



(19)-0399-1

## СХОДИМОСТЬ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОГО СОСТОЯНИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ПО МЕТОДУ УПРУГИХ РЕШЕНИЙ ПРИ ДЕЙСТВИИ РАСПРЕДЕЛЕННОЙ НАГРУЗКИ ПО ЕЁ ЛИНИЯМ СИММЕТРИИ

В. Ф. Мушанов<sup>1</sup>, А. И. Демидов<sup>2</sup>, А. Н. Оржеховский<sup>3</sup>, С. А. Фоменко<sup>4</sup>, А. В. Танасогло<sup>5</sup>

ГОУ ВПО «Донбасская национальная академия строительства и архитектуры»,

2, ул. Державина, г. Макеевка, ДНР, 86123.

E-mail: <sup>1</sup> volodymyr.mushchanov@mail.ru, <sup>2</sup> alexdemidov41@gmail.com, <sup>3</sup> aorzhehovskiy@bk.ru,

<sup>4</sup> Fomenko\_SA@mail.ru, <sup>5</sup> a.v.tan@mail.ru

Получена 17 октября 2019; принята 25 ноября 2019.

**Аннотация.** В статье приводится численный расчет неупругой незамкнутой цилиндрической оболочки методом последовательных приближений на основании метода упругих решений на основе разработанной ранее методики [3]. Задача упругости в каждом приближении решается разностным методом на основе вариационного уравнения Ж. Лагранжа в перемещениях точек срединной поверхности. При этом матрица системы уравнений от приближения к приближению не меняется. Изменяются только правые части, которые зависят от пластических деформаций. Сначала приводится постановка задачи: рассматривается круговая незамкнутая цилиндрическая оболочка с шарнирно закрепленными меридиональными краями и жестко заделанными краями в окружном направлении, находящаяся при действии нормальной к срединной поверхности равномерно распределенной нагрузки, действующей вдоль линий симметрии. Формулируются граничные условия. Доказывается правомочность использования симметрии оболочки. Устанавливается сходимость решения упругой задачи путем двукратного сгущения сетки. Устанавливается момент появления первых пластических деформаций в наиболее нагруженном узле сеточной области. Приведено определение величины действующей нагрузки, к которой сходится решение для наперед заданного упруго-пластического состояния данной оболочки методом упругих решений: при этом приводится поле интенсивности касательных напряжений по толщине оболочки по всей сеточной области; приведено поле интенсивности касательных напряжений по всей сеточной области в табличной форме и в виде объемно-плоских графиков. Показано влияние выбора количества точек по толщине оболочки при определении дополнительных членов, зависящих от пластических деформаций по методу Симпсона. Доказано, что существенного уточнения упруго-пластического решения на НДС оболочки по этому признаку не достигается. Показано, что с учетом пластических деформаций процент снижения напряжений меньше там, где при упругом решении напряжения  $S$  больше. Проведен численный эксперимент по определению процесса сходимости решений упруго-пластического напряженно-деформированного состояния в наиболее нагруженном узле 2–34 с сеткой  $27 \times 35$  узлов с пятью точками по толщине оболочки при  $z = h/2$ . Определены значения нагрузки  $q$ , которые соответствуют упругим решениям задачи для интенсивности касательных напряжений  $S$  по диаграмме растяжения.

**Ключевые слова:** незамкнутая неупругая цилиндрическая оболочка, уравнения Лагранжа, граничные условия, интенсивность касательных напряжений, метод Симпсона.

## ЗБІЖНІСТЬ ПРУЖНО-ПЛАСТИЧНОГО СТАНУ ЦИЛІНДРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ ЗА МЕТОДОМ ПРУЖНИХ РІШЕНЬ ПРИ ДІЇ РОЗПОДІЛЕНОГО НАВАНТАЖЕННЯ ПО ЇЇ ЛІНІЯХ СИМЕТРІЇ

В. П. Мушчанов<sup>1</sup>, О. І. Демидов<sup>2</sup>, А. М. Оржеховський<sup>3</sup>, С. О. Фоменко<sup>4</sup>, А. В. Танасогло<sup>5</sup>

ДОНУ ВПО «Донбаська національна академія будівництва і архітектури»,

2, вул. Державіна, м. Макіївка, ДНР, 86123.

E-mail: <sup>1</sup> volodymyr.mushchanov@mail.ru, <sup>2</sup> alexdemidov41@gmail.com, <sup>3</sup> aorzhehovskiy@bk.ru,

<sup>4</sup> Fomenko\_SA@mail.ru, <sup>5</sup> a.v.tan@mail.ru

Отримана 17 жовтня 2019; прийнята 25 листопада 2019.

**Анотація.** У статті наводиться чисельний розрахунок непружної незамкненої циліндричної оболонки методом послідовних наближень на підставі методу пружних рішень на основі розробленої раніше методики [3]. Задача пружності в кожному наближенні вирішується різницевою методом на основі варіаційного рівняння Ж. Лагранжа в переміщеннях точок серединної поверхні. При цьому матриця системи рівнянь від наближення до наближення не змінюється. Змінюються тільки праві частини, які залежать від пластичних деформацій. Спочатку наводиться постановка задачі: розглядається кругова незамкнута циліндрична оболонка з шарнірно закріпленими меридіональними краями і жорстко затисненими краями в окружному напрямку, яка знаходиться під дією нормального до серединної поверхні рівномірно розподіленого навантаження, яке діє вздовж ліній симетрії. Формулюються граничні умови. Доводиться правомірність використання симетрії оболонки. Встановлюється збіжність рішення пружної задачі шляхом двократного згущення сітки. Встановлюється момент появи перших пластичних деформацій в найбільш навантаженому вузлі ґратчастої зони. Наведено визначення величини діючого навантаження, до якого сходиться рішення для наперед заданого пружно-пластичного стану даної оболонки методом пружних рішень: при цьому наводиться поле інтенсивності дотичних напружень по товщині оболонки по всій ґратчастій зоні; наведено поле інтенсивності дотичних напружень по всій ґратчастій зоні в табличній формі і у вигляді об'ємно-плоских графіків. Показано вплив вибору кількості точок по товщині оболонки при визначенні додаткових членів, залежних від пластичних деформацій за методом Сімпсона. Доведено, що істотного уточнення пружно-пластичного рішення на ПДВ оболонки за цією ознакою не досягається. Показано, що з урахуванням пластичних деформацій відсоток зниження напружень менше там, де при пружному вирішенні напруження  $S$  більше. Проведено чисельний експеримент по визначенню процесу збіжності рішень пружно-пластичного напружено-деформованого стану в найбільш навантаженому вузлі 2–34 з сіткою  $27 \times 35$  вузлів з п'ятьма точками по товщині оболонки при  $z = h/2$ . Визначено значення навантаження  $q$ , які відповідають пружним рішенням задачі для інтенсивності дотичних напружень  $S$  по діаграмі розтягування.

