



ISSN 1993-3517 online

**МЕТАЛЛИЧЕСКИЕ КОНСТРУКЦИИ  
МЕТАЛЕВІ КОНСТРУКЦІЇ  
METAL CONSTRUCTIONS**

2021, ТОМ 27, НОМЕР 2, 97–118  
УДК 624.074

(21)-0426-1

## **ОСОБЕННОСТИ СОВМЕСТНОЙ РАБОТЫ ПОДКРЕПЛЯЮЩЕГО ЭЛЕМЕНТА С ПОЛОГОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ БЕЗМОМЕНТНОЙ ОБОЛОЧКОЙ ПРИ ДЕЙСТВИИ ПОПЕРЕЧНОЙ НАГРУЗКИ**

**В. Ф. Мущанов, Е. В. Конопацкий, В. А. Шпиньков, А. А. Крысько**

*ГОУ ВПО «Донбасская национальная академия строительства и архитектуры»,  
2, ул. Державина, г. Макеевка, ДНР, 86123.  
E-mail: volodymyr.mushchanov@mail.ru*

*Получена 13 мая 2021; принята 28 мая 2021.*

**Аннотация.** В статье рассмотрены тонколистовые мембранные покрытия в виде плоской и цилиндрической оболочки нулевой гауссовой кривизны, подкреплённые элементом жёсткости на прямоугольном плане. Приводится аналитическое описание геометрических моделей тонколистового мембранного покрытия на прямоугольном плане и ребра жесткости в виде двутавра, изогнутых в одном направлении, на основе которых получены компьютерные модели тонколистовых мембранных поверхностей и подкрепляющих элементов с учётом необходимой плотности конечных элементов прямоугольной формы для импорта в систему конечно-элементного анализа напряжённо-деформированного состояния конструкций SCAD Office с дальнейшим проведением численного эксперимента. Полученные результаты позволяют оценить на основе уточнённых подходов размеры участка тонколистовой мембранной пластины, вовлекаемого в совместную работу на поперечный изгиб с подкрепляющим элементом в зависимости от соотношения их жесткостей изменения кривизны поверхности.

**Ключевые слова:** тонколистовая мембрана, подкрепляющий элемент жёсткости, напряжённо-деформированное состояние, поперечная нагрузка, нормальные напряжения, изгибающий момент, гауссова кривизна, цилиндрическая поверхность, компьютерная модель поверхности, точечное уравнение, математическая модель.

## **ОСОБЛИВОСТІ СПІЛЬНОЇ РОБОТИ ПІДКРІПЛЮВАЛЬНОГО ЕЛЕМЕНТА З ПОЛОГОЮ ЦИЛИНДРИЧНОЮ БЕЗМОМЕНТНОЮ ОБОЛОНКОЮ ПРИ ДІЇ ПОПЕРЕЧНОГО НАВАНТАЖЕННЯ**

**В. П. Мущанов, Є. В. Конопацький, В. О. Шпиньков, О. А. Крисько**

*ДОН ВПО «Донбаська національна академія будівництва і архітектури»,  
2, вул. Державіна, м. Макіївка, ДНР, 86123.  
E-mail: volodymyr.mushchanov@mail.ru*

*Отримана 13 травня 2021; прийнята 28 травня 2021.*

**Анотація.** У статті розглянуті тонколистові мембранні покриття у вигляді плоскої і циліндричної оболонки нульової гауссової кривизни, підкріплені елементом жорсткості на прямокутному плані. Наводиться аналітичний опис геометричних моделей тонколистового мембранного покриття на прямокутному плані і ребра жорсткості у вигляді двутавра, вигнутих в одному напрямку, на основі яких отримані комп'ютерні моделі тонколистових мембранних поверхонь і підкріплювальних елементів з урахуванням необхідної щільності кінцевих елементів прямокутної форми для імпорту в систему кінцево-елементного аналізу напружено-деформованого стану конструкцій SCAD Office з подальшим проведенням чисельного експерименту. Отримані результати дозволяють оцінити на основі уточнених підходів розміри ділянки тонколистової мембранної пластини, що залучається до спільної роботи на поперечний вигин з підкріплювальним елементом залежно від співвідношення їх жорсткостей зміни кривизни поверхні.

**Ключові слова:** тонколистова мембранна пластина, підкріплювальний елемент жорсткості, напружено-деформований стан, поперечне навантаження, нормальні напруження, згинальний момент, гауссова кривизна, циліндрична поверхня, комп'ютерна модель поверхні, точкове рівняння, математична модель.

## FEATURES OF THE JOINT OPERATION OF THE REINFORCING ELEMENT WITH A FLAT CYLINDRICAL MOMENTARY SHELL UNDER THE ACTION OF A TRANSVERSE LOAD

Volodymyr Mushchanov, Evgeniy Konopatskiy, Vladimir Shpinkov, Alexandra Krysko

*Donbas National Academy of Civil Engineering and Architecture,*

*2, Derzhavina Str., Makeyevka, DPR, 86123.*

*E-mail: volodymyr.mushchanov@mail.ru*

*Received 13 May 2021; accepted 28 May 2021.*

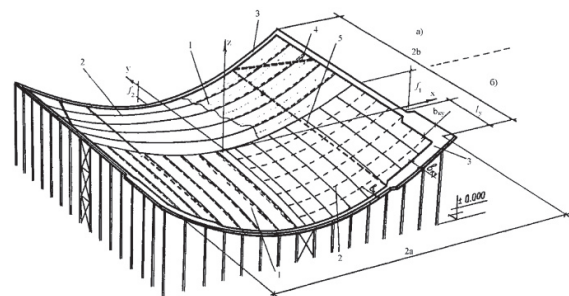
**Abstract.** The article considers thin-sheet membrane coatings in the form of a flat and cylindrical shell of zero Gaussian curvature, supported by a stiffness element on a rectangular plan. An analytical description of geometric models of a thin-sheet membrane coating on a rectangular plan and stiffeners in the form of an I-beam curved in one direction is given, on the basis of which computer models of thin-sheet membrane surfaces and reinforcing elements are obtained, taking into account the necessary density of rectangular finite elements for importing into the system of finite element analysis of the stress-strain state of SCAD Office structures with further numerical experiment. The obtained results allow us to estimate, on the basis of refined approaches, the dimensions of the section of a thin-sheet membrane plate involved in joint work for transverse bending with a reinforcing element, depending on the ratio of their stiffness changes in the curvature of the surface.

**Keywords:** thin-sheet membrane, reinforcing element of rigidity, stress-strain state, transverse load, normal stresses, bending moment, gaussian curvature, cylindrical surface, computer model of the surface, point equation, mathematical model.

### Введение

Традиционно пролётная конструкция цилиндрической оболочки с замкнутым опорным контуром на большей части поверхности работает на растяжение в двух направлениях. Цепные усилия воспринимаются контуром. Поверхность оболочки задаётся с небольшой впадушенностью, обеспечивающей стабилизацию покрытия и наружный водоотвод. Покрытие собирается на ортогональной системе элементов «постели» из прямоугольных полотнищ, которые располагаются как вдоль, так и поперёк пролёта (рис. 1).

В случае системы с разомкнутым контуром оболочка преимущественно работает в одном (провисающем) направлении. Цепные усилия мембраны воспринимаются нижележащими



**Рисунок 1.** Схема прямоугольного в плане цилиндрического покрытия с замкнутым опорным контуром: а) металлический опорный контур и продольное расположение полотнищ мембраны; б) металлический опорный контур и поперечное расположение полотнищ мембраны; 1 – мембрана; 2 – элементы постели; 3 – опорный контур; 4 – распорки; 5 – регулирующая монтажная затяжка.

пилонами боковых пристроек трибун или оттяжками (рис. 2).

Одним из последних проектов, в котором применялась стальная тонколистовая мембрана, был крытый конькобежный центр в Крылатском (рис. 3). Форма поверхности покрытия представляет часть шатровой оболочки на полукруглом плане радиусом 120 м. Пролётная конструкция в виде стальной тонколистовой мембраны толщиной 5 мм подкреплена радиально-кольцевой системой элементов «постели» (рис. 4).

Основополагающие теории и методики расчёта пространственных тонколистовых мембранных конструкций предложены в трудах В. З. Власова [2], В. В. Новожилова [3], А. Л. Гольденвейзера [4], А. И. Лурье [5], С. П. Тимошенко [9], середины второй половины минувшего столетия. Эти базовые работы были дополнены в конце 20-го столетия трудами учёных нового поколения: Н. В. Колкунова [6], Н. М. Никиреева [7].

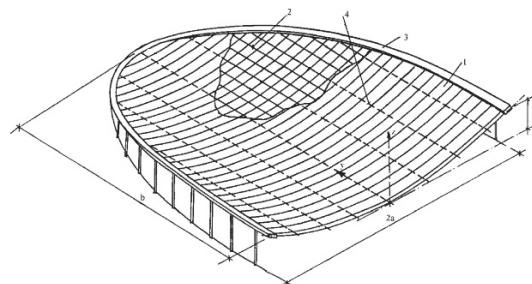
Современный вклад в продолжение развития теоретических исследований и дальнейшее внедрение конструктивных решений для большепролетных мембранных конструкций приведено в трудах: П. Г. Еремеева [1], В. Ф. Муцанова [10, 11, 12], Н. В. Канчели [13], Е. В. Горохова [11, 12], Л. В. Енджиевского [14], И. Г. Людковского [15, 16].

Использование мембранных покрытий (в особенности в промышленных зданиях с подвесным оборудованием) вызывает затруднение из-за его деформативности. Для таких мембранных покрытий необходима система устройств стабилизированных систем.

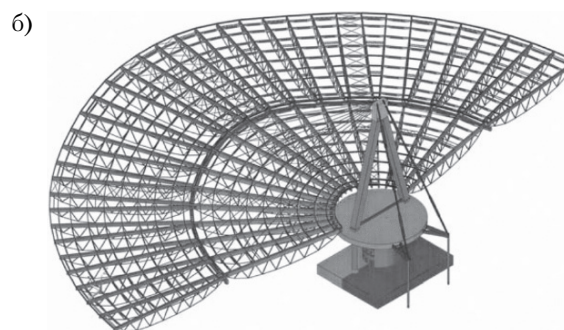
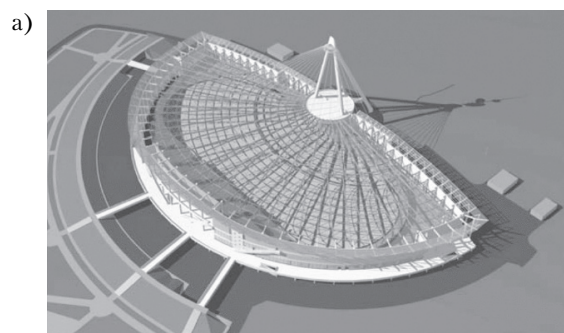
Существуют следующие способы стабилизации поверхности мембранных тонколистовых покрытий:

- 1) пригрузом поверхности;
- 2) введением в конструкцию изгибно-жестких элементов;
- 3) предварительное напряжение;
- 4) стабилизация формой поверхности для прямоугольных в плане зданий с подвесными кранами [17].

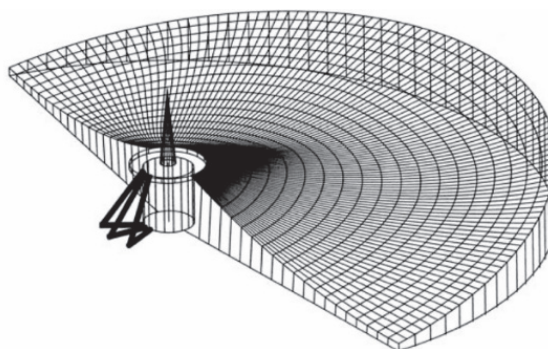
Одной из особенностей работы подобных систем является не до конца исследованный вопрос включения в совместную работу тонколистовой мембранной оболочки подкрепляющего элемента под действием поперечной нагрузки и связанная с этим задача корректного назначения исходных



**Рисунок 2.** Схема эллиптического в плане цилиндрического покрытия с замкнутым опорным контуром: 1 – мембрана; 2 – элементы постели; 3 – опорный контур; 4 – затяжка.



**Рисунок 3.** Крытый конькобежный центр в Крылатском: а) общий вид; б) компьютерная модель.



**Рисунок 4.** Проект в виде стальной мембраны.

жесткостных характеристик подкрепляющих элементов [18].

