | 1125,7 | 1125,3 | 1548,5 | 1547,8 | 1547,2 |
| Пластическое | 371,9 | 371,8 | 371,7 | 405,4 | 405,1 | 405,1 | 412,8 | 412,8 | 412,8 |

Таблица 4. Интенсивность касательных напряжений S(-h/2) при q=11 МПа (упругое решение задачи) (упругое решение задачи)

| j | i | | | | | | | | | | | |
|----|--------|--------|--------|--------|--------|--------|---------|--------|---------|---------|---------|--|
| | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | |
| 2 | 0 | 55,76 | 38,85 | 36,13 | 29,58 | 20,05 | 17,245 | 32,66 | 57,80 | 77,21 | 87,25 | |
| 3 | 116,60 | 114,55 | 128,92 | 128,46 | 120,43 | 107,35 | 90,694 | 71,78 | 42,89 | 23,00 | 16,32 | |
| 4 | 154,04 | 122,96 | 145,30 | 140,09 | 131,76 | 122,78 | 114,94 | 111,00 | 84,84 | 55,84 | 36,71 | |
| 5 | 165,74 | 125,66 | 155,74 | 153,11 | 148,77 | 149,38 | 163,39 | 192,89 | 148,47 | 96,95 | 60,65 | |
| 6 | 171,42 | 125,65 | 161,48 | 163,96 | 164,38 | 173,33 | 217,66 | 423,43 | 672,26 | 620,20 | 645,49 | |
| 7 | 174,64 | 127,78 | 166,19 | 172,13 | 173,92 | 180,41 | 215,75 | 407,38 | 0 | 0 | 0 | |
| 8 | 176,41 | 133,90 | 172,24 | 179,81 | 181,72 | 185,78 | 221,80 | 387,03 | 0 | 0 | 0 | |
| 9 | 177,28 | 143,54 | 180,76 | 189,26 | 192,08 | 196,60 | 236,51 | 476,58 | 0 | 0 | 0 | |
| 10 | 176,10 | 153,67 | 189,67 | 198,45 | 203,02 | 211,13 | 255,64 | 611,14 | 0 | 0 | 0 | |
| 11 | 170,70 | 161,70 | 196,06 | 202,93 | 207,37 | 219,02 | 280,50 | 590,89 | 1412,03 | 1454,29 | 1539,77 | |
| 12 | 161,04 | 168,55 | 200,97 | 203,85 | 204,50 | 207,80 | 226,86 | 310,96 | 239,95 | 147,45 | 64,48 | |
| 13 | 151,73 | 174,11 | 204,51 | 203,28 | 200,39 | 198,71 | 202,38 | 224,80 | 187,29 | 125,20 | 63,72 | |
| 14 | 146,93 | 174,53 | 202,48 | 196,68 | 189,39 | 182,40 | 176,455 | 175,43 | 152,65 | 126,00 | 106,41 | |
| 15 | 147,84 | 167,23 | 193,19 | 184,37 | 174,90 | 166,49 | 159,03 | 154,40 | 144,96 | 138,40 | 134,82 | |
| 16 | 151,90 | 152,88 | 177,56 | 169,10 | 161,24 | 155,47 | 151,31 | 149,64 | 148,16 | 148,81 | 149,63 | |
| 17 | 150,25 | 133,46 | 156,19 | 152,78 | 150,03 | 148,95 | 149,15 | 150,86 | 153,11 | 155,89 | 157,71 | |
| 18 | 118,27 | 112,47 | 130,13 | 138,12 | 142,54 | 146,04 | 149,78 | 154,02 | 158,17 | 161,82 | 163,98 | |
| 19 | 0 | 56,51 | 30,25 | 31,55 | 32,10 | 31,43 | 30,84 | 30,48 | 30,15 | 29,90 | 29,64 | |

Окончание таблицы 4.