**Ключові слова:** незамкнена непружна циліндрична оболонка, рівняння Лагранжа, граничні умови, інтенсивність дотичних напружень, метод Сімпсона.

## THE CONVERGENCE OF THE ELASTIC-PLASTIC STATE OF A CYLINDRICAL SHELL BY THE METHOD OF ELASTIC SOLUTIONS UNDER THE ACTION OF A DISTRIBUTED LOAD ALONG ITS LINES OF SYMMETRY

Volodymyr Mushchanov<sup>1</sup>, Alexander Demidov<sup>2</sup>, Anatoly Orzhekhovskiy<sup>3</sup>, Serafym Fomenko<sup>4</sup>,  
Anton Tanasoglo<sup>5</sup>

Donbas National Academy of Civil Engineering and Architecture,

2, Derzhavina Str., Makeyevka, DPR, 86123.

E-mail: <sup>1</sup> volodymyr.mushchanov@mail.ru, <sup>2</sup> alexdemidov41@gmail.com, <sup>3</sup> aorzhehovskiy@bk.ru,

<sup>4</sup> Fomenko\_SA@mail.ru, <sup>5</sup> a.v.tan@mail.ru

Received 17 October 2019; accepted 25 November 2019.

**Abstract.** The article presents a numerical calculation of an inelastic open cylindrical shell by the method of successive approximations based on the elastic solution method based on the previously developed technique

[3]. The elasticity problem in each approximation is solved by the difference method based on the variational equation of J. Lagrange in the displacements of points on the middle surface. Moreover, the matrix of the system of equations does not change from approach to approximation. Only the right parts, which depend on plastic deformations, change. First, the statement of the problem is given: we consider a circular open cylindrical shell with pivotally fixed meridional edges and rigidly fixed edges in the circumferential direction under the action of a uniformly distributed load normal to the middle surface, acting along the lines of symmetry. The boundary conditions are formulated. The validity of using shell symmetry is proved. The convergence of the solution of the elastic problem by doubling the grid is established. The moment of appearance of the first plastic deformations in the most loaded node of the grid region is established. The definition of the magnitude of the effective load, to which the solution converges for a predetermined elastoplastic state of a given shell by the method of elastic solutions, is given: the shear stress intensity field over the shell thickness over the entire grid region is given; The field of shear stress intensity over the entire grid area is presented in tabular form and in the form of volumetric-flat graphs. The influence of the choice of the number of points over the shell thickness when determining additional terms depending on plastic strains by the Simpson method is shown. It is proved that a significant refinement of the elastic-plastic solution for the VAT shell by this criterion is not achieved. It is shown that, taking into account plastic deformations, the percentage of stress reduction is less where, in the case of an elastic solution, the stress  $S$  is greater. A numerical experiment was carried out to determine the convergence of solutions of an elastoplastic stress-strain state in the most loaded node 2-34 with a grid of  $27 \times 35$  nodes with five points along the shell thickness at  $z = h/2$ . The values of the load  $q$ , which correspond to the elastic solutions of the problem for the intensity of the tangential stresses  $S$  from the tensile diagram, are determined.

**Keywords:** closed inelastic cylindrical shell, Lagrange equations, boundary conditions, intensity of tangent stresses, Simpson method.

## Основной материал

В книге [3] разработана методика численного расчета тонких упруго-пластических оболочек произвольной формы постоянной толщины на основе метода упругих решений. Задача упругости в каждом приближении решается вариационно-разностным методом на основе вариационного уравнения Лагранжа в перемещениях точек срединной поверхности с широким классом граничных условий.

По этой методике рассмотрим круговую незамкнутую цилиндрическую оболочку толщиной стенки  $h = 20$  мм, радиусом  $0,80$  м длиной  $1,2$  м (рис. 1).

В окружном направлении оболочка жестко заделана, т. е. при  $\alpha_1 = 0$  и при  $\alpha_2 = 1,2$  м составляющие вектора полного перемещения  $u = v = w = 0$  и угол поворота  $\theta_2 = \partial w / \partial \alpha_1 = 0$ . В меридиональном направлении оболочка закреплена шарнирно так, что при  $\alpha_2 = 0$  и при  $\alpha_2 = \pi$  составляющие вектора полного перемещения  $u = v = w = 0$ . Материал имеет коэффициент Пуассона  $\mu = 0,3$  и модуль нормальной упругости  $E = 1,95 \cdot 10^5$  МПа с диаграммой растяжения цилиндрического образца  $S(\Gamma)$  (таблица 1).  $S$  – интенсивность касательных напряжений, а  $\Gamma$  – интенсивность деформаций сдвига, определяемые для плоского напряженного состояния по формулам 1 и 2:

ций сдвига, определяемые для плоского напряженного состояния по формулам 1 и 2:

$$S = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{[\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 - \sigma_{11} \cdot \sigma_{22} + 3\sigma_{12}^2]}; \quad (1)$$

$$\Gamma = \frac{1}{\sqrt{6}} \sqrt{[(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2 + \frac{3}{2} \cdot \gamma^2]}; \quad (2)$$

где относительные деформации  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  и  $\gamma$  уточняются через перемещения  $u, v, w$  точек срединной поверхности оболочки от приближения к приближению.

Оболочка загружается распределенной нагрузкой интенсивностью  $q$  вдоль линий симметрии параллельно координатным линиям  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ .

Сначала выполнены расчеты по проверке условия симметрии оболочки. С этой целью всё тело оболочки покрывалось сеткой  $15 \times 19$  узлов (рис. 1) и  $9 \times 11$  для  $1/4$  её части (рис. 2). Полученные решения полностью совпали при пробной нагрузке  $q = 1,0$  МПа. Результаты счета приведены в таблице 2. Следовательно, следующие решения задач получены с учетом симметрии нагрузки и геометрии оболочки.

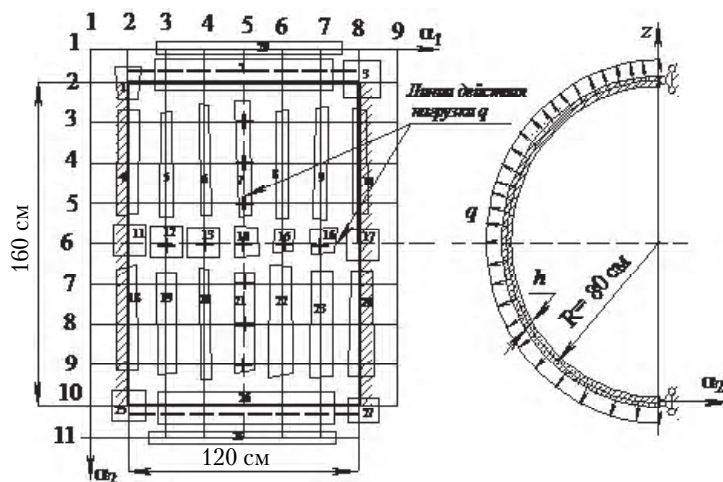


Рисунок 1. Расчетная схема оболочки. Разбивка сеточной области на подобласти (для всего тела оболочки).