Свой вклад внесли в развитие вопроса исследования совместной работы жёсткого элемента и мембранного покрытия на действие растягивающих нагрузок, приложенных к жёсткому элементу, следующие ученые: П. Ф. Папкович [19–20], А. А. Уманский [21], Г. Г. Ростовцев [22, 23], Г. Х. Хертель [24], В. Ф. Муцанов [25, 26], П. Г. Еремеев [1, 27, 28], П. Кун [29].

Широкое применение при определении эффективной ширины пластинки получил метод редуцированных коэффициентов впервые разработанный И. Г. Бубновым [30–31]. Предложенный И. Г. Бубновым метод позволил учесть работу обшивки в частях корпуса корабля, наиболее удаленных от нейтральной оси и поэтому сильно влияющих на прочность корпуса при изгибе.

Большой вклад по изучению взаимодействия тонколистового мембранного покрытия с элементами несущего каркаса ограждающих конструкций был внесён ЦНИИСК им. А. В. Кучеренко под руководством В. И. Трофимова [32].

В работе [33] приводится алгоритм расчёта пластинки на прочность и жёсткость с учётом податливости опорного контура, но в рамках разрабатываемого алгоритма назначение жесткостных характеристик подкрепляющих элементов осуществлялось без учёта редуцированного коэффициента.

Включения в тонколистовую пролётную конструкцию подкрепляющих элементов приводит к распределению усилий между мембраной и рёбрами. В работе [1] исследовалась НДС цилиндрической мембранной оболочки со следующими варьируемыми параметрами: пролёт покрытия от 25 до 100 м, относительная стрела провиса от 1/50 до 1/20 пролёта, шаг провисающих рёбер от 4 до 8 м с их продольной жёсткостью от 0 до 107 кН и изгибной жёсткостью от 0 до 105 кНм<sup>2</sup>. Анализ результатов исследований при равномерно распределённой нагрузке показал, что изгибная жёсткость подкрепляющих элементов мало влияет на работу конструкции.

П. Г. Еремеевым было установлено, что в практических расчётах тонколистовую оболочку, подкреплённую рёбрами, обладающими только продольной жёсткостью, можно заменять гладкой оболочкой приведённой толщины, если

продольная жёсткость рёбер составляет менее 20 % суммарной жёсткости оболочки. В остальных случаях следует выполнять расчёт численными методами с включением фактических продольных и жесткостных характеристик [1].

В работах [34–35] рассматривались существующие методики определения эффективной ширины пластинки при совместной работе подкрепляющего элемента жесткости и тонколистового мембранного покрытия, в том числе - метод редуцированных коэффициентов. Проанализирована применимость к решению данной задачи подходов, изложенных в работах [19, 36] где в качестве объекта исследований рассматривается совместная работа пластины и подкрепляющего элемента при действии поперечной нагрузки. Полученные результаты свидетельствуют о значительном влиянии геометрии оболочки на величину включения в совместную работу тонколистовой обшивки с внецентренно-сжатым (растянутым) подкрепляющим элементом, сформулирована необходимость их уточнения.

При этом сравнение полученных результатов осуществлялось с данными численных исследований, выполненных в конечно-элементной постановке при упрощенном моделировании подкрепляющего элемента стержневыми элементами общего вида, что в итоге позволило осуществить первичную оценку величины редуцированного коэффициента при совместной работе особо тонкой мембранной обшивки с подкрепляющим элементом.

Обособленными направлениями, объясняющими включение мембранной оболочки в совместную работу с подкрепляющим элементом, стало решение задач устойчивости пластинок, подкреплённых рёбрами жёсткости, которые нашли своё отражение в работах: С. П. Тимошенко [37], А. С. Локшина [38], R. Barbre [39–40], E. Melan [41], L. Rendulic [42], E. E. Lundquist [43], T. Карман [44], E. E. Sechler [45], Г. Винтер [46–48].

На основании проведённого анализа и выделения нерешённых вопросов сформулированы:

- **цель работы:** исследовать степень влияния кривизны покрытия, соотношения изгибных жесткостных характеристик оболочки и подкрепляющего элемента на напряжённо-деформированное состояние в зоне контакта;

- **объект исследования:** цилиндрическая безмоментная оболочка, подкреплённая элементом жёсткости;
- **предмет исследования:** напряжённо-деформированное состояние тонколистового мембранного покрытия и подкрепляющего элемента в зоне контакта.

## 2. Методы исследований

### 2.1. Обоснование условий применения МКЭ.

Расчёт тонколистовых мембранных покрытий относится к классу задач, в основу которых заложена теория безмоментных пологих оболочек, потому что их напряжённое состояние определяется в основном цепными напряжениями ввиду малой жёсткости мембраны на изгиб. Учёт данного фактора в сочетании с дискретным расположением подкрепляющих элементов приводит к необходимости использования МКЭ в геометрически нелинейной постановке.

Исследуемым объектом является цилиндрическая тонколистовая оболочка покрытия на прямоугольном плане нулевой гауссовой кривизны с размерами: длиной  $l = 24$  м, шириной  $b = 18$  м, толщиной равной  $t$  и соотношением кривизны,

состоящая из 65 999 узлов и 75 360 элементов, подкреплённая оболочечным элементом в виде двутавра, моделирование которого осуществлялось оболочечными элементами типа КЭ-344.

### 2.2. Моделирование поверхности.

#### 2.2.1 Моделирование поверхности цилиндрического мембранного покрытия в точечном исчислении.

Для исследований напряжённо-деформированного состояния тонколистового мембранного покрытия и подкрепляющего элемента в зоне контакта методом конечных элементов с учётом геометрической нелинейности необходимо сначала получить компьютерную модель мембранного покрытия и подкрепляющего элемента, параметризованных согласно исходным данным, с учётом необходимой конечно-элементной сети.

На (рис. 5) представлен чертёж цилиндрического тонколистового мембранного покрытия на прямоугольном плане, подкреплённого двутавровой балкой [48].

Поверхность мембранного покрытия представляет собой оболочку, построенную по следующей геометрической схеме: три отрезка прямых  $A_1A_2$ ,  $B_1B_2$ ,  $C_1C_2$  являются направляющими

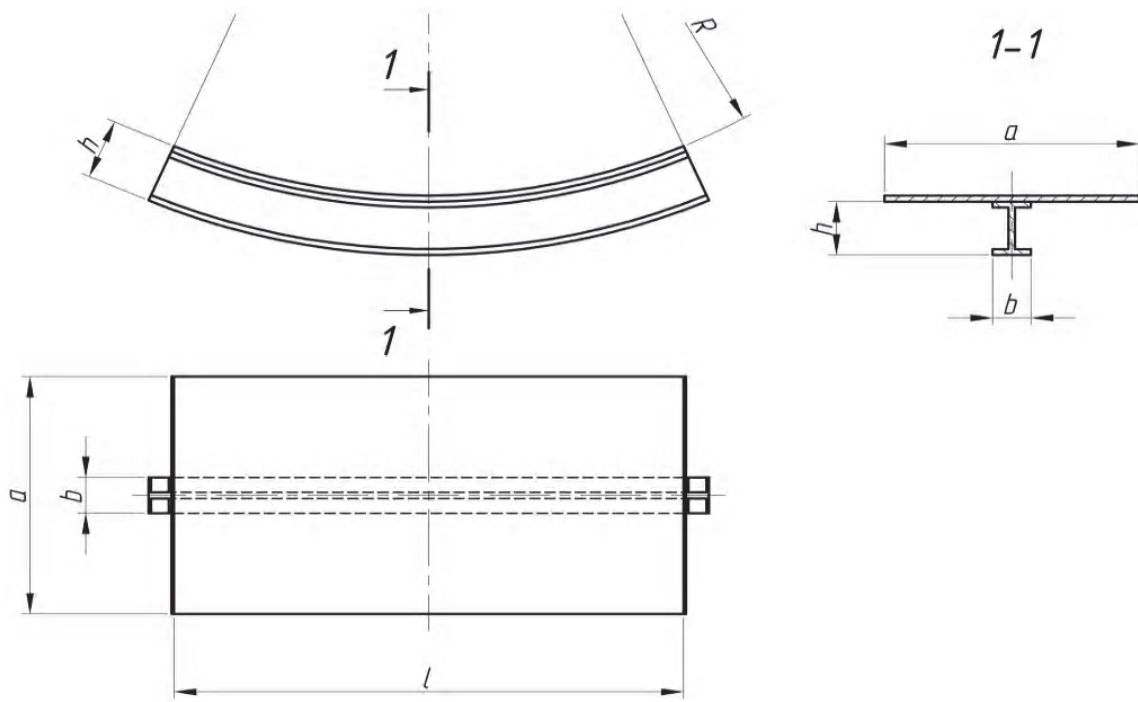
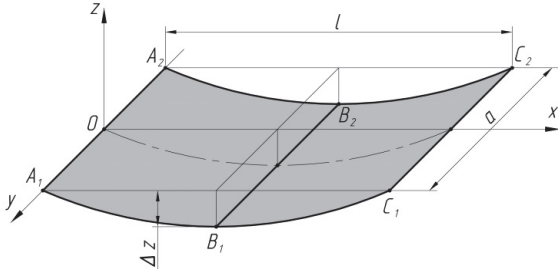


Рисунок 5. Чертёж цилиндрического мембранного покрытия с подкрепляющим элементом.

для построения поверхности, а дуга окружности  $\widehat{N_A N_B N_C}$  – образующей (рис. 6).



**Рисунок 6.** Геометрическая схема линейчатой поверхности мембранного покрытия.

Точечные уравнения направляющих прямых имеют следующий вид:

$$N_A = A_1 \bar{t} + A_2 t, N_B = B_1 \bar{t} + B_2 t, N_C = C_1 \bar{t} + C_2 t, \quad (1)$$

где  $t$  – текущий линейный параметр, который принадлежит интервалу:  $0 \leq t \leq 1$ ;

$\bar{t} = 1 - t$  – дополнение параметра  $t$  до 1.

Для определения образующей используем точечное уравнение окружности, проходящей через три точки [49]. Применительно к обозначениям точек и геометрических размеров цилиндрической оболочки и подкрепляющего элемента, приведенным на рис. 5, получим:

$$M = (N_A - N_C) \frac{\sin(\beta + \varphi) \sin(\gamma - \varphi)}{\sin \beta \sin \gamma} + (N_B - N_C) \frac{2 \cos \gamma \sin(\beta + \varphi) \sin \varphi}{\sin \beta \sin \gamma} + N_C, \quad (2)$$

где  $\beta = \angle N_A N_B N_C$  – угол при вершине  $N_B$  треугольника  $N_A N_B N_C$ ;

$\gamma = \angle N_B N_C N_A$  – угол при вершине  $N_C$  треугольника  $N_A N_B N_C$ ;

$\varphi$  – текущий угловой параметр, который принадлежит интервалу:  $0 \leq \varphi \leq (\pi - \beta)$ .