| <i>j</i> | <i>i</i> | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|----------|----------|---------|---------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--|--|--|--|--|--|
| | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | | | | | | |
| 2 | 86,87 | 76,17 | 56,35 | 31,78 | 19,21 | 23,98 | 34,04 | 42,01 | 46,78 | 47,93 | 45,19 | 54,44 | 0 | | | | | | |
| 3 | 15,65 | 23,30 | 43,32 | 73,60 | 92,22 | 108,82 | 122,64 | 132,60 | 138,77 | 141,03 | 136,79 | 118,29 | 116,78 | | | | | | |
| 4 | 36,30 | 55,41 | 85,14 | 112,32 | 114,62 | 122,75 | 132,05 | 139,25 | 144,54 | 149,02 | 150,47 | 125,74 | 155,55 | | | | | | |
| 5 | 61,33 | 98,84 | 151,61 | 196,69 | 160,65 | 147,51 | 147,32 | 149,80 | 153,07 | 157,53 | 158,90 | 128,37 | 168,16 | | | | | | |
| 6 | 644,31 | 619,15 | 673,156 | 437,63 | 218,31 | 171,94 | 163,01 | 161,25 | 161,98 | 164,57 | 163,20 | 128,56 | 174,24 | | | | | | |
| 7 | 0 | 0 | 0 | 437,17 | 220,77 | 181,03 | 174,41 | 171,73 | 170,51 | 170,88 | 166,64 | 129,86 | 178,24 | | | | | | |
| 8 | 0 | 0 | 0 | 418,37 | 226,70 | 186,99 | 183,38 | 180,88 | 178,31 | 176,84 | 170,61 | 133,17 | 180,25 | | | | | | |
| 9 | 0 | 0 | 0 | 524,10 | 238,45 | 195,76 | 191,00 | 188,72 | 184,89 | 182,18 | 175,05 | 137,74 | 179,62 | | | | | | |
| 10 | 0 | 0 | 0 | 657,55 | 253,06 | 206,34 | 198,88 | 193,79 | 189,16 | 186,16 | 179,39 | 142,60 | 175,79 | | | | | | |
| 11 | 1548,46 | 1478,03 | 1452,93 | 572,98 | 271,85 | 211,44 | 199,88 | 194,31 | 190,45 | 188,57 | 183,56 | 147,67 | 168,80 | | | | | | |
| 12 | 56,69 | 136,32 | 227,07 | 298,48 | 219,95 | 199,84 | 195,07 | 192,04 | 190,19 | 190,32 | 187,95 | 153,31 | 159,99 | | | | | | |
| 13 | 55,05 | 112,60 | 174,26 | 213,24 | 193,16 | 188,68 | 188,67 | 188,39 | 188,71 | 191,01 | 191,60 | 158,56 | 152,08 | | | | | | |
| 14 | 103,58 | 119,01 | 143,70 | 166,31 | 167,53 | 172,30 | 177,18 | 180,41 | 183,44 | 188,20 | 191,87 | 160,74 | 147,67 | | | | | | |
| 15 | 133,80 | 135,45 | 140,34 | 148,68 | 152,46 | 158,53 | 164,63 | 169,46 | 174,08 | 180,51 | 186,56 | 157,43 | 147,91 | | | | | | |
| 16 | 149,23 | 147,57 | 146,03 | 146,64 | 147,55 | 150,72 | 154,70 | 158,40 | 162,33 | 168,29 | 174,70 | 147,84 | 150,96 | | | | | | |
| 17 | 157,55 | 155,41 | 152,28 | 149,74 | 147,86 | 147,57 | 148,24 | 149,15 | 150,35 | 152,85 | 155,62 | 132,12 | 148,69 | | | | | | |
| 18 | 163,98 | 161,84 | 158,28 | 154,37 | 150,63 | 147,72 | 145,52 | 143,58 | 141,41 | 138,00 | 130,63 | 112,88 | 116,92 | | | | | | |
| 19 | 29,35 | 29,09 | 28,98 | 29,14 | 29,53 | 30,32 | 31,55 | 33,04 | 34,35 | 34,10 | 32,19 | 55,45 | 0 | | | | | | |