Таблица 1. Зависимость интенсивности касательных напряжений ( $S$ ), от интенсивности деформаций сдвига ( $\Gamma$ )

$\Gamma$	0	0,00075	0,0015	0,003	0,0045	0,006	0,00751	0,00901	0,07506
$S$ , МПа =	0	112,6	225,2	331,1	363,4	386,2	401,0	407,6	509,2

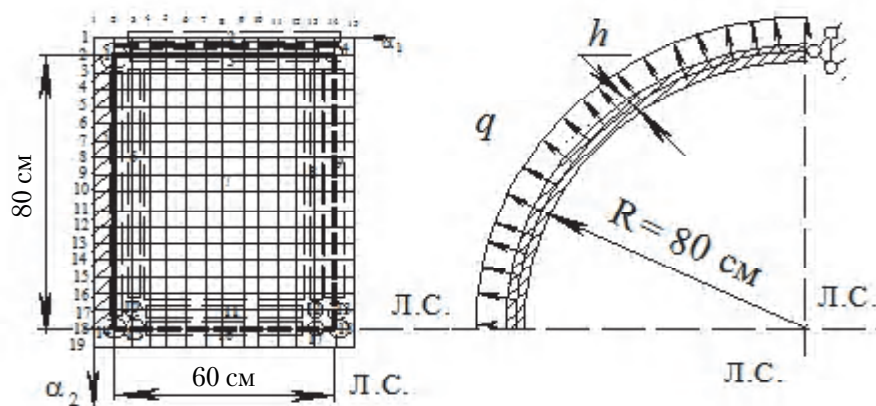


Рисунок 2. Расчетная схема. Разбивка сеточной области на подобласти для 1/4 части.

С учетом сходимости итерационного процесса, в зависимости от количества узлов по толщине оболочки при пробной нагрузке  $q = 13,4$  МПа, вызывающей в ней упругопластическое состояние, было принято, как указано в таблице 3 (3, 5, 7). При этом дополнительные слагаемые, зависящие от пластических деформаций правых частей системы уравнений, вычислялись методом Симпсона. Из таблицы 3 видно, что уточнение

значений интенсивности касательных напряжений  $S(-h/2)$  в наиболее нагруженном узле 14,18 сетки размером  $15 \times 19$  узлов уточняются незначительно (всего на 1,43 %). А при пяти и семи узлах их значения практически совпадают. Поэтому дальнейшие расчеты проведены при пяти узлах по толщине оболочки. В таблице 3 указано, что число итераций при пяти и семи узлах одинаково и равно восьми.

Таблица 2. Результаты расчета по проверке условия симметрии оболочки

Узлы		Нормальные напряжения, МПа						Касательные напряжения, МПа		
$i$	$j$	$\sigma_{11}(-h/2)$	$\sigma_{11}(0)$	$\sigma_{11}(h/2)$	$\sigma_{22}(-h/2)$	$\sigma_{22}(0)$	$\sigma_{22}(h/2)$	$\sigma_{12}(0)$	$\sigma_{12}(h/2)$	$\sigma_{12}(-h/2)$
2	2	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
3	2	0,1	0,1	0,1	0,32	0,32	0,32	- 0,22	0,12	0,47
4	2	0,16	0,16	0,16	0,54	0,54	0,54	- 0,10	0,22	0,54
5	2	0,25	0,25	0,25	0,85	0,85	0,85	0,37	0,32	0,27
6	2	0,43	0,43	0,43	1,45	1,45	1,45	1,72	0,38	-0,96
7	2	0,71	0,71	0,71	2,36	2,36	2,36	3,84	0,33	-3,18
8	2	0,86	0,86	0,86	2,88	2,88	2,88	0,00	0,00	0,00

Таблица 3. Анализ сходимости итерационного расчета внутренних усилий при разбиении толщины оболочки на 3, 5 и 7 узлов

Размер сеточной области 15×19 узлов при нагрузке $q = 13,4$ МПа				Количество итераций
Интенсивность напряжений в узле 14, 18 (МПа) по толщине $h$				
Количество узлов по толщине $h$ оболочки	$S(-h/2)$	$S(0)$	$S(-h/2)$	
3	124,32	149,83	330,71	4
5	118,85	147,86	324,19	8
7	119,55	148,42	325,99	8

В таблицах 4, 5 представлены результаты расчета при упругом и упруго-пластическом решении задачи по интенсивности касательных напряжений по линии узлов  $j = 18$  сетки размером 15×19. За счет перераспределения напряжений при упруго-пластическом деформировании в зонах пластичности происходит снижение напряжений, а в зонах упругости их увеличение. Так, в узле 2, 18 (0,18) при упругом  $S(h/2) = 410,2$  МПа, а при пластическом решении уменьшилось на 19,15 % и составило  $S(h/2) = 331,63$  МПа. А вот в том же узле при упругом  $S(-h/2) = 331,97$  МПа, а при пластическом решении уменьшилось на 32,87 % и составило  $S(-h/2) = 222,86$  МПа. Таким образом, с учетом пластических деформаций процент снижения напряжений меньше там, где при упругом решении напряжения  $S$  больше. Рисунки 3, 4 представляют собой графическую иллюстрацию изменения напряжений, показанных в

таблицах 3, 4 при упругом и упруго-пластическом решении, соответственно.

Проведен численный эксперимент по определению процесса сходимости решений упруго-пластического напряженно-деформированного состояния в наиболее нагруженном узле 2–34 с сеткой 27×35 узлов с пятью точками по толщине оболочки при  $z = h/2$ . Определены значения нагрузки  $q$ , которые соответствуют упругим решениям задачи для интенсивности касательных напряжений  $S$  по диаграмме растяжения (таблица 1). По этим нагрузкам найдены значения интенсивности касательных напряжений  $S$ , к которым сходятся их значения при упруго-пластическом решении (таблица 6). Здесь указан процент снижения этих напряжений и количество итераций для обеспечения необходимой точности решения задачи. Так при нагрузке  $q = 24,7$  МПа при  $S = 509,2$  упругого решения снижение составило 42,5 %. Процесс сошелся при восьми итерациях с точностью 3,6 %. Здесь представлено приращение интенсивности касательных напряжений  $S$  при увеличении значения нагрузки  $q$ . Так, при переходе от нагрузки  $q = 19,794$  к нагрузке  $q = 24,7$  МПа приращение составило 25,16 в абсолютном значении.