Подставив в точечное уравнение направляющих прямых линий, получим точечное уравнение цилиндрической поверхности оболочки мембранного покрытия:

$$M = (A_1 \bar{t} + A_2 t - C_1 \bar{t} - C_2 t) \lambda + (B_1 \bar{t} + B_2 t - C_1 \bar{t} - C_2 t) \psi + C_1 \bar{t} + C_2 t, \quad (3)$$

где  $\lambda = \frac{\sin(\beta + \varphi) \sin(\gamma - \varphi)}{\sin \beta \sin \gamma}$ ,

$$\psi = \frac{2 \cos \gamma \sin(\beta + \varphi) \sin \varphi}{\sin \beta \sin \gamma}.$$

Полученное уравнение линейчатой поверхности представлено в символьной точечной форме, которая сводится к системе параметрических уравнений посредством покоординатного расчёта. В результате получим базовую систему параметрических уравнений:

$$\begin{cases} x = (x_{A_1} \bar{t} + x_{A_2} t - x_{C_1} \bar{t} - x_{C_2} t) \lambda + \\ + (x_{B_1} \bar{t} + x_{B_2} t - x_{C_1} \bar{t} - x_{C_2} t) \psi + x_{C_1} \bar{t} + x_{C_2} t; \\ y = (y_{A_1} \bar{t} + y_{A_2} t - y_{C_1} \bar{t} - y_{C_2} t) \lambda + \\ + (y_{B_1} \bar{t} + y_{B_2} t - y_{C_1} \bar{t} - y_{C_2} t) \psi + y_{C_1} \bar{t} + y_{C_2} t; \\ z = (z_{A_1} \bar{t} + z_{A_2} t - z_{C_1} \bar{t} - z_{C_2} t) \lambda + \\ + (z_{B_1} \bar{t} + z_{B_2} t - z_{C_1} \bar{t} - z_{C_2} t) \psi + z_{C_1} \bar{t} + z_{C_2} t. \end{cases} \quad (4)$$

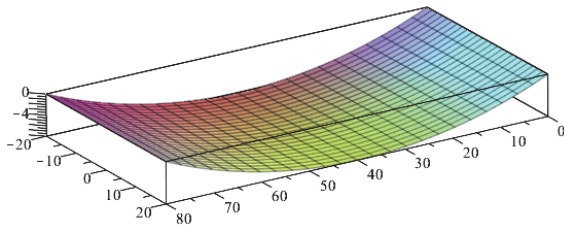
Координаты узловых точек, определяющих их взаимное положение, принимаем в соответствии с рис. 5:

$$\begin{cases} x_{A_1} = 0; y_{A_1} = \frac{a}{2}; z_{A_1} = 0; \\ x_{A_2} = 0; y_{A_2} = -\frac{a}{2}; z_{A_2} = 0; \\ x_{B_1} = \frac{l}{2}; y_{B_1} = \frac{a}{2}; z_{B_1} = -\Delta z; \\ x_{B_2} = \frac{l}{2}; y_{B_2} = -\frac{a}{2}; z_{B_2} = -\Delta z; \\ x_{C_1} = l; y_{C_1} = \frac{a}{2}; z_{C_1} = 0; \\ x_{C_2} = l; y_{C_2} = -\frac{a}{2}; z_{C_2} = 0. \end{cases} \quad (5)$$

Подставив координаты узловых точек в базовую систему параметрических уравнений, получим систему параметрических уравнений поверхности цилиндрического мембранного покрытия:

$$\begin{cases} x = -l \frac{\sin(\beta + \varphi) \sin(\gamma - \varphi)}{\sin \beta \sin \gamma} - \\ - l \frac{\cos \gamma \sin(\beta + \varphi) \sin \varphi}{\sin \beta \sin \gamma} + l; \\ y = a \left( \frac{1}{2} - t \right); \\ z = -\Delta z \frac{2 \cos \gamma \sin(\beta + \varphi) \sin \varphi}{\sin \beta \sin \gamma} \end{cases} \quad (6)$$

Далее визуализированную средствами системы компьютерной алгебры компьютерную модель полученной поверхности оболочки (рис. 7) экспортируем в формат \*.dxf с учётом необходимой разбивки и плотности конечно-элементной сетки прямоугольной и треугольной формы для импорта в систему конечно-элементного анализа напряжённо-деформированного состояния конструкций SCAD Office.



**Рисунок 7.** Визуализация компьютерной модели цилиндрической оболочки с конечно-элементной сетью.

**2.2.2. Моделирование цилиндрической поверхности верхней полки двутавровой балки.**

Верхняя полка двутавра совпадает с поверхностью мембранного покрытия, только ограни-

чена более короткими отрезками  $A'_1A'_2, B'_1B'_2, C'_1C'_2$  (рис. 8).

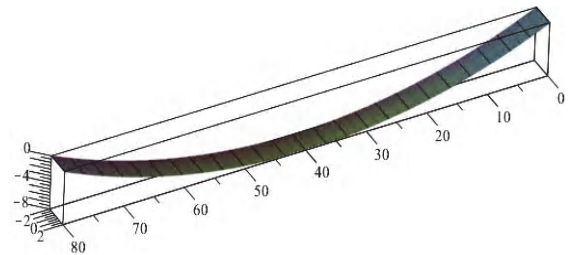
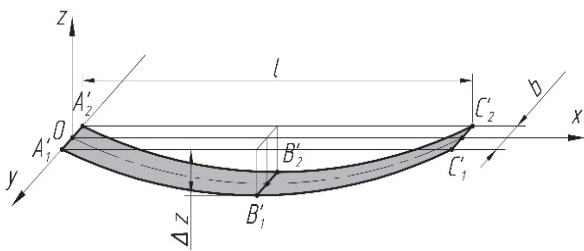
По аналогии с поверхностью оболочки мембранного покрытия, получим параметрические уравнения верхней полки:

$$\begin{cases} x = -l \left( \frac{\sin(\beta + \varphi) \sin(\gamma - \varphi)}{\sin \beta \sin \gamma} + \frac{\cos \gamma \sin(\beta + \varphi) \sin \varphi}{\sin \beta \sin \gamma} - 1 \right); \\ y = b \left( \frac{1}{2} - t \right); \\ z = -\Delta z \frac{2 \cos \gamma \sin(\beta + \varphi) \sin \varphi}{\sin \beta \sin \gamma}. \end{cases} \quad (7)$$

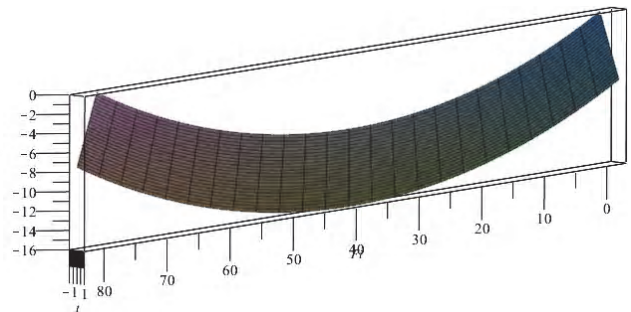
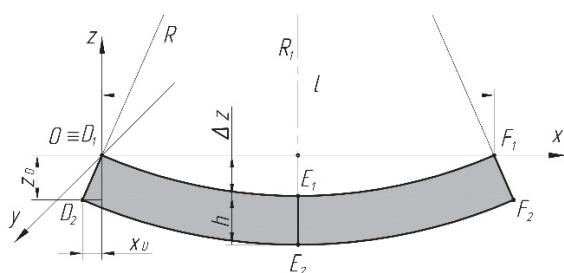
**2.2.3. Моделирование линейчатой поверхности стенки двутавровой балки для цилиндрической мембранной оболочки.**

Стенка двутавра представляет собой поверхность оболочки, для построения которой используем метод подвижного симплекса. Направляющими линиями являются отрезки  $D_1D_2, E_1E_2$  и  $F_1F_2$ , а образующей – дуга окружности (рис. 9).

В этом случае точечное уравнение поверхности будет следующим:



**Рисунок 8.** Геометрическая схема и компьютерная модель цилиндрической поверхности верхней полки двутавра.



**Рисунок 9.** Геометрическая схема и компьютерная модель линейчатой поверхности стенки двутавра.

$$M = (D_1\bar{t} + D_2t - F_1\bar{t} - F_2t) \times \frac{\sin(\beta + \varphi) \sin(\gamma - \varphi)}{\sin \beta \sin \gamma} + (E_1\bar{t} + E_2t - F_1\bar{t} - F_2t) \times \frac{2 \cos \gamma \sin(\beta + \varphi) \sin \varphi}{\sin \beta \sin \gamma} + C_1\bar{t} + C_2t \quad (8)$$

Координаты узловых точек:

$$\begin{aligned} x_{D_1} &= 0; \quad y_{D_1} = 0; \quad z_{D_1} = 0; \\ x_{D_2} &= -x_{D_1}; \quad y_{D_2} = 0; \quad z_{D_2} = -z_{D_1}; \\ x_{E_1} &= \frac{l}{2}; \quad y_{E_1} = 0; \quad z_{E_1} = -\Delta z; \\ x_{E_2} &= \frac{l}{2}; \quad y_{E_2} = 0; \quad z_{E_2} = -\Delta z - h; \\ x_{F_1} &= l; \quad y_{F_1} = 0; \quad z_{F_1} = 0; \\ x_{F_2} &= l + x_{D_1}; \quad y_{F_2} = 0; \quad z_{F_2} = -z_{D_1}. \end{aligned}$$

Подставив координаты узловых точек, получим параметрические уравнения поверхности стенки двутавра:

$$\begin{cases} x = -\left(2 \frac{hl}{2R} t + l\right) \times \left[ \frac{\sin(\beta + \varphi) \sin(\gamma - \varphi)}{\sin \beta \sin \gamma} - \frac{\cos \gamma \sin(\beta + \varphi) \sin \varphi}{\sin \beta \sin \gamma} - 1 \right] - \frac{hl}{2R} t; \\ y = 0; \\ z = \left(-\Delta z - ht + \frac{h(R - \Delta z)}{R} t\right) \times \frac{2 \cos \gamma \sin(\beta + \varphi) \sin \varphi}{\sin \beta \sin \gamma} - \frac{h(R - \Delta z)}{R} t. \end{cases} \quad (9)$$

### 2.2.4. Моделирование линейчатой поверхности нижней полки двутавровой балки для мембранного покрытия изогнутого в одном направлении.

Для моделирования нижней полки используем точечное уравнение цилиндрической поверхности и базовую систему параметрических уравнений, полученную для поверхности мембранного покрытия. По аналогии с верхней полкой двутавра, направляющими будут отрезки  $A_1''A_2''$ ,  $B_1''B_2''$ ,  $C_1''C_2''$ , а образующей – дуга окружности (рис. 10).

С учётом координат исходных точек, получим следующие параметрические уравнения искомой линейчатой поверхности:

$$\begin{cases} x = -\left(2 \frac{hl}{2R} t + l\right) \times \left[ \frac{\sin(\beta + \varphi) \sin(\gamma - \varphi)}{\sin \beta \sin \gamma} + \frac{\cos \gamma \sin(\beta + \varphi) \sin \varphi}{\sin \beta \sin \gamma} - 1 \right] - \frac{hl}{2R} t; \\ y = \frac{b}{2}; \\ z = -\Delta z \left(\frac{R + h}{R}\right) \frac{2 \cos \gamma \sin(\beta + \varphi) \sin \varphi}{\sin \beta \sin \gamma} - \frac{h(R - \Delta z)}{R}. \end{cases} \quad (10)$$

### 3. Результаты исследований.

Дальнейшие численные исследования проводились с использованием программного обеспечения SCAD Office. Расчётная схема оболочки подкрепляющего элемента смоделирована при помощи плоских оболочечных конечных элементов типа КЭ-344 и состоящая из 65 999 узлов и

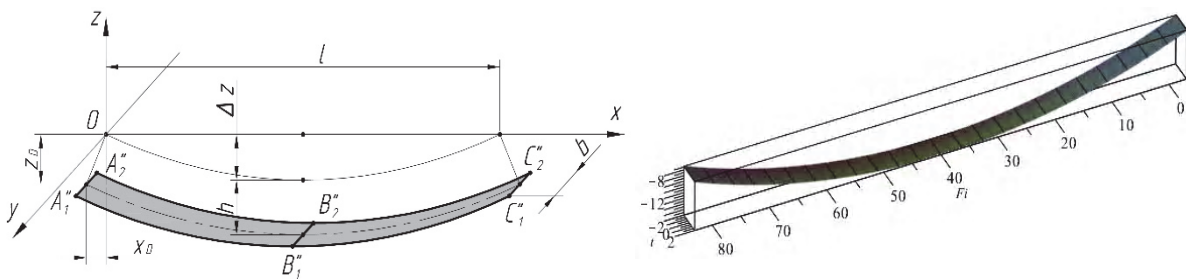


Рисунок 10. Геометрическая схема и компьютерная модель цилиндрической поверхности нижней полки двутавра.



75 360 элементов. Прикладываемая распределённая по площади нагрузка интенсивностью  $q = 49 \text{ кН/м}^2$  ориентирована вдоль оси подкрепляющего элемента.

Закрепление узлов по поперечным сторонам, с учётом симметрии решаемой задачи, допускает линейные перемещения лишь вдоль оси  $Z$  и закреплены от углов поворота  $U_z$  и  $U_y$ . Узлы по продольным сторонам закреплены в виде шарнирно-неподвижных опор, ограничивающих линейные перемещения вдоль осей  $X, Y, Z$  и углов поворота  $U_y$  и  $U_z$  (рис 11).

На основании проведённого численного эксперимента были построены эпюры нормальных напряжений и гистограммы распределения напряжений на исследуемом участке при включении мембранного покрытия в совместную работу с подкрепляющим элементом жёсткости двутаврового сечения (рис. 12).

