



ISSN 1993-3517 online

МЕТАЛЛИЧЕСКИЕ КОНСТРУКЦИИ
МЕТАЛЕВІ КОНСТРУКЦІЇ
METAL CONSTRUCTIONS

2023, ТОМ 29, НОМЕР 2, 63–82

EDN: [FNXBHX](#)

УДК 624.014:624.074.4+69.04(08)

(23)-0389-1

ОСОБЕННОСТИ СОВМЕСТНОЙ РАБОТЫ ОБОЛОЧКИ МЕМБРАННОГО ПОКРЫТИЯ ПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ ГАУССОВОЙ КРИВИЗНЫ И ПОДКРЕПЛЯЮЩЕГО ЭЛЕМЕНТА ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПОПЕРЕЧНОЙ НАГРУЗКИ

В. Ф. Мушанов^{а,1}, Е. В. Конопацкий^{б,2}, В. А. Шпиньков^{а,3}

^а ФГБОУ ВО «Донбасская национальная академия строительства и архитектуры»,

Российская Федерация, Донецкая Народная Республика,
286123, г. о. Макеевский, г. Макеевка, ул. Державина, д. 2.

^б ФГБОУ ВО «Нижегородский государственный архитектурно-строительный университет»,

Российская Федерация, 603000, г. Нижний Новгород, ул. Ильинская, д. 65.

E-mail: ¹ volodymyr.mushchanov@mail.ru, ² e.v.konopatskiy@mail.ru, ³ v.a.shpinkov@donnasa.ru

Получена 28 августа 2023; принята 22 сентября 2023.

Аннотация. В статье рассмотрены тонколистовые мембранные покрытия в виде плоской и вогнутой положительной гауссовой кривизны оболочки, подкреплённые элементом жёсткости на прямоугольном плане. Приводится аналитическое описание геометрических моделей тонколистового мембранного покрытия, вогнутого положительной гауссовой кривизны на прямоугольном плане и ребра жёсткости в виде двутавра. С применением программного комплекса Maple были сгенерированы компьютерные модели тонколистовых мембранных поверхностей и подкрепляющего элемента с учётом необходимой плотности конечных элементов и формы. Полученные модели импортировались в систему конечно-элементного анализа напряжённо-деформированного состояния конструкций SCAD Office для дальнейшего проведения численного эксперимента. Полученные результаты позволяют оценить на основе уточнённых подходов размеры участка тонколистовой мембранной пластины, вовлекаемого в совместную работу на поперечный изгиб с подкрепляющим элементом в зависимости от соотношения их жёсткостей и изменения кривизны поверхности.

Ключевые слова: тонколистовая мембрана, положительная гауссова кривизна, элемент жёсткости, напряжённо-деформированное состояние, компьютерная модель поверхности, точечное уравнение, математическая модель.

ОСОБЛИВОСТІ СУМІСНОЇ РОБОТИ ОБОЛОНКИ МЕМБРАННОГО ПОКРИТТЯ ПОЗИТИВНОЇ ГАУСОВОЇ КРИВИЗНИ І ПІДКРІПЛЮВАЛЬНОГО ЕЛЕМЕНТА ПРИ ДІЇ ПОПЕРЕЧНОГО НАВАНТАЖЕННЯ

В. П. Мушанов^{а,1}, Є. В. Конопацький^{б,2}, В. О. Шпиньков^{а,3}

^а ФДБОУ ВО «Донбаська національна академія будівництва і архітектури»,

Російська Федерація, Донецька Народна Республіка,

286123, м. о. Макіївський, м. Макіївка, вул. Державіна, буд. 2.

^б ФДБОУ ВО «Нижегородський державний архітектурно-будівельний університет»,

Російська Федерація, 603000, м. Нижній Новгород, вул. Іллінська, б. 65.

E-mail: ¹ volodymyr.mushchanov@mail.ru, ² e.v.konopatskiy@mail.ru, ³ v.a.shpinkov@donnasa.ru

Отримана 28 серпня 2023; прийнята 22 вересня 2023.