Для более полного представления упруго-пластического напряженно-деформированного состояния данной оболочки в таблицах 7, 8 и 9 показаны значения интенсивности касательных напряжений  $S$  по толщине оболочки при  $z = 0$  и при  $z = \pm h/2$ , а на рис. 5, 6 и 7 показаны поля напряжений по данным этих таблиц. В указанных таблицах выделены пластические зоны, где напряжения  $S$  выше предела пропорциональности диаграммы растяжения, т. е. больше чем 225,2 МПа.

Таблица 4. Результаты расчета при упругом решении

$i$	$S$ , МПа, (упругое решение)		
	$j = 18$		
	$z = -h/2$	$z = 0$	$z = h/2$
0	331,97	39,12	410,2
1	63,2	35,34	128,78
2	103,1	49,51	178,09
3	132,5	69,24	254,08
4	144,1	80,86	298,78
5	152,88	85,56	322,82
6	161,72	86,81	335,25
7	168,47	87,72	342,06
8	169,68	90,85	347,36
9	161,5	98,32	353,77
10	141,12	111,14	361,52
11	114,54	126,75	367,71
12	106,34	136,01	368,38

Таблица 5. Результаты расчета при учете пластических деформаций

$i$	$S$ , МПа, (пластическое решение)		
	$j = 18$		
	$z = -h/2$	$z = 0$	$z = h/2$
0	222,86	41,01	331,63
1	61,72	36,7	128,54
2	105,29	50,91	184,08
3	134,98	71,32	245,03
4	148,36	83,93	271,24
5	158,59	89,5	285,79
6	168,55	91,42	293,61
7	176,29	93,03	298,3
8	178,48	97,15	302,5
9	171,27	106,01	307,81
10	151,97	120,57	314,6
11	126,62	137,83	321,38
12	118,85	147,86	324,79

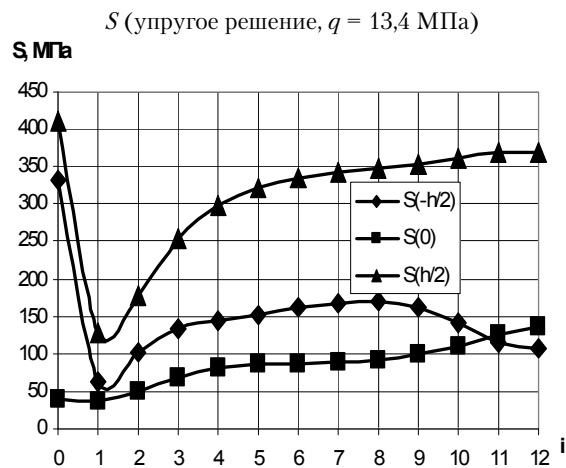


Рисунок 3. Интенсивность касательных напряжений при упругом решении задачи.

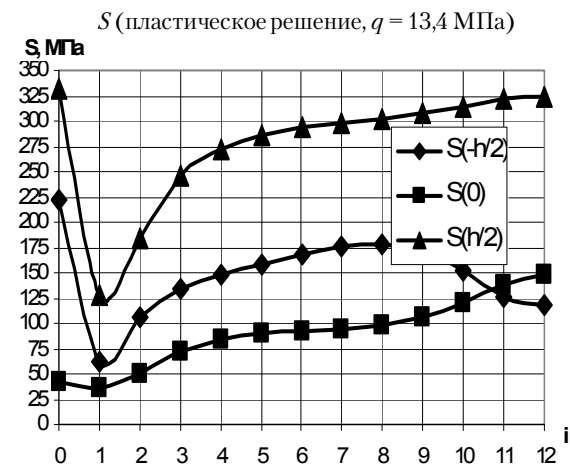


Рисунок 4. Интенсивность касательных напряжений при пластическом решении задачи.

### Выводы по работе

1. Методом сгущения сеточной области удалось обеспечить необходимую точность решения упругой задачи и упруго-пластической задачи.

2. Дано обоснования необходимости увеличения количества узлов по толщине оболочки с целью уточнения пластического решения

Таблица 6. Значения интенсивности касательных напряжений  $S$  при упруго-пластическом решении

Интенсивность касательных напряжений $S$ (МПа) по диаграмме растяжения материала тела оболочки (принимается за упругое решение)								
0,0	112,6	225,2	331,1	363,4	386,2	401,0	407,6	509,2
Нагрузка $q$ , (МПа), соответствующая упругому решению								
0,0	5,46	10,936	16,079	17,647	18,755	19,473	19,794	24,7
Интенсивность касательных напряжений $S$ (МПа) (соответствующее пластическое решение)								
0,0	112,6	225,18	286,32	305,69	319,67	329,53	332,15	357,31
Отличие от упругого решения в процентах								
0,0	0,0	0,0	15,6	18,9	20,8	21,6	22,7	42,5
Количество итераций								
1	1	2	3	4	6	5	6	8
Процент сходимости пластического решения								
0,0	0,0	0,0	2,3	1,5	3,0	2,3	2,4	3,6
Приращение интенсивности касательных напряжений $S$ (МПа) (при увеличении нагрузки $q$ , МПа)								
112,6	112,6	61,12	19,37	13,98	9,86	2,62	25,16	

Таблица 7. Интенсивность напряжений  $S(h/2)$ , МПа

$I$	$J$								
	2	4	6	8	10	12	14	16	18
2	0	2,58	4,4	4,53	1,19	7,44	22,41	43,43	68,44
4	1,5	2,18	3,2	3,29	1,5	5,88	16,6	31,88	50,31
6	1,87	2,42	3,26	3,42	2,64	4,99	12,69	24,18	38,29
8	1,57	2,65	3,92	4,32	3,8	4,65	10,36	20,04	32,47
10	0,97	2,74	4,33	4,91	4,58	4,67	8,88	17,51	29,28
12	0,46	2,6	4,11	4,8	4,81	4,88	8,03	15,76	27,07
14	0,77	2,04	4,08	5,3	6,02	6,69	9,11	15,57	26,13
16	3,67	3,93	7,98	10,12	11,47	12,78	14,94	19,75	28,56
18	10,51	11,46	16,83	19,62	21,41	23,27	25,66	29,39	35,75
20	22,39	24,71	29,62	32,27	34,3	36,58	39,04	41,65	45,07
22	37,5	43,27	45,75	47,55	49,4	51,32	52,64	52,61	51,1
24	45,24	66,83	71,57	74,16	75,33	75,24	73,15	67,76	57,88
26	16,86	116,73	134,49	139,85	140,3	137,81	132,36	123,17	109,79