На рис. 13 приведены результаты численного расчёта участка тонколистового мембранного покрытия, вовлекаемого в совместную работу с подкрепляющим элементом жёсткости.

На рис. 14 изображено распределения изгибных напряжений от действия поперечной нагрузки на плоскую и цилиндрическую тонколистовую мембранную оболочку при включении в совместную работу элемента жёсткости.

Закономерности изменения напряжений, которые возникли от поперечной нагрузки в тонколистовой мембране и подкрепляющем элементе жёсткости, определяются коэффициентами  $k_1, k_2, k_3$ , которые характеризуют степень включения в совместную работу с мембранной оболочкой:

$$k_1 = \frac{\sigma_M^{m,\max}}{\sigma_M^{m,0}}, \tag{11}$$

$$k_2 = \frac{\sum_{i=1}^n \left( \frac{\sigma_M^{m,0}}{\sigma_M^0} \right)_i}{n}, \tag{12}$$

$$k_3 = \frac{2l}{b_M}, \tag{13}$$

где  $k_1$  – характеризует величину отношения напряжений в мембране на прилегающем и надопорном участках;

$k_2$  – характеризует соотношение величин напряжений в надопорном участке мембраны и полки подкрепляющего элемента;

$k_3$  – характеризующий длину примыкающего участка мембраны;

$\sigma_M^{m,0}$  – изгибные напряжения в элементе мембраны, расположенном над полкой двутавра;

$\sigma_M^{m,\max}$  – максимальные изгибные напряжения в элементе мембраны, примыкающем к подкрепляющему элементу;

$\sigma_M^0$  – изгибные напряжения в полке двутавра;

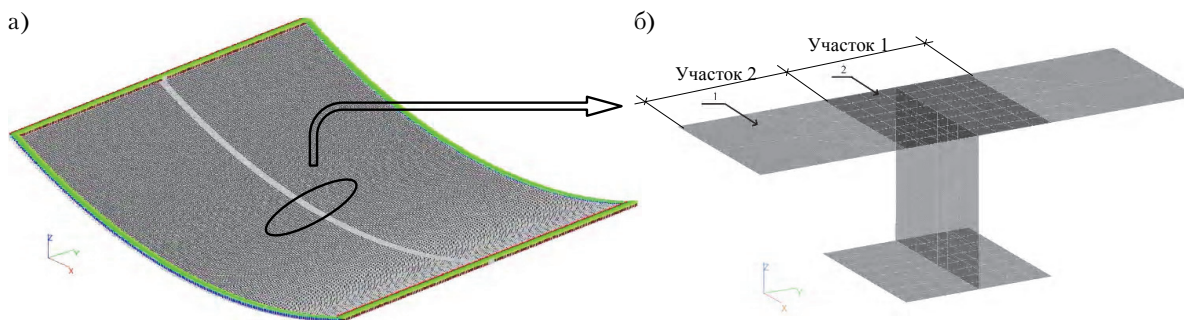
$n$  – количество конечных элементов;

$l$  – длина вовлекаемого участка в совместную работу, мм;

$b_M$  – половина ширины мембранного покрытия над полкой двутавра, мм.

#### 4. Анализ результатов исследований.

При проведении вычислительного эксперимента были получены экспериментальные данные для определения зависимости напряжённо-деформированного состояния цилиндрической



**Рисунок 11.** Схема цилиндрического мембранного покрытия на прямоугольном плане: а) общий вид; б) фрагмент участка мембранного покрытия, подкреплённого элементом жёсткости: 1 – оболочечный элемент мембраны (КЭ-344); 2 – оболочечный элемент полки (КЭ-344).

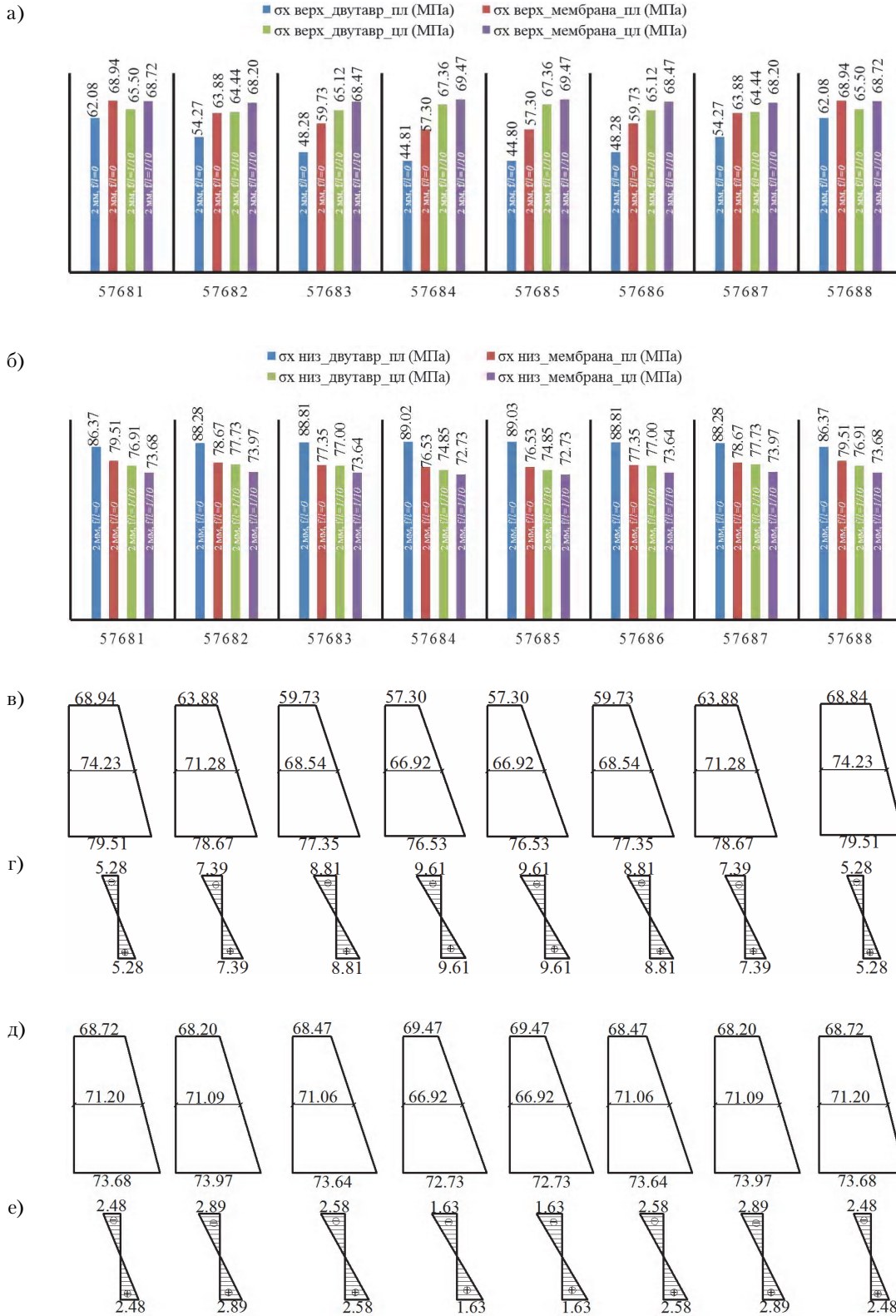


Рисунок 12. Эпюры суммарных нормальных напряжений от изгибающего момента М и продольной силы N в плоской и цилиндрической мембране на участке № 1 (в соответствии с рис. 11б): а, б) напряжения в верхней полке двугавра и мембране; в, д) эпюры суммарных нормальных напряжений от изгибающего момента М и продольной силы N; г, е) эпюры напряжений от изгибающего момента.

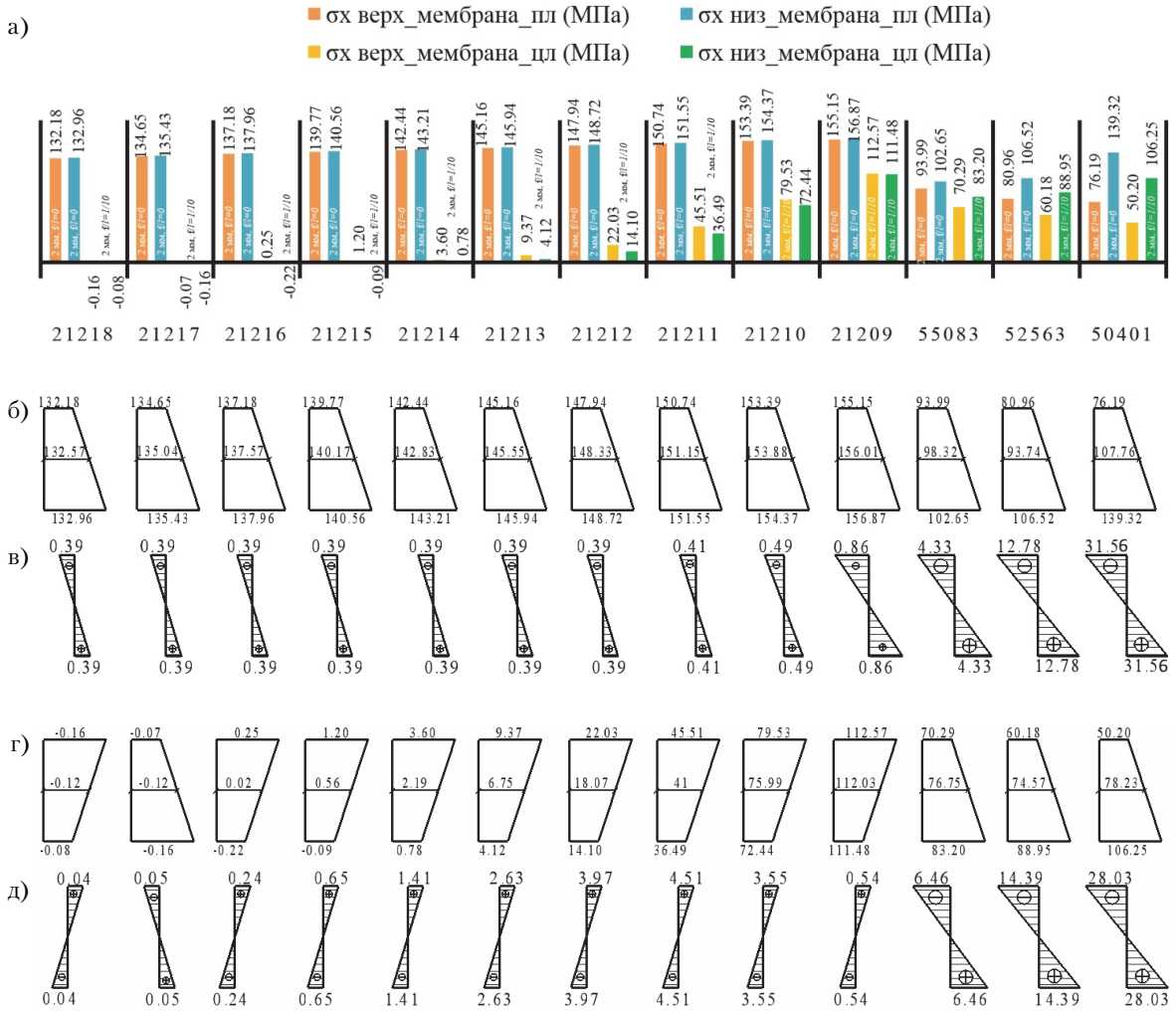


Рисунок 13. Эпюры суммарных нормальных напряжений от изгибающего момента М и продольной силы N в плоской и цилиндрической мембране на участке № 2 (в соответствии с рис. 11б): а) напряжения в мембране; б), г) эпюры суммарных нормальных напряжений от изгибающего момента М и продольной силы N; в), д) эпюры напряжений от изгибающего момента.