Таблица 5. Интенсивность касательных напряжений $S(-h/2)$ при $q=11$ МПа (пластическое решение задачи)

| j | i | | | | | | | | | | | |
|----|--------|--------|--------|--------|----------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--|
| | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | |
| 2 | 0 | 56,22 | 37,52 | 34,03 | 27,2079 | 18,50 | 19,70 | 37,84 | 64,32 | 85,61 | 96,95 | |
| 3 | 117,17 | 113,82 | 127,75 | 127,07 | 118,8736 | 105,70 | 89,06 | 68,15 | 37,86 | 21,68 | 21,50 | |
| 4 | 154,44 | 122,59 | 144,66 | 139,07 | 130,6617 | 122,20 | 115,79 | 109,59 | 83,81 | 59,98 | 46,90 | |
| 5 | 165,33 | 125,87 | 155,84 | 153,14 | 149,701 | 153,01 | 172,19 | 197,95 | 157,22 | 97,57 | 51,11 | |
| 6 | 169,85 | 125,84 | 161,85 | 164,39 | 165,6825 | 175,62 | 215,71 | 302,86 | 372,17 | 366,69 | 367,43 | |
| 7 | 172,25 | 126,79 | 165,65 | 171,54 | 173,6485 | 179,75 | 207,44 | 282,26 | 0 | 0 | 0 | |
| 8 | 173,92 | 131,20 | 170,02 | 177,30 | 178,9209 | 182,09 | 212,72 | 284,58 | 0 | 0 | 0 | |
| 9 | 175,47 | 140,10 | 177,54 | 185,52 | 187,5164 | 190,87 | 227,31 | 328,24 | 0 | 0 | 0 | |
| 10 | 175,89 | 151,30 | 187,38 | 195,86 | 199,424 | 205,94 | 236,81 | 356,15 | 0 | 0 | 0 | |
| 11 | 173,18 | 161,12 | 195,99 | 203,88 | 208,5213 | 217,83 | 250,95 | 349,04 | 410,70 | 411,82 | 412,71 | |
| 12 | 166,43 | 168,26 | 201,51 | 206,64 | 209,8376 | 218,80 | 244,12 | 314,61 | 324,86 | 305,60 | 303,15 | |
| 13 | 157,89 | 173,18 | 204,35 | 205,25 | 204,8846 | 208,90 | 228,05 | 245,37 | 213,73 | 133,47 | 54,027 | |
| 14 | 151,68 | 174,16 | 202,81 | 198,8 | 193,7614 | 190,98 | 195,41 | 197,50 | 162,33 | 115,15 | 73,22 | |
| 15 | 150,36 | 168,31 | 194,41 | 186,39 | 177,8281 | 170,99 | 166,96 | 160,02 | 140,81 | 120,63 | 107,04 | |
| 16 | 152,70 | 154,68 | 178,69 | 169,71 | 161,2917 | 154,94 | 149,99 | 144,29 | 136,76 | 131,59 | 128,80 | |
| 17 | 150,38 | 134,48 | 156,03 | 151,26 | 147,068 | 144,32 | 142,46 | 141,05 | 140,29 | 140,70 | 141,13 | |
| 18 | 118,40 | 111,99 | 128,24 | 134,88 | 137,8293 | 139,68 | 141,62 | 143,84 | 146,30 | 148,74 | 150,20 | |
| 19 | 0 | 57,55 | 28,22 | 27,073 | 25,6061 | 22,76 | 19,80 | 16,93 | 14,19 | 11,78 | 10,04 | |

Окончание таблицы 5.