Продолжение таблицы 7

$I$	$J$							
	20	22	24	26	28	30	32	34
2	93,18	110,89	112,17	85,21	16,46	108,88	271,65	357,31
4	68,96	83,06	86,1	71,13	39,87	66,26	134,49	157,91
6	52,78	63,92	66,69	56,09	32,74	31,7	53,95	193,62
8	45,74	56,67	61,04	54,89	37,15	14,93	65,38	249,31
10	42,44	54,13	60,64	58,19	43,08	11,94	91,91	278,04
12	40,34	53,05	61,81	62,46	48,43	13,16	109	295,86
14	39,39	53,07	63,9	66,88	52,84	12,47	118,99	306,83
16	40,89	54,76	66,72	70,73	55,57	8,68	125,69	314,39
18	45,53	57,75	69	72,3	55,03	4,15	132,93	321,92
20	50,6	58,77	67,05	68,06	48,29	14,28	144,61	331,49
22	49,43	50,04	52,94	50,98	29,4	33,8	163,73	336,35
24	43,21	25,65	13,08	14,49	19,41	70,58	193,85	341,97
26	93,43	79,02	75,47	86,34	106,77	147,22	238,68	345,56

Таблица 8. Интенсивность напряжений  $S(0)$ , МПа

$I$	$J$								
	2	4	6	8	10	12	14	16	18
2	0	0,24	0,43	0,23	1,05	4	8,85	15,36	22,65
4	0,25	0,81	1,8	2,74	3,25	4,15	7,91	15,3	26,04
6	0,39	1,03	2,13	3,49	4,54	5,16	6,68	11,75	21,28
8	0,54	1,4	2,58	4,13	5,53	6,27	6,55	9,21	17,45
10	0,8	1,98	3,09	4,64	6,24	7,19	7,09	7,97	14,8
12	1,25	2,78	3,56	5,0	6,71	7,85	7,69	7,57	12,97
14	1,97	3,84	3,8	4,97	6,7	7,88	7,64	6,96	11,33
16	3,14	5,72	4,09	4,05	5,37	6,32	5,73	4,63	9,25
18	5,01	9,87	7,16	4,95	4,01	3,75	2,44	2,88	9,15
20	7,81	18,02	16,02	14,26	13,29	13,03	13,4	15,08	18,99
22	11,44	30,81	31,14	31,22	31,47	31,97	33,01	35,09	38,49
24	15,1	46,34	50,08	52,4	53,9	55,08	56,54	58,83	62,16
26	16,86	56,41	62,22	65,62	67,65	69,1	70,69	73,04	76,34

Продолжение таблицы 8

$I$	$J$							
	20	22	24	26	28	30	32	34
2	29,2	32,87	31,17	21,9	4,05	20,73	47,65	66,87
4	39,44	54,25	68,48	79,47	84,09	78,98	61,73	44,39
6	34,83	51,29	68,54	83,12	90,06	83,31	59,27	39,73
8	30,93	48,15	66,54	81,94	88,6	80,65	57,8	47,05
10	27,7	44,47	62,11	76,16	81,23	73,15	55,27	53,37
12	24,77	40,13	55,76	67,39	70,59	63,39	51,44	55,67
14	21,84	35,28	48,33	57,26	59,01	53,7	47,89	56,25
16	18,9	30,34	40,75	47,27	48,41	46,13	46,51	57,87
18	17,8	27,11	34,97	39,62	41,17	42,83	48,59	62,71
20	24,86	31,21	36,35	39,42	41,78	46,59	55,51	72,63
22	42,87	47,17	50,28	52,07	54,3	59,53	68,76	89,3
24	66,1	69,67	71,97	73,08	74,59	78,66	86,65	109,89
26	80,16	83,58	85,73	86,68	87,86	91,17	98,53	121,48

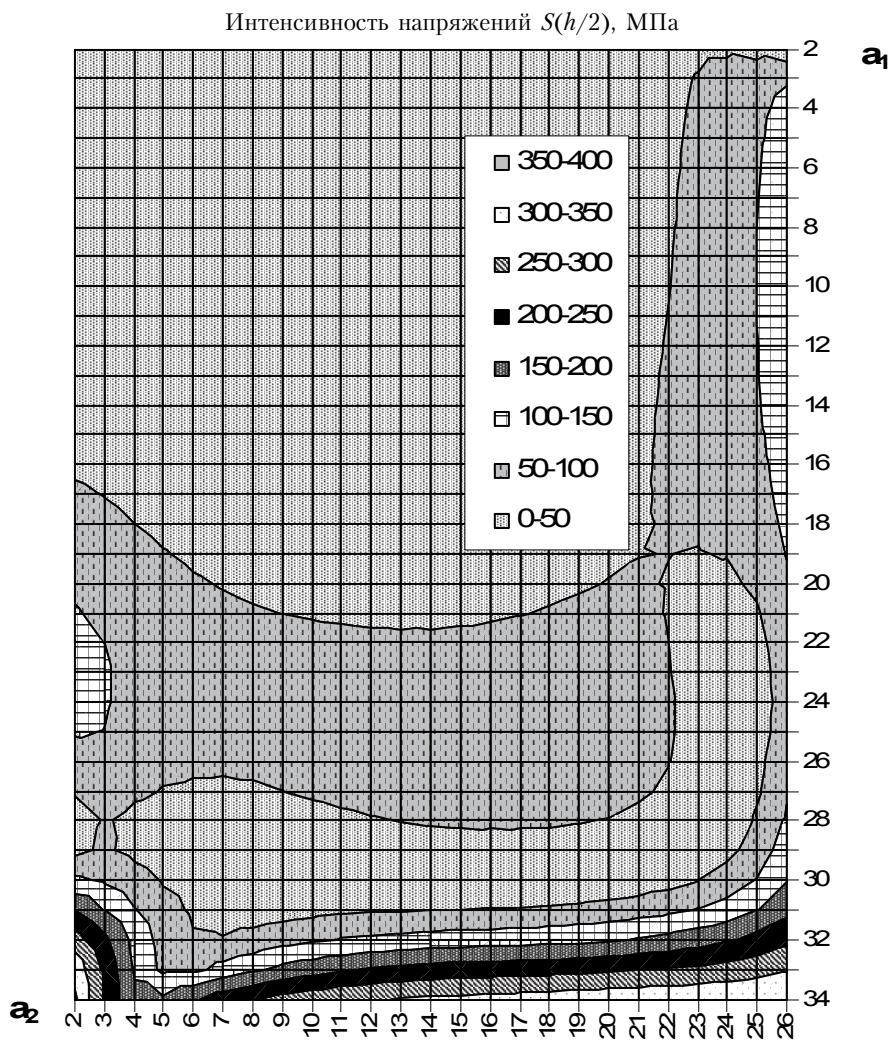
Таблица 9. Интенсивность напряжений  $S(-h/2)$ , МПа