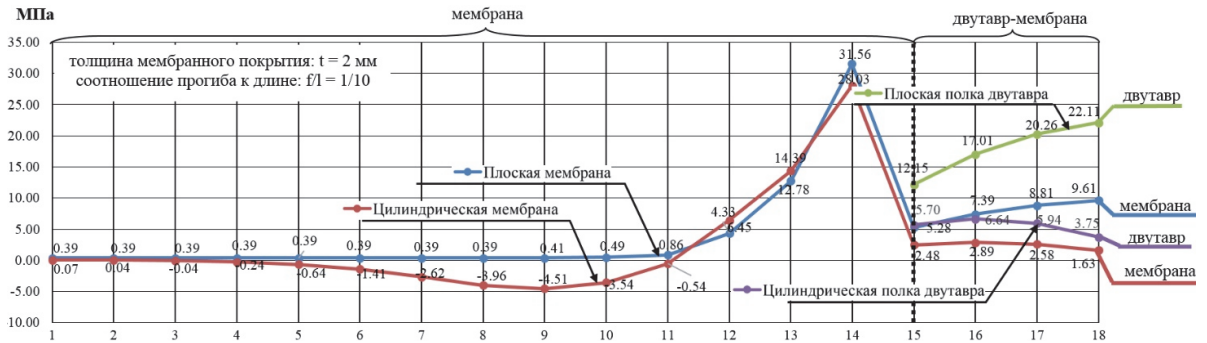


Рисунок 14. Изменения изгибных напряжений в полке двутавра и мембране.

оболочки мембранного покрытия на прямоугольном плане (табл. 1).

На рис. 15–17 представлены графики изменения каждого коэффициента в зависимости от

Таблица 1. Экспериментальные данные для математического моделирования

Коэффициенты	$x_1 = \frac{EI_p}{Db_M}$	$x_2 = K$				
		0	0,0083	0,0111	0,0165	0,0321
$k_1 = \frac{\sigma_M^{m,max}}{\sigma_M^{m,0}}$	8,89	4,06	6,56	7,01	7,92	11,7
	1,11	1,45	1,79	1,8	1,82	1,9
	0,33	1,03	1,15	1,14	1,12	1,09
$k_2 = \frac{\sum_{i=1}^n \left( \frac{\sigma_M^{m,0}}{\sigma_M^0} \right)_i}{n}$	8,89	0,43	0,43	0,43	0,43	0,43
	1,11	0,87	0,87	0,87	0,87	0,87
	0,33	1,3	1,3	1,3	1,3	1,3
$k_3 = \frac{2l}{b_M}$	8,89	5	11	23	33	39
	1,11	7	12	22	31	38
	0,33	8	14	22	30	37

где  $K$  – кривизна оболочки мембранного покрытия.



Рисунок 15. Зависимость  $k_1$  от жесткостных характеристик  $EI_p / Db_M$  и кривизны мембранной оболочки  $K$ .

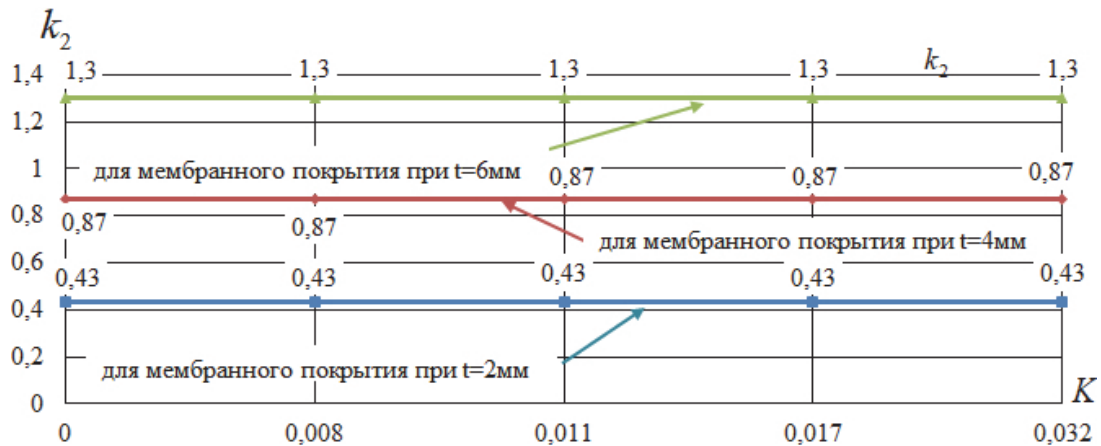


Рисунок 16. Зависимость  $k_2$  от жесткостных характеристик  $EI_p / Db_M$  и кривизны мембранной оболочки  $K$ .

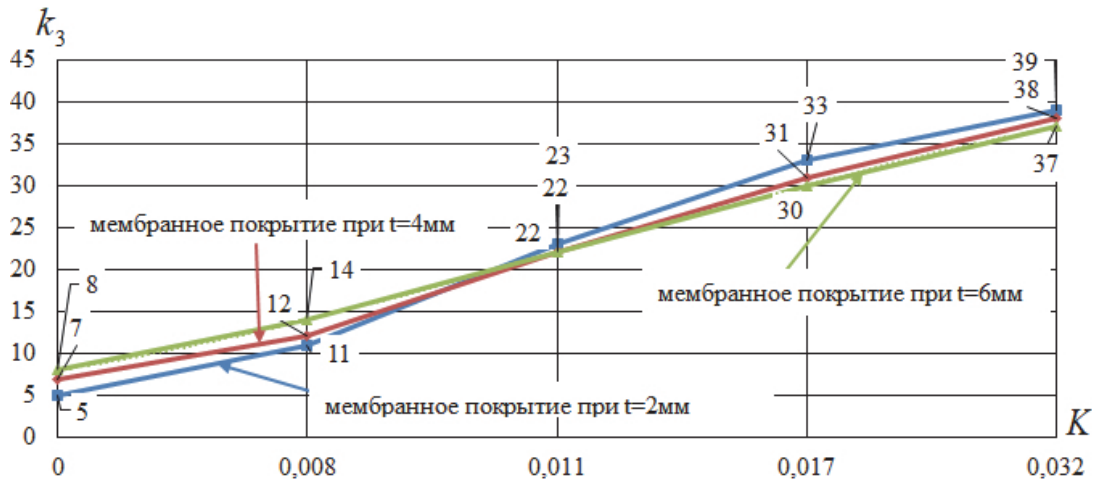


Рисунок 17. Зависимость  $k_3$  от жесткостных характеристик  $EI_p / Db_M$  и кривизны мембранной оболочки  $K$ .

жесткостных характеристик и кривизны поверхности, характеризующие включения подкрепляющего элемента в совместную работу с тонколистовой мембранной оболочкой.

Анализируя зависимости, представленные на рис. 15–17, можно прийти к следующим выводам:

- 1) коэффициент  $k_1$ , характеризующий величину отношения напряжений в мембране на прилегающем и надпорном участках:
  - зависит от соотношения изгибных жесткостей в мембране и подкрепляющего элемента;
  - имеет тенденцию к росту с увеличением стрелы провиса для особо тонких мембран.
- 2) коэффициент  $k_2$ , характеризующий соотношение величин напряжений в надпорном участке мембраны и полке подкрепляющего элемента не зависит от стрелы провисания мембраны, а является лишь обратной пропорциональной функцией соотношения  $\gamma = EI_p / Db_M$ .
- 3) коэффициент  $k_3$ , характеризующий длину примыкающего участка мембраны, участвующего в совместной работе с подкрепляющим элементом на поперечный изгиб:
  - существенно зависит от изменения кривизны мембраны;
  - практически не зависит от изменения соотношения  $\gamma = EI_p / Db_M$ .

Для использования методов математического моделирования исходные экспериментальные данные (табл. 1), необходимо реорганизовать (табл. 2).

Следует отметить, что для первых двух функций  $k_1$  и  $k_2$  используются исходные данные непосредственно из таблицы 2. Для увеличения точности полученной модели применительно к факторам  $x_1$  и  $x_2$ , определяющих функцию  $k_3$ , было использовано нормирование (т.е. каждое отдельное значение было поделено на максимальное). В результате получим следующие значения факторов (табл. 3).

Чтобы перейти от нормированных значений фактора к натуральным, достаточно использовать следующие зависимости:

$$x_1 = \frac{x_{1H}}{8,89}, \quad x_2 \approx \frac{x_{2H}}{0,032}, \quad (14)$$

где  $x_{1H}$  и  $x_{2H}$  – нормированные значения факторов  $x_1$  и  $x_2$ .

В качестве аппроксимирующих функций предлагается использовать следующие полиномиальные зависимости:

$$\begin{aligned} k_1 &= a_1 x_1^2 x_2 + b_1 x_1^2 + c_1 x_1 x_2 + \\ &\quad + d_1 x_1 + e_1 x_2 + f_1, \\ k_2 &= a_2 x_1^2 + b_2 x_1 x_2 + c_2 x_1 + d_2 x_2 + e_2, \\ k_3 &= a_3 x_{2H}^6 x_{1H} + b_3 x_{2H}^6 + c_3 x_{2H}^5 x_{1H} + \\ &\quad + d_3 x_{2H}^5 + e_3 x_{2H}^4 x_{1H} + f_3 x_{2H}^4 + \\ &\quad + g_3 x_{2H}^3 x_{1H} + h_3 x_{2H}^3 + i_3 x_{2H}^2 x_{1H} + \\ &\quad + j_3 x_{2H}^2 + k_3 x_{1H} x_{2H} + l_3 x_{2H} + m_3. \end{aligned} \quad (15)$$

Для поиска максимальных значений коэффициента детерминации изменяемые ячейки переменных выбирались в соответствии с приведенными

аппроксимирующими функциями. Таким образом, задача поиска решения в программном пакете MS Excel была поставлена следующим образом: определить такие значения полиномиальных коэффициентов, которые обеспечивают максимальное значение коэффициента детерминации на интервале от 0 до 1. Найденные в результате вычислений полиномиальные коэффициенты представлены в таблице 4.

При этом были достигнуты следующие коэффициенты детерминации:

- для первой модели  $k_1 = f_1(x_1, x_2): R^2 = 0,998$ ;
- для второй модели  $k_2 = f_2(x_1, x_2): R^2 = 0,999$ ;
- для третьей модели  $k_3 = f_3(x_1, x_2): R^2 = 0,997$ .

С учётом полиномиальных коэффициентов математических моделей, приведенных в таблице 4, и округленных до тысячных, получим:

$$\begin{aligned}
 k_1 &= 2,55x_1^2x_2 - 0,046x_1^2 + 3,057x_1x_2 + \\
 &\quad + 0,801x_1 + 2,925x_2 + 0,789, \\
 k_2 &= 0,058x_1^2 - 0,009x_1x_2 - 0,633x_1 + \\
 &\quad + 0,02x_2 + 1,502, \\
 k_3 &= 258,033x_{2H}^6x_{1H} + 546,743x_{2H}^6 - \\
 &\quad - 3,064x_{2H}^5x_{1H} - 0,754x_{2H}^5 - \\
 &\quad - 260,239x_{2H}^4x_{1H} - 543,407x_{2H}^4 - \\
 &\quad - 258,591x_{2H}^3x_{1H} - 551,504x_{2H}^3 + \\
 &\quad + 340,309x_{2H}^2x_{1H} + 686,824x_{2H}^2 - \\
 &\quad - 74,744x_{1H}x_{2H} - 107,228x_{2H} + 6,672.
 \end{aligned} \quad (16)$$

Следует отметить, что в первые две модели можно непосредственно подставлять натуральные значения факторов  $x_1$  и  $x_2$ . Для третьей модели необходимо выполнить переход от норми-

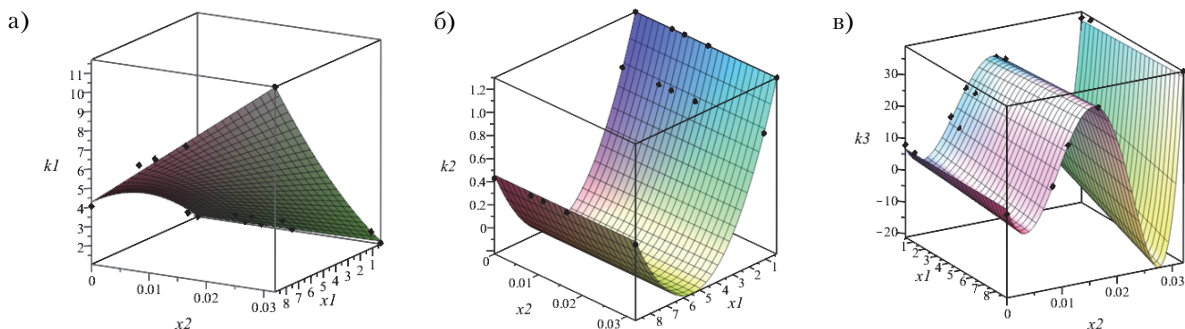
рованных значений факторов к натуральным, используя выражения (4).