| j | i | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|-----|--------|--------|--------|--------|--------|---------|---------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--|--|--|--|--|--|
| | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | | | | | | |
| 2 | 96,78 | 85,15 | 63,75 | 37,70 | 21,10 | 21,39 | 30,58 | 38,82 | 44,10 | 45,84 | 43,84 | 54,66 | 0 | | | | | | |
| 3 | 20,64 | 19,55 | 36,62 | 68,07 | 89,25 | 106,00 | 120,04 | 130,31 | 136,70 | 139,38 | 135,52 | 117,51 | 116,95 | | | | | | |
| 4 | 46,19 | 58,45 | 82,36 | 108,61 | 114,17 | 120,86 | 129,72 | 137,11 | 142,73 | 147,61 | 149,55 | 125,10 | 155,38 | | | | | | |
| 5 | 52,06 | 99,29 | 159,18 | 199,36 | 169,40 | 150,20 | 147,20 | 148,63 | 151,75 | 156,37 | 158,14 | 127,66 | 167,45 | | | | | | |
| 6 | 367,43 | 366,82 | 372,21 | 308,38 | 216,30 | 173,60 | 163,44 | 160,66 | 160,95 | 163,50 | 162,35 | 127,52 | 173,13 | | | | | | |
| 7 | 0 | 0 | 0 | 295,53 | 213,18 | 180,269 | 173,82 | 170,73 | 169,28 | 169,61 | 165,47 | 128,36 | 177,13 | | | | | | |
| 8 | 0 | 0 | 0 | 301,41 | 221,23 | 184,23 | 181,21 | 179,02 | 176,65 | 175,34 | 169,18 | 131,46 | 179,70 | | | | | | |
| 9 | 0 | 0 | 0 | 338,59 | 231,88 | 192,35 | 189,25 | 186,75 | 183,41 | 180,93 | 173,76 | 136,32 | 180,17 | | | | | | |
| 10 | 0 | 0 | 0 | 364,94 | 236,98 | 203,72 | 197,67 | 193,40 | 189,00 | 185,89 | 178,69 | 141,78 | 177,85 | | | | | | |
| 11 | 412,84 | 412,17 | 411,50 | 346,23 | 243,90 | 211,02 | 202,51 | 196,75 | 192,09 | 189,36 | 183,30 | 147,10 | 172,45 | | | | | | |
| 12 | 303,83 | 306,22 | 322,24 | 305,60 | 237,07 | 209,64 | 200,74 | 195,59 | 192,21 | 191,10 | 187,39 | 152,32 | 164,77 | | | | | | |
| 13 | 41,18 | 118,80 | 198,30 | 238,03 | 218,45 | 198,33 | 193,473 | 190,93 | 189,89 | 191,14 | 190,57 | 157,11 | 156,85 | | | | | | |
| 14 | 67,06 | 103,85 | 150,02 | 185,51 | 184,24 | 180,35 | 181,47 | 182,63 | 184,37 | 188,25 | 191,06 | 159,61 | 151,34 | | | | | | |
| 15 | 104,94 | 115,14 | 133,40 | 151,97 | 158,72 | 162,18 | 166,94 | 170,86 | 174,80 | 180,77 | 186,44 | 157,26 | 149,97 | | | | | | |
| 16 | 128,05 | 129,42 | 133,36 | 139,93 | 144,92 | 149,16 | 153,84 | 157,99 | 162,16 | 168,31 | 174,96 | 148,42 | 151,66 | | | | | | |
| 17 | 140,83 | 139,84 | 138,90 | 139,24 | 140,34 | 142,07 | 144,38 | 146,58 | 148,74 | 151,99 | 155,50 | 132,62 | 148,72 | | | | | | |
| 18 | 150,12 | 148,52 | 146,03 | 143,70 | 141,86 | 140,67 | 140,08 | 139,57 | 138,59 | 136,13 | 129,58 | 112,63 | 116,90 | | | | | | |
| 19 | 9,64 | 10,78 | 12,86 | 15,41 | 18,13 | 21,03 | 24,18 | 27,45 | 30,32 | 31,39 | 30,91 | 56,00 | 0 | | | | | | |