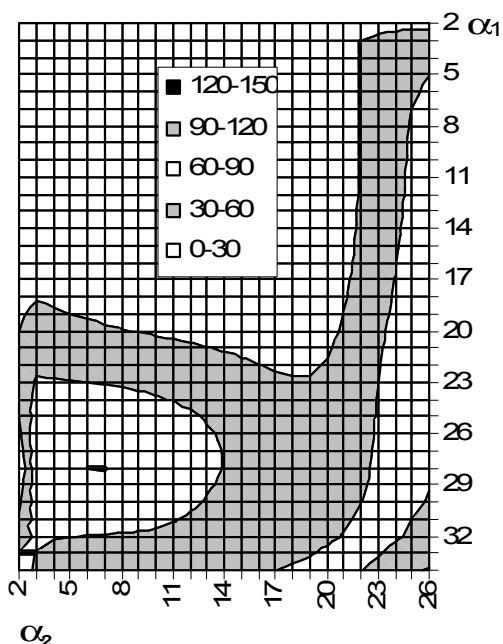
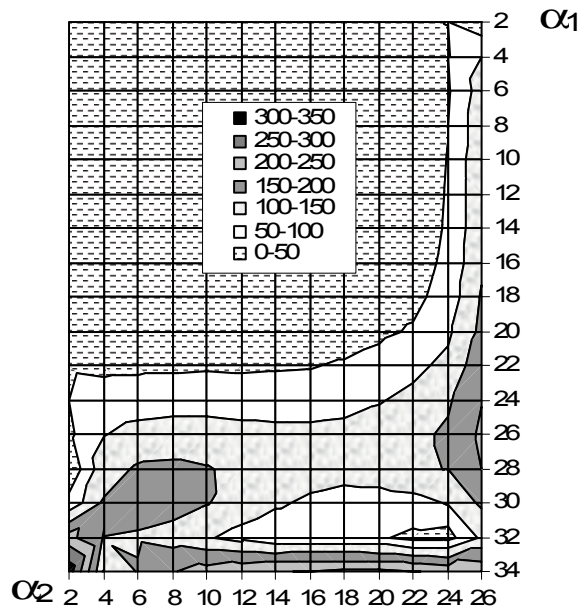
$I$	$J$								
	2	4	6	8	10	12	14	16	18
2	0	2,09	3,54	4,08	3,29	0,55	4,7	12,71	23,13
4	1,45	1,34	2,05	3,72	5,73	7,22	7,03	4,33	6,75
6	1,99	1,72	1,78	4,25	7,89	11,53	13,71	12,89	9,82
8	2,1	2,16	2,42	5,19	9,58	14,23	17,47	17,59	14,74
10	2,18	2,87	3,63	6,65	11,43	16,45	19,86	19,74	15,9
12	2,74	4,59	5,81	9	13,92	18,91	21,97	21,12	15,91
14	4,69	8,36	9,78	12,71	17,26	21,75	24,12	22,41	16,36
16	9,31	15,15	16	17,85	21,22	24,6	25,97	23,52	17,92
18	17,92	25,3	23,59	22,98	24,3	26,05	26,28	23,68	20,73
20	30,93	37,17	29,19	24,2	22,72	22,66	22,19	21,16	24,55
22	45,62	45,25	28,56	20,03	17,03	16,42	17,75	22,91	34,96
24	50,43	45,91	44,83	48,99	51,4	52,95	55,53	61,09	71,9
26	16,86	98,85	124,89	134,05	137,59	139,52	141,81	145,68	152,41



Продолжение таблицы 9

$I$	$J$								
	2	4	6	8	10	12	14	16	18
2	0	2,09	3,54	4,08	3,29	0,55	4,7	12,71	23,13
4	1,45	1,34	2,05	3,72	5,73	7,22	7,03	4,33	6,75
6	1,99	1,72	1,78	4,25	7,89	11,53	13,71	12,89	9,82
8	2,1	2,16	2,42	5,19	9,58	14,23	17,47	17,59	14,74
10	2,18	2,87	3,63	6,65	11,43	16,45	19,86	19,74	15,9
12	2,74	4,59	5,81	9	13,92	18,91	21,97	21,12	15,91
14	4,69	8,36	9,78	12,71	17,26	21,75	24,12	22,41	16,36
16	9,31	15,15	16	17,85	21,22	24,6	25,97	23,52	17,92
18	17,92	25,3	23,59	22,98	24,3	26,05	26,28	23,68	20,73
20	30,93	37,17	29,19	24,2	22,72	22,66	22,19	21,16	24,55
22	45,62	45,25	28,56	20,03	17,03	16,42	17,75	22,91	34,96
24	50,43	45,91	44,83	48,99	51,4	52,95	55,53	61,09	71,9
26	16,86	98,85	124,89	134,05	137,59	139,52	141,81	145,68	152,41

Рисунок 5. Поле интенсивности касательных напряжений  $S(h/2)$  при  $q = 24,7$  МПа.

Интенсивность напряжений  $S(0)$ , МПа**Рисунок 6.** Поле интенсивности касательных напряжений при пластическом решении задачи от нагрузки  $q = 24,7$  МПа ( $z = 0$ ).Интенсивность напряжений  $S(-h/2)$ , МПа**Рисунок 7.** Поле интенсивности касательных напряжений при пластическом решении задачи от нагрузки  $q = 24,7$  МПа ( $z = -h/2$ ).

задач. Показано, что результаты расчета для данной тонкой цилиндрической оболочки при пяти и семи узлах практически совпали. Поэтому дальнейшие расчеты проведены при пяти узлах.

3. Установлены наиболее нагруженные зоны пластических деформаций. Установлено значение нагрузки  $q_T = 2,259$  МПа, при которой в наиболее нагруженном месте оболочки возникают первые пластические деформации.
4. Установлено, что для сходимости с точностью 5 % упруго-пластического решения по-

требовалось от трех до восьми итераций в зависимости от величины нагрузки  $q$ .

5. По значениям интенсивности касательных напряжений  $S$  по диаграмме растяжения материала оболочки определены величины распределенных нагрузок  $q$ , к значениям которых сходятся пластические решения задач.
6. Получены поля интенсивности  $S$  касательных напряжений по толщине оболочки для всех узлов сеточной области в табличной форме и в виде графиков при упругом и упруго-пластическом решении.