Выполним визуализацию полученных моделей в одной из систем компьютерной алгебры (рис. 18).

Как видно из рис. 18 вторая и третья модели, несмотря на высокие значения коэффициента детерминации, склонны к незапланированным осцилляциям, что приводит к необходимости дополнительных исследований, связанных с использованием двумерной интерполяции для построения искомых моделей.

## Выводы

1. Для плоской подкрепленной мембраны увеличение в линейной зависимости ее толщины ( $t_M = 2, 4, 6$ ) и соответственно изменение соотношения жесткостей  $EI_p / Db_M$ :
  - приводит к снижению по убывающей квадратичной зависимости величин пиковых напряжений в мембране (соответственно 31,56, 22,35 и 19,42 МПа);
  - практически не сказывается на длине участка, вовлекаемого в совместную работу с подкрепляющим элементом ( $2l / b_M \approx 2$ );
  - приводит к перераспределению усилий между мембраной, и подкрепляющим элементом, заключается в увеличении доли усилий, воспринимаемых мембраной и более «сглаженному» виду дальнейшей эпюры.
2. Искривление плоской мембраны по цилиндрической поверхности приводит к:
  - синусоидальной затухающей эпюре локальных напряжений и увеличивает длину присоединенного участка мембраны до ( $2l / b_M \approx 2,5$ );



**Рисунок 18.** Визуализация полученных моделей в виде поверхностей отклика: а) для коэффициента  $k_1$ ; б) для коэффициента  $k_2$ ; в) для коэффициента  $k_3$ .

Таблица 2. Реорганизованные исходные данные для математического моделирования

$x_1$	$x_2$	$k_1$	$k_2$	$k_3$
8,89	0	4,06	0,43	5
1,11	0,008313	1,79	0,87	12
0,33	0,011062	1,14	1,3	22
8,89	0,016502	7,92	0,43	33
1,11	0,032051	1,9	0,87	38
0,33	0	1,03	1,3	8
8,89	0,008313	6,56	0,43	11
1,11	0,011062	1,8	0,87	22
0,33	0,016502	1,12	1,3	30
8,89	0,032051	11,7	0,43	39
1,11	0	1,45	0,87	7
0,33	0,008313	1,15	1,3	14
8,89	0,011062	7,01	0,43	23
1,11	0,016502	1,82	0,87	31
0,33	0,032051	1,09	1,3	37

Таблица 3. Нормированные значения факторов для построения модели  $k_3 = f_3(x_1, x_2)$

$x_1$		$x_2$	
Натуральные значения фактора	Нормированные значения фактора	Натуральные значения фактора	Нормированные значения фактора
8,89	1,00	0	0
1,11	0,13	0,008313	0,259352
0,33	0,04	0,011062	0,345133
–	–	0,016502	0,514851
–	–	0,032051	1

- снижению пиков напряжений в присоединенном участке мембраны до 25 % при снижении величины изгибных напряжений  $\sigma_m$  и увеличению напряжений от действия продольной силы  $\sigma_N$ ;
- более активному вовлечению мембраны в совместную работу с подкрепляющим элементом, о чем свидетельствует рост коэффициента  $k_1$  с 4,06 до 11,7 при неизменном соотношении напряжений в полке двутавра и расположенном над ним участке мембраны  $k_2 \approx 1,74$ ;
- большему вовлечению в совместную работу мембраны, расположенной над полкой двутавра

$$\left( \frac{\sigma_m^{пл}}{\sigma_{де}^{пл}} = 0,85 \rightarrow \frac{\sigma_m^и}{\sigma_{де}^и} = 0,9 \right).$$

3. Представленные модели (рис. 18) зависимости для определения  $k_1-k_3$  с высокой точностью описывают сформированные закономерности, которые могут быть использованы при уточнённом определении изгибных геометрических характеристик подкрепляющих элементов цилиндрических мембранных оболочек, а также напряжённо-деформированного состояния элементов в зоне примыкания.
4. Как видно из полученных результатов, предложенный подход к аппроксимации двумерных

Таблица 4. Полиномиальные коэффициенты для математических моделей (2)

Обозначение полиномиального коэффициента	Значение полиномиального коэффициента	Обозначение полиномиального коэффициента	Значение полиномиального коэффициента	Обозначение полиномиального коэффициента	Значение полиномиального коэффициента
$a_1$	2,550057	$a_2$	0,057575	$a_3$	258,0334
$b_1$	-0,0457	$b_2$	-0,00864	$b_3$	546,7433
$c_1$	3,056887	$c_2$	-0,6325	$c_3$	-3,06409
$d_1$	0,801216	$d_2$	0,020376	$d_3$	-0,75433
$e_1$	2,924617	$e_2$	1,501865	$e_3$	-260,239
$f_1$	0,789455	–	–	$f_3$	-543,407
–	–	–	–	$g_3$	-258,591
–	–	–	–	$h_3$	-551,504
–	–	–	–	$i_3$	340,3086
–	–	–	–	$j_3$	686,8235
–	–	–	–	$k_3$	-74,7441
–	–	–	–	$l_3$	-107,228
–	–	–	–	$m_3$	6,671995

экспериментальных данных является в достаточной степени гибким и эффективным инструментом, имеющим все необходимые свойства для обобщения на многомерное пространство, но обладает недостатками, присущими классическому методу наименьших квадратов в части возникновения незапланированных осцилляций между узловыми точками аппроксимации.

5. Несомненным преимуществом предложенного метода является то, что полученные в результате аппроксимации уравнения, в боль-

шинстве случаев, получаются не в кодированном виде, а в натуральном. В случае же, когда было использовано нормирование факторов, переход к натуральным значениям не представляет никакого труда путём простейшей замены переменных линейной функцией. Использование нормирования исходных данных, которое является не чем иным как заменой переменных, является также эффективным инструментом, позволяющим в значительной мере повысить точность результатов моделирования.

## Литература

1. Еремеев, П. Г. Пространственные тонколистовые металлические конструкции покрытий / П. Г. Еремеев. – Москва : Изд-во Ассоц. строит. вузов, 2006. – 560 с. – Текст : непосредственный.
2. Власов, В. З. Общая теория оболочек и ее приложения в технике / В. З. Власов. – Москва ; Ленинград : Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1949. – 784 с. – Текст : непосредственный.

## References

1. Yermeyev, P. G. Spatial thin-sheet metal structures of coatings. – Moscow : Publishing house of the Association of Construction Universities, 2006. – 560 p. – Text : direct. (in Russian)
2. Vlasov, V. Z. General theory of shells and its applications in technology. – Moscow ; Leningrad: State Publishing House of Technical and Theoretical Literature, 1949. – 784 p. – Text : direct. (in Russian)



3. Новожилов, В. В. Теория тонких оболочек / В. В. Новожилов. – 2-е изд., доп. и перераб. – Ленинград : Судпромгиз, 1962. – 431 с. – Текст : непосредственный.
4. Гольденвейзер, А. Л. Теория упругих тонких оболочек / Гольденвейзер А. Л. – Москва : Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1953. – 544 с. – Текст : непосредственный.
5. Лурье, А. И. Статика тонкостенных упругих оболочек / А. И. Лурье. – Москва ; Ленинград : Гостехиздат, 1947. – 252 с. – Текст : непосредственный.
6. Колкунов, Н. В. Основы расчета упругих оболочек : [для строительных специальностей вузов] / Н. В. Колкунов. – 2-е изд., перераб. и доп. – Москва : Высшая школа, 1972. – 296 с. – Текст : непосредственный.
7. Никиреев, В. М. Практические методы расчета оболочек / В. М. Никиреев, В. Л. Шадурский. – Москва : Стройиздат, 1966. – 271 с. – Текст : непосредственный.
8. Ржаницын, А. Р. Безмоментная теория пологих оболочек / А. Р. Ржаницын. – Текст : непосредственный // Расчет пространственных конструкций : сборник. – Москва : Госстройиздат, 1955. – Выпуск III. – С. 135–147.
9. Тимошенко, С. П. Пластинки и оболочки / С. П. Тимошенко ; пер. с англ. В. И. Контовт. – Москва ; Ленинград : Гостехиздат, 1948. – 460 с. – Текст : непосредственный.
10. Мущанов, В. Ф. Висячая ортотропная металлическая оболочка покрытия производственного здания с подвесным транспортным оборудованием : специальность 05.23.01 «Строительные конструкции, здания и сооружения» : автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата технических наук / Мущанов Владимир Филиппович ; Московский инженерно-строительный институт им. В. В. Куйбышева. – Москва, 1986. – 24 с. – Текст : непосредственный.
11. Расчет и проектирование пространственных металлических конструкций : учебное пособие для студентов строительного профиля, магистрантов, аспирантов, а также послевузовской подготовки и переподготовки / Е. В. Горохов [и др.] ; под общей редакцией Е. В. Горохова. – Макеевка : ДонНАСА, 2012. – 560 с. – Текст : непосредственный.
12. Конструкции стационарных покрытий над трибунами стадионов : монография / Е. В. Горохов, В. Ф. Мущанов, Р. И. Кинаш [и др.]. – 2-е изд., испр. и доп. – Макеевка : ДонНАСА, 2008. – 404 с. – Текст : непосредственный.
13. Канчели, Н. В. Квазицилиндрическая стальная мембранная оболочка покрытия на прямоугольном плане / Н. В. Канчели, М. Д. Филиппов. – Текст : непосредственный // Экспресс-информация. Строительные конструкции. – Москва : ВНИИИС, 1983. – Серия II. – Выпуск 10. – С. 7–10.
3. Novozhilov, V. V. Thin shell theory. – 2nd edition, supplemented and revised. – Leningrad : Sudpromgiz, 1962. – 431 p. – Text : direct. (in Russian)
4. Goldenveyzer, A. L. Theory of elastic thin shells. – Moscow : State Publishing House of Technical and Theoretical Literature, 1953. – 544 p. – Text : direct. (in Russian)
5. Lurye, A. I. The statics of thin-walled elastic shell. – Moscow ; Leningrad : Gostekhizdat, 1947. – 252 p. – Text : direct. (in Russian)
6. Kolkunov, N. V. Basics of calculating elastic shells : [for construction specialties of universities]. – 2nd edition, supplemented and revised. – Moscow : High School, 1972. – 296 p. – Text : direct. (in Russian)
7. Nikireyev, V. M.; Shadursky, V. L. Practical methods for calculating shells. – Moscow : Stroyizdat, 1966. – 271 p. – Text : direct. (in Russian)
8. Rzhantsyn, A. R. Momentless theory of shallow shells. – Text : direct. – In: *Calculation of spatial structures : collection.* – Moscow : Gosstroyizdat, 1955. – Issue III. – P. 135–147. (in Russian)
9. Timoshenko, S. P.; translation from English V. I. Kontovt. Plates and shells. – Moscow ; Leningrad : Gostekhizdat, 1948. – 460 p. – Text : direct. (in Russian)
10. Mushchanov, V. F. Hanging Orthotropic Metal Cladding Covering Industrial Building with Hanging Transport Equipment : specialty 05.23.01 «Building structures, buildings and structures» : abstract of thesis of Ph. D. in Engineering ; Moscow Civil Engineering Institute named after V. V. Kuibyshev. – Moscow, 1986. – 24 p. – Text : direct. (in Russian)
11. Gorokhov, Ye. V. [et. al.]; edited by E. V. Gorokhov. Calculation and design of spatial metal structures : a textbook for students of the construction profile, undergraduates, graduate students, as well as postgraduate training and retraining. – Makeevka : DNACEA, 2012. – 560 p. – Text : direct. (in Russian)
12. Ye. V. Gorokhov, V. F. Mushchanov, R. I. Kinash [et. al.]. Construction of stationary coverings over the stands of stadiums : monograph. – 2nd edition, supplemented and revised. – Makeevka : DNACEA, 2008. – 404 p. – Text : direct. (in Russian)
13. Kancheli, N. V.; Filipov M. D. Quasi-cylindrical steel membrane cladding on a rectangular plan. – Text : direct. – In: *Express information. Building construction.* – Moscow : All-Russian Scientific Research Institute of Certification, 1983. – Series II. – Issue 10. – P. 7–10. (in Russian)
14. Yendzhiyevsky, L. V. Nonlinear deformations of ribbed shells. – Krasnoyarsk : Publishing house of Krasnoyarsk University, 1982. – 295 p. – Text : direct. (in Russian)
15. Lyudkovsky, I. G.; Ivanov, M. A. Hanging coverings in the form of thin-sheet membranes. – Text : direct. – In: *Spatial structures of buildings and structures.* – 1972. – № I. – P. 139–144. (in Russian)
16. Lyudkovsky, I. G.; Ivanov, M. A.; Pasyuta, A. V.; Filyakin, A. A. Hanging shells with external reinforcement. – Text : direct. – In: *At construction*