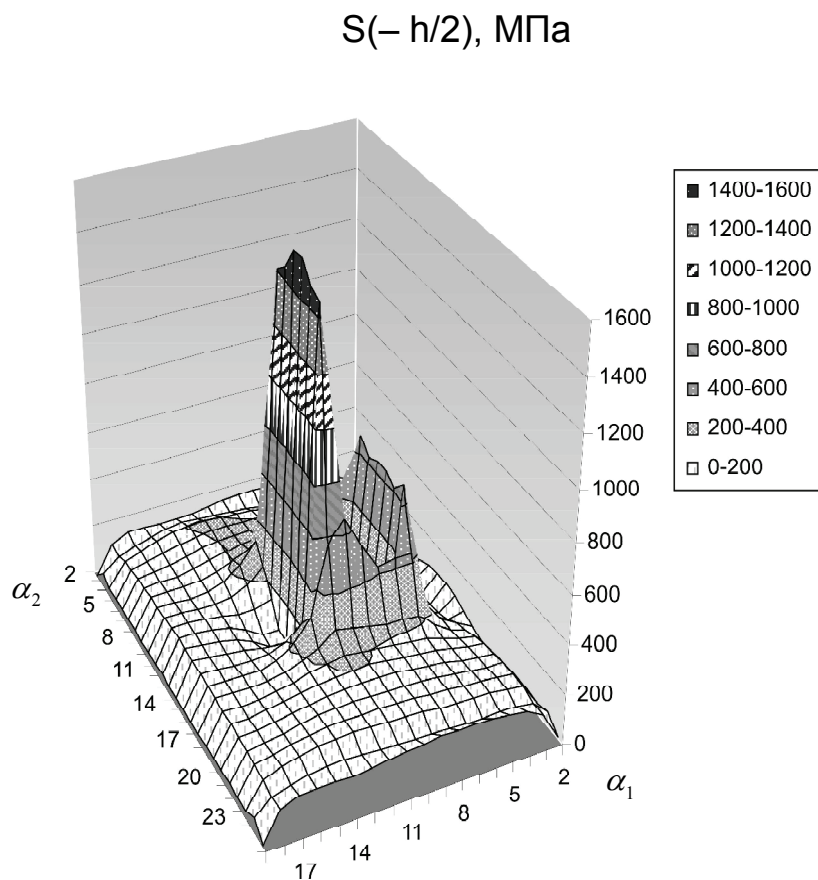


Рисунок 5. Интенсивность касательных напряжений на нижней световой поверхности оболочки при $q=11$ МПа (упругое решение).

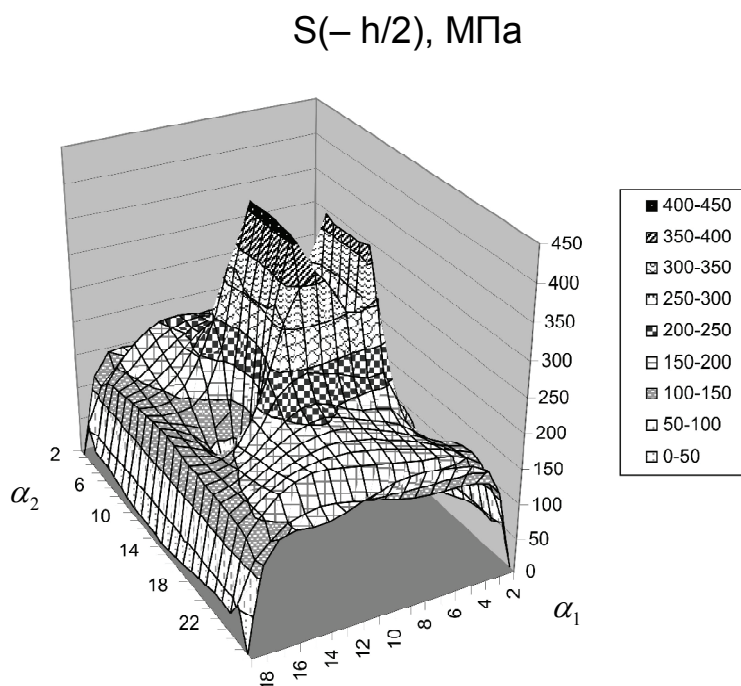


Рисунок 6. Интенсивность касательных напряжений на нижней световой поверхности оболочки при $q=11$ МПа (пластическое решение).

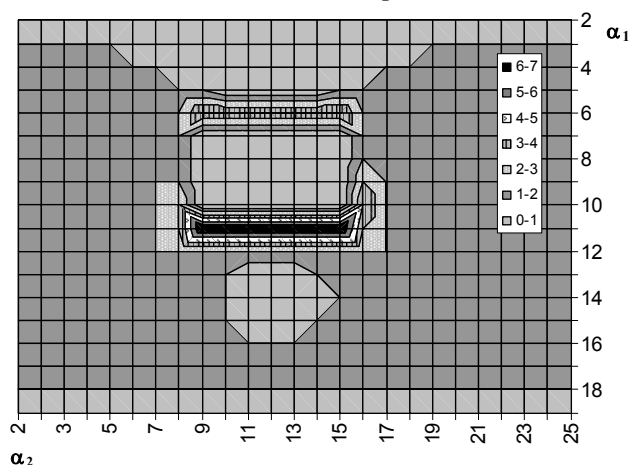
Зоны пластичности при $z=-h/2$ Рисунок 7. Расположение зон пластичности при $z = -h/2$, нагрузка $q = 11$ МПа.

Таблица 6 и рис. 7 иллюстрируют расположение пластических зон в зависимости от степени развития пластических деформаций, что соответствует числам 1, 2, ..., 7. Чем больше число, тем зона пластичности соответствует большей величине остаточной деформации.