## Литература

1. Ильюшин, А. А. Пластичность. Ч. 1. Упруго-пластические деформации [Текст] / А. А. Ильюшин. – М. ; Л. : Гостехиздат, 1948. – 376 с.
2. Избранные методы строительной механики в расчетах пространственных конструкций [Текст] / В. Ф. Мушчанов, В. В. Кулябко, В. М. Левин и др. ; под общей ред. д. т. н., проф. В. Ф. Мушчанова. – Макеевка : ДонНАСА, 2006. С. 55–136.

## Reference

1. Ilyushin, A. A. Plastic. Part 1. Elastic – plastic deformations [Text]. M; L. : Gostehizdat. 1948. 376 p. (in Russian)
2. Mushchanov, V. F.; Kulyabko, V. V.; Levin, V. M.; Balyuba [et. al.]. Select methods of structural building mechanics in analysis of space structures [Text]. Edited by V. F. Mushchanov. Makeevka : DNACA. 2006. P. 55–136. (in Russian)

3. Мушчанов, В. Ф. Линейные и нелинейные задачи теории упругости в расчетах тонкостенных конструкций. [Текст] / В. Ф. Мушчанов, А. И. Демидов. – Макеевка : РИС ОМС ДонГАСА, 2000. – 182 с.
4. Мушчанов, В. Ф. Упруго-пластическое состояние круговой тороидальной оболочки с прямоугольным отверстием [Текст] / В. Ф. Мушчанов, А. И. Демидов // Современное промышленное и гражданское строительство. 2007. Т. 3, № 2. С. 67–77.
5. Демидов, А. И. Упруго-пластическое напряженно-деформированное состояние тонкой незамкнутой тороидальной оболочки [Текст] / А. И. Демидов // Современное промышленное и гражданское строительство. 2006. Т. 2, № 4. С. 163–176.
6. Мушчанов, В. Ф. Упруго-пластическое напряженное состояние круговых конических оболочек переменной и постоянной толщины с отверстием [Текст] / В. Ф. Мушчанов, А. И. Демидов // Металлические конструкции. 2008. Т. 14, № 3. С. 125–142.
7. Новожилов, В. В. Теория тонких оболочек [Текст] / В. В. Новожилов. – Ленинград : Судпромгиз, 1962. – 432 с.
8. Шевченко, Ю. Н. Методы расчета оболочек. Теория упруго-пластических оболочек при неизотермических процессах нагружения [Текст] / Ю. Н. Шевченко, И. В. Прохоренко. – Киев : Наукова думка, 1981. – 296 с.
9. Шевченко, Ю. Н. Термопластичность при переменных нагружениях [Текст] / Ю. Н. Шевченко. – Киев : Наукова думка, 1970. – 288 с.
10. Sen, S. K. Criteria for finite element discrimination of shells of revolution [Текст] / S. K. Sen, P. L. Gould // Int. J. for Numerical Methods in Engineering. 1973. 6, 2. P. 265–274.
11. Stang, G. Linear algebra and its applications calculating spatial pivotal structures [Текст] / G. Stang. – New York, Sanfrancisco, London : [s. n.], 1976. – 456 p.
12. Коларов, Д. Механика на пластичните среди [Текст] / Д. Коларов, Н. Бончева. – София : Издателство на Българската Академия на науките, 1975. – 510 с.
13. Active elastic thin shell theory for cellular deformations [Текст] / Hélène Berthoumieux, Jean-Léon Maître, Carl-Philipp Heisenberg [et. al.] // New Journal of Physics. 2014. Vol. 16. Published 10, June 2014, IOP Publishing Ltd and Deutsche Physikalische Gesellschaft.
14. Zeighampour, Hamid A shear deformable conical shell formulation in the framework of couple stress theory [Текст] / Hamid Zeighampour, Yaghoub Tadi Beni, Fahimeh Mehralian // Acta Mechanica. 2015. Vol. 226. Issue 8. P. 2607–2629.
15. Zeighampour, Hamid. Buckling analysis of functionally graded sandwich cylindrical micro-nanoshells based on the couple stress theory [Электронный ресурс] / Hamid Zeighampour, Milad Shoj-
3. Mushchanov, V. F.; Demidov, A. I. Linear and nonlinear problems of elasticity theory in the calculation of thin wall constructions [Text]. Makeevka : DonSASEA. 2000. 182 p. (in Russian)
4. Mushchanov, V. F.; Demidov, A. I. An elasticplastic state of a circle toroidal shell with a rectangular opening [Text]. In: *Modern Industrial and Civil Construction*. 2007. Vol. 3. № 2. P. 67–77. (in Russian)
5. Demidov, O. I. An elasticplastic stresseddeformed state of a thin unclosed toroidal shell [Text]. In: *Modern Industrial and Civil Construction*. 2006. Vol. 2, № 4. P. 163–176. (in Russian)
6. Muschanov, V. F.; Demidov, A. I. Plastoelastic stressed state circular conical shell structure of a tapered and constant thickness with a hole [Text]. In: *Metal Constructions*. 2008. Vol. 14, № 3. P. 125–142. (in Russian)
7. Novozhilov, V. V. The theory of thin shells. Leningrad : Sudpromgiz. 1962. 432 p. (in Russian)
8. Shevchenko, Yu. N.; Prohorenko, I. V. Analysis method of shells. The theory of elastoplastic shell in the nonisothermal process of loading [Text]. Kyiv : Scientific thought. 1981. 296 p. (in Russian)
9. Shevchenko, Yu. N. Thermal plasticity in the process of variable loading. Kyiv : Scientific thought. 1970. 288 p. (in Russian)
10. Sen, S. K.; Gould, P. L. Criteria for finite element discrimination of shells of revolution [Text]. In: *Int. J. for Numerical Methods in Engineering*. 1973. 6, 2. P. 265–274.
11. Stang, G. Linear algebra and its applications [Text]. New York, Sanfrancisco, London : [s. n.], 1976. 456 p.
12. Kolarov, D.; Boncheva N. Mechanic of sphere plasticity [Text]. Sofia : Publishing house of Bulgarian Academy of Science. 1975. 510 p. (in Bulgarian)
13. Berthoumieux, Hélène; Maître, Jean-Léon; Heisenberg, Carl-Philipp [et. al.]. Active elastic thin shell theory for cellular deformations [Text]. In: *New Journal of Physics*. 2014. Vol. 16.
14. Zeighampour, Hamid; Yaghoub Tadi Beni; Mehralian, Fahimeh. A shear deformable conical shell formulation in the framework of couple stress theory [Text]. In: *Acta Mechanica*. 2015. Vol. 226. Issue 8. P. 2607–2629.
15. Zeighampour, Hamid; Shojaeian, Milad. Buckling analysis of functionally graded sandwich cylindrical micro-nanoshells based on the couple stress theory [Electronic resource]. In: *Journal of Sandwich Structures & Materials*. 2017. Vol. 21. Issue 3. P. 917–937. Access mode: <https://doi.org/10.1177/1099636217703912>.
16. Seyed Sajad Mirjavadi; Behzad Mohasel Afshari; Mohammad Reza Barati [et. al.]. Strain gradient based dynamic response analysis of heterogeneous cylindrical microshells with porosities under a moving load [Electronic resource]. In: *Materials Research Express*. 2018. Vol. 6, № 3. Access mode: <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/2053-1591/aaf5a2>.