14. Енджиевский, Л. В. Нелинейные деформации ребристых оболочек / Л. В. Енджиевский. – Красноярск : Изд-во Краснояр. ун-та, 1982. – 295 с. – Текст : непосредственный.
15. Людковский, И. Г. Висячие покрытия в виде тонколистковых мембран / И. Г. Людковский, М. А. Иванов. – Текст : непосредственный // *Пространственные конструкции зданий и сооружений*. – 1972. – № 1. – С. 139–144.
16. Висячие оболочки покрытий с внешним армированием / И. Г. Людковский, М. А. Иванов, А. В. Пасюта, А. А. Филиакин. – Текст : непосредственный // *На стройках России*. – 1987. – № 11. – С. 7–11.
17. Муцанов, В. Ф. Висячая ортотропная металлическая оболочка покрытия производственного здания с подвесным транспортным оборудованием : специальность 05.23.01 «Строительные конструкции, здания и сооружения» : диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук / Муцанов Владимир Филиппович ; Московский инженерно-строительный институт им. В. В. Куйбышева. – Москва, 1986. – 173 с. – Текст : непосредственный.
18. Муцанов, В. Ф. Учет совместной работы тонколистной мембраны с подкрепляющими элементами стабилизирующей системы / В. Ф. Муцанов, В. А. Шпиньков. – Текст : электронный // *Металлические конструкции*. – 2016. – Том 22, № 2. – С. 79–89. – URL: [http://donnasa.ru/publish\\_house/journals/mk/2016-2/02\\_mushchanov\\_shpinkov.pdf](http://donnasa.ru/publish_house/journals/mk/2016-2/02_mushchanov_shpinkov.pdf) (дата обращения: 09.06.2021).
19. Папкович, П. Ф. Труды по строительной механике корабля. В 4 томах. Том 3. Сложный изгиб стержней и изгиб пластин / П. Ф. Папкович ; под общей редакцией В. В. Екимова. – Ленинград : Судпромгиз, 1962. – 527 с. – Текст : непосредственный.
20. Папкович, П. Ф. Теория упругости : учебник / П. Ф. Папкович. – Ленинград ; Москва : Оборонгиз, 1939. – 640 с. – Текст : непосредственный.
21. Прочность и устойчивость тонкостенных конструкций в самолетостроении : сборник рефератов и переводов / под ред. А. А. Уманского и П. М. Знаменского. – Москва : Центральный аэрогидродинамический институт им. профессора Н. Е. Жуковского, 1937. – 217 с. – Текст : непосредственный.
22. Ростовцев, Г. Г. Приведенная ширина изотропной и анизотропной плоской пластинки / Г. Г. Ростовцев. – Текст : непосредственный // *Труды Ленинградского института инженеров ГВФ*. – 1936. – № 5. – С. 111–141.
23. Ростовцев, Г. Г. Расчет тонкой плоской обшивки, подкрепленной ребрами жесткости, при нагружении силами, лежащими в ее плоскости и перпендикулярными к ней / Г. Г. Ростовцев. – Текст : непосредственный // *Труды ЛИИ ГВФ*. – 1940. – № 20. – С. 14–18.
24. Хертель, Г. Тонкостенные конструкции (Конструктивные элементы, определение прочных sites in Russia. – 1987. – № 11. – P. 7–11. (in Russian)
17. Mushchanov, V. F. Hanging Orthotropic Metal Cladding Covering Industrial Building with Hanging Transport Equipment : specialty 05.23.01 «Building structures, buildings and structures» : Ph. D. (Eng.) thesis ; Moscow Civil Engineering Institute named after V. V. Kuibyshev. – Moscow, 1986. – 173 p. – Text : direct. (in Russian)
18. Mushchanov, V. F.; Shpinkov, V. A. Taking into account the joint work of a thin-sheet membrane with the reinforcing elements of the stabilizing system. – Text : electronic. – In: *Metal constructions*. – 2016. – Volume 22, № 2. – P. 79–89. – URL: [http://donnasa.ru/publish\\_house/journals/mk/2016-2/02\\_mushchanov\\_shpinkov.pdf](http://donnasa.ru/publish_house/journals/mk/2016-2/02_mushchanov_shpinkov.pdf) (date of access: 09.06.2021).
19. Papkovich, P. F.; edited by V. V. Ekimov. Transactions on the structural mechanics of the ship. In 4 volumes. Volume 3. Complex bending of rods and bending of plates. – Leningrad : Sudpromgiz, 1962. – 527 p. – Text : direct. (in Russian)
20. Papkovich, P. F. Elasticity theory : textbook. – Leningrad ; Moscow : Oborongiz, 1939. – 640 p. – Text : direct. (in Russian)
21. Edited by A. A. Umansky; P. M. Znamensky. Strength and stability of thin-walled structures in aircraft construction: a collection of abstracts and translations. – Moscow : Central Aerodynamic Institute named after professor N. E. Zhukovsky, 1937. – 217 p. – Text : direct. (in Russian)
22. Rostovtsev, G. G. Reduced width of an isotropic and anisotropic flat plate. – Text : direct. – In: *Proceedings of the Leningrad Institute of Engineers of the CAF*. – 1936. – № 5. – P. 111–141. (in Russian)
23. Rostovtsev, G. G. Calculation of a thin flat skin, reinforced with stiffeners, when loaded by forces lying in its plane and perpendicular to it. – Text : direct. – In: *Proceedings of the Flight Research Institute of the Civil Air Fleet*. – 1940. – № 20. – P. 14–18. (in Russian)
24. Khertel, G.; translated from German Ye. M. Marina; edited by V. A. Marin; P. M. Lyubalin. Thin-walled structures (Structural elements, determination of strong dimensions and design in aircraft construction and other branches of technology). – Moscow : Mashinostroyeniye, 1965. – 527 p. – Text : direct. (in Russian)
25. Mushchanov, V. F.; Romensky, I. V. Probabilistic-Optimal Design of Large-Span Membrane-Type Coatings. – Text : direct. – In: *Metal building-96 (State and development prospects): a collection of works based on the materials of the international conference in 2 volumes*. – Donetsk ; Makeevka. – 1996. – Volume 1. – P. 6–9. (in Russian)
26. Mushchanov, V. F.; Romensky, I. V. Modern methods of analysis of constructive forms of membrane coatings. – Text : direct. – In: *Theory and practice of metal structures : collection of proceedings of the international conference*. – Donetsk ; Makeevka. – 1997. – Volume 1. – P. 14–17. (in Russian)

- размеров и конструирование в самолетостроении и др. отраслях техники) / Г. Хертель ; пер. с нем. Е. М. Марьиной [и др.] ; под редакцией В. А. Марьиной, П. М. Любалина. – Москва : Машиностроение, 1965. – 527 с. – Текст : непосредственный.
25. Мущанов, В. Ф. Вероятностно-оптимальное проектирование большепролетных покрытий мембранного типа / В. Ф. Мущанов, И. В. Роменский. – Текст : непосредственный // Металлостроительство-96 (Состояние и перспективы развития) : сборник трудов по материалам международной конференции в 2 томах. – Донецк ; Макеевка. – 1996. – Том 1. – С. 6–9.
26. Мущанов, В. Ф. Современные методы анализа конструктивных форм мембранных покрытий / В. Ф. Мущанов, И. В. Роменский. – Текст : непосредственный // Теория и практика металлических конструкций : сборник трудов международной конференции. – Донецк ; Макеевка. – 1997. – Том 1. – С. 14–17.
27. Еремеев, П. Г. Исследование работы замкнутого опорного контура мембранных оболочек / П. Г. Еремеев. – Текст : непосредственный // Строительная механика и расчет сооружений. – 1981. – № 4. – С. 11–14.
28. Еремеев, П. Г. Влияние податливости опорного контура мембраны на перераспределение в нем усилий / П. Г. Еремеев. – Текст : непосредственный // Строительная механика и расчет сооружений. – 1984. – № 6. – С. 71–75.
29. Кун, П. Расчет на прочность оболочек в самолетостроении / П. Кун ; перевод с английского А. В. Караваева [и др.] ; под редакцией С. Я. Макарова. – Москва : Оборонгиз, 1961. – 306 с. – Текст : непосредственный.
30. Бубнов, И. Г. Избранные труды / И. Г. Бубнов ; под редакцией и с предисловием Ю. А. Шиманского. – Ленинград : Судпромгиз, 1956. – 439 с. – Текст : непосредственный.
31. Бубнов, И. Г. Строительная механика корабля : дополнение к курсу «Строительная механика корабля» / И. Г. Бубнов ; под редакцией П. Ф. Попкович. – Ленинград : Научно-технический кружок кораблестроителей, 1930. – 176 с. – Текст : непосредственный.
32. Трофимов, В. И. Большепролетные пространственные покрытия из тонколистового алюминия / В. И. Трофимов. – Москва : Стройиздат, 1975. – 166 с. – Текст : непосредственный.
33. Моисеенко, М. О. Алгоритм расчета пластин с начальным прогибом с учетом податливости контура / М. О. Моисеенко, О. Н. Попов. – Текст : электронный // Научный альманах. – 2017. – № 12-2(38). – С. 43–50. – URL: <http://ucom.ru/doc/na.2017.12.02.043.pdf> (дата обращения: 09.06.2021).
34. Мущанов, В. Ф. Учет совместной работы тонколистовой мембраны с подкрепляющими элементами стабилизирующей системы / В. Ф. Мущанов, В. А. Шпиньков. – Текст : непосредственный //
27. Yeremeyev, P. G. Investigation of the operation of a closed reference circuit of membrane shells. – Text : direct. – In: *Structural mechanics and design of structures*. – 1981. – № 4. – P. 11–14. (in Russian)
28. Yeremeyev, P. G. Influence of the compliance of the membrane support contour on the redistribution of efforts in it. – Text : direct. – In: *Structural mechanics and design of structures*. – 1984. – № 6. – P. 71–75. (in Russian)
29. Kun, P.; translation from English by A.V. Karavaev [et. al.]; edited by S. Ya. Makarov. Calculation of the strength of shells in aircraft construction. – Moscow : Oborongiz, 1961. – 306 p. – Text : direct. (in Russian)
30. Bubnov, I. G.; edited and prefaced Yu. A. Shimansky. Selected Works. – Leningrad : Sudpromgiz, 1956. – 439 p. – Text : direct. (in Russian)
31. Bubnov, I. G.; edited by P. F. Popkovich. Ship Building Mechanics : Supplement to the «Ship Building Mechanics» course. – Leningrad : Scientific and technical circle of shipbuilders, 1930. – 176 p. – Text : direct. (in Russian)
32. Trofimov, V. I. Large-span spatial coverings made of thin-sheet aluminum. – Moscow : Stroyizdat, 1975. – 166 p. – Text : direct. (in Russian)
33. Moiseyenko, M. O.; Popov, O. N. Algorithm for calculating plates with an initial deflection taking into account the compliance of the contour. – Text : electronic. – In: *Scientific almanac*. – 2017. – № 12-2(38). – P. 43–50. – URL: <http://ucom.ru/doc/na.2017.12.02.043.pdf> (date of access: 09.06.2021). (in Russian)
34. Mushchanov, V. F.; Shpinkov, V. A. Taking into account the joint work of a thin-sheet membrane with reinforcing elements of the stabilizing system. – Text : direct – In: *Metal constructions*. – 2016. – Volume 22, № 2. – P. 79–89. (in Russian)
35. Mushchanov, V. F.; Shpinkov, V. A. A refined assessment of the joint operation of a thin-sheet membrane sheathing with a reinforcing element. – Text : electronic. – In: *Metal constructions*. – 2018. – Volume 24, № 3. – P. 133–141. – URL: [http://donnasa.ru/publish\\_house/journals/mk/2018-3/04\\_mushchanov\\_shpinkov.pdf](http://donnasa.ru/publish_house/journals/mk/2018-3/04_mushchanov_shpinkov.pdf) (date of access: 09.06.2021). (in Russian)
36. EN 1993-1-5. Eurocode 3: Design of steel structures. Part 1-5. Plated structural elements. – Brussels : CEN, 2006. – 55 p. – Text : direct. (in English)
37. Timoshenko, S. Über die Stabilität versteifter Platten. – Text : direct. – In: *Der Eisenbau*. – 1921. – № 12. – P. 147–163. (in English)
38. Lokshin, A. S. About the calculation of plates with stiffeners. – Text : direct. – In: *Applied Mathematics and Mechanics*. – 1935. – Volume 2. – P. 225–235. (in Russian)
39. Barbre, R. Beulspannungen von Rechteckplatten mit Längssteifen bei gleichmäßiger Druckbeanspruchung. – Text : direct. – In: *Der Bauingenieur*. – 1936. – Volume 17. – № 25/26. – P. 268–273. (in German)
40. Barbre, R. Stabilität gleichmäßig gedrückter Rechteckplatten mit Längs- oder Quersteifen. –