В таблице 7 даны значения компонент трехмерного вектора деформаций \mathcal{E}^3 ($\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_3$), определяемых по формулам (7) при трех значениях нагрузки q 3, 5 и 8 МПа для элемента оболочки в окрестности узла 13.11 на нижней световой поверхности оболочки. По этим значениям про-

екций построены графики в координатных плоскостях, $\mathcal{E}_1-\mathcal{E}_2, \mathcal{E}_2-\mathcal{E}_3, \mathcal{E}_3-\mathcal{E}_1$ на рис. 8. По этим графикам видно, что проекции траектории деформирования близки к прямым линиям. Следовательно, и сама траектория будет прямой. Это позволяет утверждать, что соотношения теории малых упруго-пластических деформаций достоверно описывают напряженно-деформированное состояние рассматриваемой оболочки с большим несимметрично расположенным прямоугольным отверстием, края которого шарнирно закреплены [9].

Таблица 6. Нумерация зон пластичности в зависимости от величины интенсивности деформаций сдвига и величины интенсивности касательных напряжений

| Номера узлов | Интенсивность деформаций сдвига | | | Интенсивность касательных напряжений, МПа | | | №№ зон пластичности при | | |
|--------------|---------------------------------|----------------------|----------------------|---|--------|----------|-------------------------|---------|-----------|
| | $\Gamma(-h/2)$ | $\Gamma(0)$ | $\Gamma(h/2)$ | $S(-h/2)$ | $S(0)$ | $S(h/2)$ | $z = -h/2$ | $z = 0$ | $z = h/2$ |
| 10,11 | $1,10 \cdot 10^{-2}$ | $9,96 \cdot 10^{-3}$ | $8,91 \cdot 10^{-3}$ | 410,70 | 409,08 | 407,18 | 7 | 7 | 6 |
| 14,5 | $6,62 \cdot 10^{-4}$ | $1,10 \cdot 10^{-3}$ | $1,87 \cdot 10^{-3}$ | 99,29 | 165,52 | 251,24 | 0 | 1 | 2 |
| 14,11 | $1,20 \cdot 10^{-2}$ | $1,18 \cdot 10^{-2}$ | $1,16 \cdot 10^{-2}$ | 412,17 | 411,87 | 411,59 | 7 | 7 | 7 |
| 15,6 | $5,08 \cdot 10^{-3}$ | $3,68 \cdot 10^{-3}$ | $2,35 \cdot 10^{-3}$ | 372,21 | 345,59 | 287,70 | 4 | 3 | 2 |

Таблица 7. Значения компонент вектора деформаций в узле 13,11 при действии нагрузок $q = 5,0; q = 8,0; q = 11,0$ МПа

| Компоненты вектора деформаций, узел 13,11 | | | | | | | | | |
|---|-----------------------------------|-----------------------------------|-----------------------------------|-----------------------------------|-----------------------------------|-----------------------------------|-----------------------------------|-----------------------------------|-----------------------------------|
| Вид решения | Нагрузка на оболочку, МПа | | | | | | | | |
| | 5,0 | | | 8,0 | | | 11,0 | | |
| | $\mathcal{E}_1(-h/2) \times 10^4$ | $\mathcal{E}_2(-h/2) \times 10^4$ | $\mathcal{E}_3(-h/2) \times 10^4$ | $\mathcal{E}_1(-h/2) \times 10^4$ | $\mathcal{E}_2(-h/2) \times 10^4$ | $\mathcal{E}_3(-h/2) \times 10^4$ | $\mathcal{E}_1(-h/2) \times 10^4$ | $\mathcal{E}_2(-h/2) \times 10^4$ | $\mathcal{E}_3(-h/2) \times 10^4$ |
| Пластическое | -7,952 | 83,27 | -5,895 | -11,38 | 134,3 | -8,233 | -13,9 | 190,0 | -10,7 |