- aeian // *Journal of Sandwich Structures & Materials*. 2017. Vol. 21. Issue 3. P. 917–937. – Режим доступа : <https://doi.org/10.1177/1099636-217703912>.
16. Strain gradient based dynamic response analysis of heterogeneous cylindrical microshells with porosities under a moving load [Электронный ресурс] / Seyed Sajad Mirjavadi<sup>1</sup>, Behzad Mohasel Afshari, Mohammad Reza Barati [et. al.] // *Materials Research Express*. 2018. Volume. 6, Number 3. – Режим доступа : <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/2053-1591/aaf5a2>.
  17. Liu, Y. Size-dependent free vibration and buckling of three-dimensional graphene foam microshells based on modified couple stress theory [Текст] / Y. Liu, Y. Wang // *Materials*. 2019. 12(5). P. 729.

**Мущанов Владимир Филиппович** – доктор технических наук, профессор; заведующий кафедрой теоретической и прикладной механики, проректор по научной работе ГОУ ВПО «Донбасская национальная академия строительства и архитектуры». Член международной организации «Институт гражданских инженеров» и международной ассоциации «Пространственные конструкции». Научные интересы: теория надежности, расчет, проектирование и техническая диагностика пространственных металлических конструкций.

**Демидов Александр Иванович** – кандидат технических наук, доцент кафедры теоретической и прикладной механики ГОУ ВПО «Донбасская национальная академия строительства и архитектуры». Научные интересы: физически линейные и нелинейные задачи теории тонких оболочек постоянной и переменной толщины с большими отверстиями.

**Оржеховский Анатолий Николаевич** – кандидат технических наук, доцент кафедры теоретической и прикладной механики ГОУ ВПО «Донбасская национальная академия строительства и архитектуры». Научные интересы: исследование действительной работы и показателей надежности стержневых систем в строительстве, численные методы расчета пространственных стержневых конструкций.

**Фоменко Серафим Александрович** – кандидат технических наук, доцент кафедры теоретической и прикладной механики ГОУ ВПО «Донбасская национальная академия строительства и архитектуры». Научные интересы: развитие общей методики динамических расчетов элементов строительных конструкций и поиск рациональных способов демпфирования колебаний.

**Танасогло Антон Владимирович** – кандидат технических наук, доцент кафедры металлических конструкций и сооружений ГОУ ВПО «Донбасская национальная академия строительства и архитектуры». Научные интересы: эксплуатационная надежность и оптимальное проектирование конструкций воздушных линий электропередачи и антенных опор. Изучение действительной работы металлических решетчатых конструкций башенного типа.

**Мущанов Володимир Пилипович** – доктор технічних наук, професор; завідувач кафедри теоретичної та прикладної механіки, проректор з наукової роботи ДООУ ВПО «Донбаська національна академія будівництва і архітектури». Член міжнародної організації «Інститут цивільних інженерів» та міжнародної асоціації «Просторові конструкції». Наукові інтереси: теорія надійності, розрахунок, проектування та технічна діагностика просторових металевих конструкцій.

**Демидов Олександр Іванович** – кандидат технічних наук, доцент кафедри теоретичної та прикладної механіки ДООУ ВПО «Донбаська національна академія будівництва і архітектури». Наукові інтереси: фізично лінійні і нелінійні задачі теорії тонких оболонок постійної і змінної товщини з великими отворами.

**Оржеховський Анатолій Миколайович** – кандидат технічних наук, доцент кафедри теоретичної та прикладної механіки ДООУ ВПО «Донбаська національна академія будівництва і архітектури». Наукові інтереси: дослідження дійсної роботи і показників надійності стержневих систем в будівництві, чисельні методи розрахунку просторових стержневих конструкцій.

**Фоменко Серафим Олександрович** – кандидат технічних наук, доцент кафедри теоретичної та прикладної механіки ДОУ ВПО «Донбаська національна академія будівництва і архітектури». Наукові інтереси: розвиток загальної методики динамічних розрахунків елементів будівельних конструкцій та пошук раціональних способів демпфірування коливань.

**Танасогло Антон Владимирович** – кандидат технічних наук, доцент кафедри металевих конструкцій та споруд ДОУ ВПО «Донбаська національна академія будівництва і архітектури». Наукові інтереси: експлуатаційна надійність та оптимальне проектування конструкцій повітряних ліній електропередачі та антенних опор. Вивчення дійсної роботи металевих ґратчастих конструкцій баштового типу.

**Mushchanov Volodymyr** – D. Sc. (Eng.), Professor; Head of the Theoretical and Applied Mechanics Department, vice-rector on the scientific activity of the Donbas National Academy of Civil Engineering and Architecture. A member of the international organization «Institute of Civil Engineer» and international organization of «Spatial Structures». Scientific interests: include the reliability theory, analyses, designing and engineering diagnostics of spatial metal structures.

**Demidov Alexander** – Ph. D. (Eng.), Associate Professor, Theoretical and Applied Mechanics Department, Donbas National Academy of Civil Engineering and Architecture. Scientific interests: physically linear and nonlinear problems of the theory of thin shells of constant and variable thickness with large holes.

**Orzhekhovsky Anatoly** – Ph. D. (Eng.), Associate Professor, Theoretical and Applied Mechanics Department, Donbas National Academy of Civil Engineering and Architecture. Scientific interests: the study of the actual work and reliability indicators of pivotal systems in construction, numerical methods for calculating spatial pivotal structures.

**Fomenko Serafym** – Ph. D. (Eng.), Associate Professor, Theoretical and Applied Mechanics Department, Donbas National Academy of Civil Engineering and Architecture. Scientific interests: development of the general dynamic design technique of building structure elements and search for the rational ways of vibration damping.

**Tanasoglo Anton** – Ph. D. (Eng.), Associate Professor, Metal Structures and Constructions Department, Donbas National Academy of Civil Engineering and Architecture. Scientific interests: operational reliability and optimal designing of overhead power transmission line and antenna support structures, studying of the valid work of metal lattice tower supports.