- Металлические конструкции. – 2016. – Том 22, № 2. – С. 79–89.
35. Муцанов, В. Ф. Уточнённая оценка совместной работы тонколистовой мембранной обшивки с подкрепляющим элементом / В. Ф. Муцанов, В. А. Шпиньков. – Текст : электронный // Металлические конструкции. – 2018. – Том 24, № 3. – С. 133–141. – URL: [http://donnasa.ru/publish\\_house/journals/mk/2018-3/04\\_muschanov\\_shpinikov.pdf](http://donnasa.ru/publish_house/journals/mk/2018-3/04_muschanov_shpinikov.pdf) (дата обращения: 09.06.2021).
  36. EN 1993-1-5. Eurocode 3: Design of steel structures. Part 1-5. Plated structural elements. - Supersedes ENV 1993-1-5:1997 ; This European Standard was approved by CEN on 13 January 2006. – Brussels : CEN, 2006. – 55 p. – Текст : непосредственный.
  37. Timoshenko, S. Über die Stabilität versteifter Platten / S. Timoshenko. – Текст : непосредственный // Der Eisenbau. – 1921. – № 12. – P. 147–163.
  38. Локшин, А. С. О расчёте пластинок с ребрами жесткости / А. С. Локшин. – Текст : непосредственный // Прикладная математика и механика. – 1935. – Том 2. – С. 225–235.
  39. Barbre, R. Beulspannungen von Rechteckplatten mit Längssteifen bei gleichmäßiger Druckbeanspruchung. – Текст : непосредственный // Der Bauingenieur. – 1936. – Volume 17. – № 25/26. – P. 268–273.
  40. Barbre, R. Stabilität gleichmäßig gedrückter Rechteckplatten mit Längs- oder Quersteifen / R. Barbre. – Текст : непосредственный // Ingenieur-Archiv. – 1937. – Volume 8. – P. 117–123.
  41. Melan, E. Über die Stabilität von Stäben, welche aus einem mit Randwinkeln verstärkten Blech bestehen / E. Melan. – Текст : непосредственный // Verh. III. Int. Kongr. f. Techn. Mechanik, Stockholm. – 1930. – Volume 2. – P. 59–64.
  42. Rendulic, L. Über die Stabilität von Stäben, welche aus einem mit Randwinkeln verstärkten Blech bestehen / L. Rendulic. – Текст : непосредственный // Ingenieur-Archiv. – 1932. – Volume 3. – № 5. – P. 447–453.
  43. Lundquist, E. E. Comparison of Three Methods for Calculating the Compressive Strength of Flat and Slightly Curved Sheets and Stiffener Combination / E. E. Lundquist. – Текст : непосредственный // NACA Tech. – 1933. – Note 455. – P. 56–62.
  44. Карман, Т. Математические методы в инженерном деле / Т. Карман, М. Био ; перевод с английского М. Г. Шестопал ; под редакцией А. М. Лопшица. – 2-е изд. – Москва ; Ленинград : Гостехиздат, 1948. – 424 с. – Текст : непосредственный.
  45. Von Karman T. The strength of thin plates in compression / T. Von Karman, E. E. Sechler, L. H. Donnell. – Текст : непосредственный // Trans. ASME. – 1932. – Vol. 54. – P. 53–57.
  46. Блейх, Ф. Устойчивость металлических конструкций / Ф. Блейх ; пер. с англ. Ж. С. Сисляна ; под редакцией Э. И. Григолока. – Москва : Физматгиз, 1959. – 544 с. – Текст : непосредственный.
  - Text : direct. – In: *Ingenieur-Archiv*. – 1937. – Volume 8. – P. 117–123. (in German)
  41. Melan, E. Über die Stabilität von Stäben, welche aus einem mit Randwinkeln verstärkten Blech bestehen. – Text : direct. – In: *Verh. III. Int. Kongr. f. Techn. Mechanik*. – 1930. – Volume 2. – P. 59–64. (in German)
  42. Rendulic, L. Über die Stabilität von Stäben, welche aus einem mit Randwinkeln verstärkten Blech bestehen. – Text : direct. – In: *Ingenieur-Archiv*. – 1932. – Volume 3. – № 5. – P. 447–453. (in German)
  43. Lundquist, E. E. Comparison of Three Methods for Calculating the Compressive Strength of Flat and Slightly Curved Sheets and Stiffener Combination. – Text : direct. – In: *NACA Tech.* – 1933. – Note 455. – P. 56–62. (in English)
  44. Karman, T.; Bio, M. ; translation from English by M.G. Shestopal ; edited by A. M. Lopshits. *Mathematical Methods in Engineering*. – 2nd ed. – Moscow ; Leningrad : Gostekhizdat, 1948. – 424 p. – Text : direct. (in Russian)
  45. Von Karman, T.; Sechler, E. E.; Donnell, L. H. The strength of thin plates in compression. – Text : direct. – In: *Trans. ASME*. – 1932. – Volume 54. – P. 53–57. (in English)
  46. Bleykh, F. ; translation from English by Zh. S. Sislyan ; edited by E. I. Grigolyuk. *Stability of metal structures*. – Moscow : Fizmatgiz, 1959. – 544 p. – Text : direct. (in Russian)
  47. Nekhayev, G. A. *Lightweight metal structures : a tutorial*. – 2nd ed. – Saratov : University education, 2019. – 91 p. – ISBN 978-5-4487-0334-8. – Text : electronic. – In: *Electronic library system IPR BOOKS* : [website]. – URL: <https://www.iprbookshop.ru/79642.html> (date of the access: 09.06.2021). (in Russian)
  48. Krysko, A. A. Geometric and computer modeling of curved surfaces of membrane coatings on a rectangular plan. – Text : direct. – In: *Construction and industrial safety*. – 2020. – № 18(70). – P. 97–106. (in Russian)
  49. Konopatsky Ye. V.; Balyuba, I. G.; Vereshchaga, V. M. Using generalized trigonometric functions to define plane curves. – Text : direct. – In: *Applied geometry and engineering graphics*. – 2013. – Issue 4. – Volume 57. – P.119–124. (in Ukrainian)

47. Нехаев, Г. А. Легкие металлические конструкции : учебное пособие / Г. А. Нехаев. – 2-е изд. – Саратов : Вузовское образование, 2019. – 91 с. – ISBN 978-5-4487-0334-8. – Текст : электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS : [сайт]. – URL: <https://www.iprbookshop.ru/79642.html> (дата обращения: 09.06.2021).
48. Крысько, А. А. Геометрическое и компьютерное моделирование криволинейных поверхностей мембранных покрытий на прямоугольном плане / А. А. Крысько. – Текст : непосредственный // Строительство и техногенная безопасность. – 2020. – № 18(70). – С. 97–106.
49. Конопацький, Є. В. Використання узагальнених тригонометричних функцій для визначення плоских кривих / Є. В. Конопацький, І. Г. Балюба, В. М. Верещага. – Текст : непосредственный // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – 2013. – Випуск 4. – Том 57. – С. 119–124.

**Мушанов Владимир Филипович** – доктор технических наук; профессор, заведующий кафедрой теоретической и прикладной механики, проректор по научной работе ГОУ ВПО «Донбасская национальная академия строительства и архитектуры». Член международной организации «Институт гражданских инженеров» и международной организации «Пространственные конструкции», академик Академии строительства Украины и Украинской академии наук, член-корреспондент Академии архитектуры Украины. Научные интересы: теория надежности, расчет, проектирование и техническая диагностика пространственных металлических конструкций.

**Конопацкий Евгений Викторович** – доктор технических наук, доцент кафедры специализированных информационных технологий и систем ГОУ ВПО «Донбасская национальная академия строительства и архитектуры». Научные интересы: параметризация геометрических многообразий в точечном исчислении; геометрическое моделирование многофакторных процессов и явлений живой и не живой природы, техники, технологии, экономики, строительства и архитектуры с помощью многомерной интерполяции и аппроксимации.

**Шпиньков Владимир Александрович** – ассистент кафедры теоретической и прикладной механики ГОУ ВПО «Донбасская национальная академия строительства и архитектуры». Научные интересы: расчет и проектирование пространственных систем покрытий в виде мембранных покрытий на эллиптическом плане.

**Крысько Александра Анатольевна** – кандидат технических наук, доцент кафедры специализированных информационных технологий и систем ГОУ ВПО «Донбасская национальная академия строительства и архитектуры». Научные интересы: геометрическое и компьютерное моделирование эксплуатируемых конструкций тонкостенных оболочек инженерных сооружений с учётом несовершенств геометрической формы.

**Мушанов Володимир Пилипович** – доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри теоретичної і прикладної механіки, проректор з наукової роботи ДОУ ВПО «Донбаська національна академія будівництва і архітектури». Член міжнародної організації «Інститут цивільних інженерів» і міжнародної організації «Просторові конструкції», академік Академії будівництва України і Української академії наук, член-кореспондент Академії архітектури України. Наукові інтереси: теорія надійності, розрахунок, проектування та технічна діагностика просторових металевих конструкцій.

**Конопацький Євген Вікторович** – доктор технічних наук, доцент кафедри спеціалізованих інформаційних технологій і систем ДОУ ВПО «Донбаська національна академія будівництва і архітектури». Наукові інтереси: параметризація геометричних багатовидів у точковому численні; геометричне моделювання багатфакторних процесів і явищ живої і не живої природи, техніки, технології, економіки, будівництва та архітектури за допомогою багатовимірної інтерполяції і апроксимації.

**Шпиньков Володимир Олександрович** – асистент кафедри теоретичної і прикладної механіки ДОУ ВПО «Донбаська національна академія будівництва і архітектури». Наукові інтереси: розрахунок і проектування просторових систем покриттів у вигляді мембранних покриттів на еліптичному плані.

**Крысько Александра Анатоліївна** – кандидат технічних наук, доцент кафедри спеціалізованих інформаційних технологій і систем ДООУ ВПО «Донбаська національна академія будівництва і архітектури». Наукові інтереси: геометричне і комп'ютерне моделювання експлуатованих конструкцій тонкостінних оболонок інженерних споруд з урахуванням недосконалості геометричної форми.

**Mushchanov Volodymyr** – D. Sc. (Eng.), Professor; Head of the Theoretical and Applied Mechanics Department, vice-rector on the scientific activity of the Donbas National Academy of Civil Engineering and Architecture. A member of the international organization «Institute of Civil Engineer» and international organization of «Spatial Structures». Scientific interests: the reliability theory, analyses, designing and engineering diagnostics of spatial metal structures.

**Konopatskiy Evgeniy** – D.Sc. (Eng.), Associate Professor, Specialized Information Technologies and Systems Department, Donbas National Academy of Civil Engineering and Architecture. Scientific interests: parametrization of geometric manifolds in point calculus; geometric modeling of multifactor processes and phenomena of living and non-living nature, engineering, technology, economics, construction and architecture using multidimensional interpolation and approximation.

**Shpinkov Vladimir** – assistant, Theoretical and Applied Mechanics Department, Donbas National Academy of Civil Engineering and Architecture. Scientific interests: calculation and design of spatial coating systems in the form of membrane coatings on an elliptical plane.

**Krysko Alexandra** – Ph. D. (Eng.), Associate Professor Specialized Information Technologies and Systems Department, Donbas National Academy of Civil Engineering and Architecture. Scientific interests: geometric and computer modeling of the operated structures of thin-walled shells of engineering structures, taking into account the imperfections of the geometric shape.