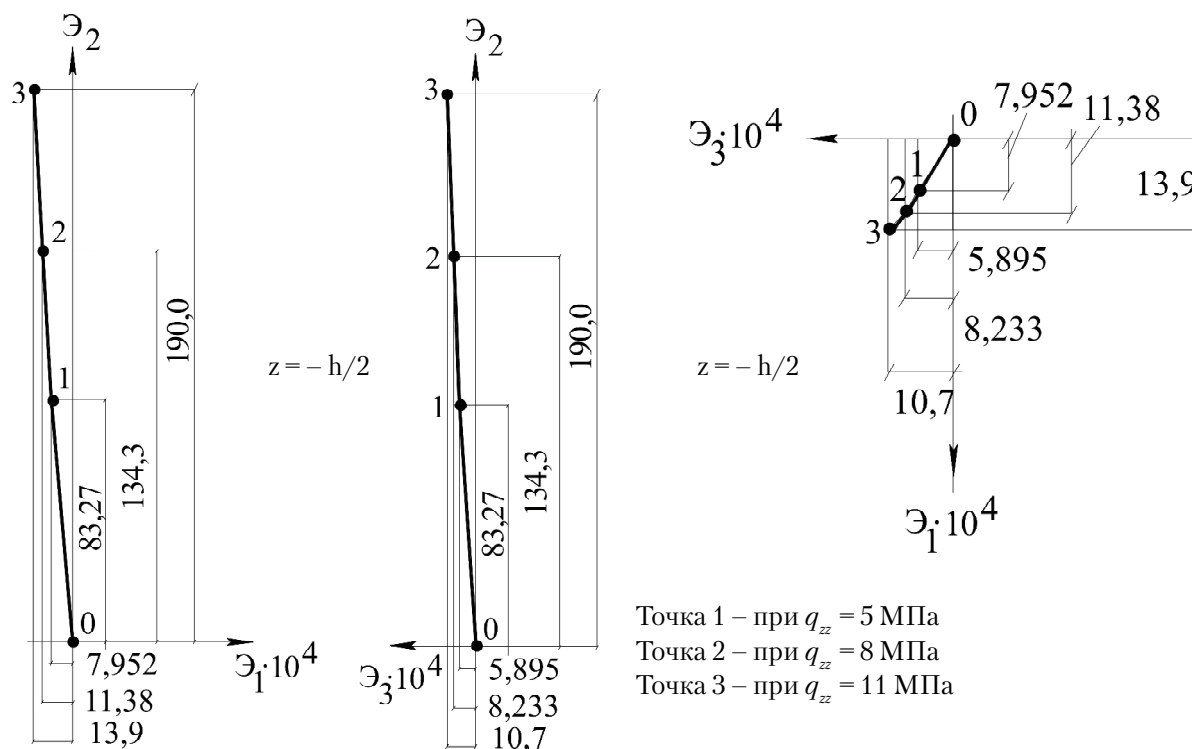


Рисунок 8. Проекция траектории деформирования материала оболочки в узле 13,11 на нижней световой поверхности.

Литература

1. Ильюшин, А. А. Сопротивление материалов [Текст] / А. А. Ильюшин, В. С. Ленский. – М.: Физматгиз, 1959. – 372 с.
2. Избранные методы строительной механики в расчетах пространственных конструкций [Текст]: учебное пособие / В. Ф. Мушанов, В. В. Кулябко, В. М. Левин [и др.]; под общей ред. д. т. н., проф. В. Ф. Мушанова. – Макеевка: ДонНАСА, 2006. – 292 с.
3. Мушанов, В. Ф. Линейные и нелинейные задачи теории упругости в расчетах тонкостенных конструкций [Текст] / В. Ф. Мушанов, А. И. Демидов. – Макеевка: ДонГАСА, 2000. – 182 с.
4. Мушанов, В. Ф. Упруго-пластическое состояние круговой тороидальной оболочки с прямоугольным отверстием [Текст] / В. Ф. Мушанов, А. И. Демидов // Современное промышленное и гражданское строительство. – 2007. – Том 3, № 2. – С. 67–77.
5. Демидов, А. И. Упруго-пластическое напряженно-деформированное состояние тонкой незамкнутой тороидальной оболочки [Текст] / А. И. Демидов // Современное промышленное и гражданское строительство. – 2006. – Т. 2, № 4. – С. 163–176.
6. Мушанов, В. Ф. Упруго-пластическое напряженное состояние круговых конических оболочек

References

1. Ilyushin, A. A.; Lenskii, V. S. Structural resistance. Moscow: Fizmatgiz, 1959. 372 p. (in Russian)
2. Mushchanov, V. F. (Ed.); Kuljabko, V. V.; Levin, V. M. et al. Select methods of structural mechanics at calculation space structures. Textbook. Makeevka: DonNASEA, 2006. 292 p. (in Russian)
3. Mushchanov, V. F.; Demidov, A. I. Linear and nonlinear problems of elasticity theory in the calculation of thin-wall constructions. Makeevka: DonSASEA, 2000. 182 p. (in Russian)
4. Mushchanov, V. F.; Demidov, A. I. An elastic-plastic state of a circle toroidal shell with a rectangular opening. In: *Modern Industrial and Civil Construction*, 2007, Volume 3, Number 2, p. 67–77. (in Russian)
5. Demidov, O. I. An elastic-plastic stressed-deformed state of a thin unclosed toroidal shell. In: *Modern Industrial and Civil Construction*, 2006, Volume 2, Number 4, p. 163–176. (in Russian)
6. Muschanov, V. F.; Demidov, A. I. Plasto-elastic stressed state circular conical shell structure of a tapered and constant thickness with a hole. In: *Metal Constructions*, 2008, Volume 14, Number 3, p. 125–142. (in Russian)
7. Novozhilov, V. V. The theory of thin shells. Leningrad: Sudpromgiz, 1962. 432 p. (in Russian)

- переменной и постоянной толщины с отверстием [Текст] / В. Ф. Муцанов, А. И. Демидов // *Металлические конструкции*. – 2008. – Т. 14, № 3. – С. 125–142.
7. Новожилов, В. В. Теория тонких оболочек [Текст] / В. В. Новожилов. – Ленинград : Судпромгиз, 1962. – 432 с.
 8. Шевченко, Ю. Н. Методы расчета оболочек. Теория упруго-пластических оболочек при неизо-термических процессах нагружения [Текст] / Ю. Н. Шевченко, И. В. Прохоренко. – Киев : Наук. думка, 1981. – 296 с.
 9. Шевченко, Ю. Н. Термопластичность при пере-менных нагружениях [Текст] / Ю. Н. Шевчен-ко. – Киев : Наук. думка, 1970. – 288 с.
 10. Sen, S. K. Criteria for finite element discrimination of shells of revolution [Текст] / S. K. Sen, P. L. Gould // *Int. J. for Numerical Methods in Engineering*. – 1973. – 6,2. – P. 265–274.
 11. Stang, G. Linear algebra and its applications [Текст] / G. Stang. – New York, Sanfrancisco, London : [s. n.], 1976. – 456 p.
 12. Коларов, Д. Механика на пластичните среди [Текст] / Д. Коларов, Н. Бончева. – София : Из-дательство на Българската Академия на науки-те, 1975. – 510 с.
 8. Shevchenko, Yu. N.; Prohorenko, I. V. Analysis method of shells. The theory of elasto-plastic shell in the nonisothermal process of loading. Kyiv: Scientific thought, 1981. 296 p. (in Russian)
 9. Shevchenko, Yu. N. Thermal plasticity in the process of variable loading. Kyiv: Scientific thought, 1970. 288 p. (in Russian)
 10. Sen, S. K.; Gould, P. L. Criteria for finite element discrimination of shells of revolution. In: *Int. J. for Numerical Methods in Engineering*, 1973, 6,2, p. 265–274.
 11. Stang, G. Linear algebra and its applications. New York, Sanfrancisco, London: [s. n.], 1976. 456 p.
 12. Kolarov, D.; Boncheva N. Mechanic of sphere plasticity. Sofia: Publishing house of Bulgarian Academy of Science, 1975. 510 p. (in Bulgarian)

Демидов Олександр Іванович – к. т. н., доцент кафедри теоретичної і прикладної механіки Донбаської національної академії будівництва і архітектури. Наукові інтереси: фізичні лінійні і нелінійні задачі теорії тонких оболонок постійної і змінної товщини з отворами.

Демидов Александр Иванович – к. т. н., доцент кафедры теоретической и прикладной механики Донбасской национальной академии строительства и архитектуры. Научные интересы: физически линейные и нелинейные задачи теории тонких оболочек постоянной и переменной толщины с отверстиями.

Demidov Alexandr – PhD (Eng.), Associate Professor; Theoretic and Applied Mechanics Department, Donbas National Academy of Civil Engineering and Architecture. Scientific interests: physically linear and nonlinear tasks of theory of thin shells of permanent and variable thickness with openings.