Анотація. У статті розглянуто тонколистові мембранні покриття у вигляді плоскої та увігнутої позитивної гауссової кривизни оболонки, підкріплені елементом жорсткості на прямокутному плані. Наводиться аналітичний опис геометричних моделей тонколистового мембранного покриття, увігнутого позитивної гауссової кривизни на прямокутному плані та ребра жорсткості у вигляді двотавра. Із застосуванням програмного комплексу Maple, були згенеровані комп'ютерні моделі тонколистових мембранних поверхонь та підкріплювального елемента, з урахуванням необхідної щільності кінцевих елементів та форми. Отримані моделі імпортувалися до системи кінцево-елементного аналізу напружено-деформованого стану конструкцій SCAD Office для подальшого проведення чисельного експерименту. Отримані результати дозволяють оцінити на основі уточнених підходів розміри ділянки тонколистової мембранної пластини, що залучається до спільної роботи на поперечний вигин з підкріплювальним елементом залежно від співвідношення їх жорсткостей та зміни кривизни поверхні.

Ключові слова: тонколистова мембрана, позитивна гаусова кривизна, елемент жорсткості, напружено-деформований стан, комп'ютерна модель поверхні, точкове рівняння, математична модель.

FEATURES OF JOINT OPERATION OF A MEMBRANE COATING SHELL WITH POSITIVE GAUSSIAN CURVATURE AND A REINFORCING ELEMENT UNDER THE ACTION OF A TRANSVERSE LOAD

Volodymyr Mushchanov ^{a,1}, Evgeniy Konopatskiy ^{b,2}, Vladimir Shpinkov ^{a,3}

^a FSBEI HE «Donbas National Academy of Civil Engineering and Architecture»,
Russian Federation, 286123, Makeevka, Derzhavin st., 2.

^b FSBEI HE «Nizhny Novgorod State University of Architecture and Civil Engineering»,
Russian Federation, 603000, Nizhniy Novgorod, Illinska st., 65.

E-mail: ¹ volodymyr.mushchanov@mail.ru, ² e.v.konopatskiy@mail.ru, ³ v.a.shpinkov@donnasa.ru

Received 28 August 2023; accepted 22 September 2023.

Abstract. The article considers thin-sheet membrane coatings in the form of a flat and concave positive Gaussian curvature of the shell, supported by a stiffening element on a rectangular plan. An analytical description of the geometric models of a thin-sheet membrane coating, a concave positive Gaussian curvature on a rectangular plan, and a stiffening rib in the form of an I-beam is given. Using the Maple software package, computer models of thin-sheet membrane surfaces and a reinforcing element were generated, taking into account the required density of finite elements and shape. The resulting models were imported into the system of finite element analysis of the stress-strain state of structures SCAD Office for further numerical experiment. The results obtained make it possible to estimate, on the basis of refined approaches, the dimensions of a section of a thin-sheet membrane plate involved in joint work on transverse bending with a reinforcing element, depending on the ratio of their stiffness and changes in surface curvature.

Keywords: thin-sheet membrane, positive Gaussian curvature, stiffener, stress-strain state, computer surface model, point equation, mathematical model.

Введение

Тонколистовые покрытия могут иметь в плане самую разнообразную форму – от простейших геометрических фигур до более сложного комбинированного очертания [1]. По форме оболочки различают:

- нулевой гауссовой кривизны (цилиндрические);
- положительной гауссовой кривизны (сферические, в виде эллиптического параболоида);
- отрицательной гауссовой кривизны (шатровые, седловидные).

Оболочки положительной гауссовой кривизны на выпуклом контуре делят на пологие и подъямистые. Наибольшее распространение получили в строительстве пологие оболочки, т. к. имеют меньшую стрелу провисания. Поверхность оболочки задаётся с небольшой впадушенностью, обеспечивающей стабилизацию покрытия и наружный водоотвод. Покрытие собирается на ортогональной системе элементов «постели» из прямоугольных полотнищ, которые располагаются как вдоль, так и поперёк пролёта [1].

Рассмотрим несколько проектов, приведённых в [1], которых применялись стальные

тонколистовые мембраны, одним из которых был универсальный спортивный зал в Санкт-Петербурге. Форма поверхности покрытия представляет собой в плане диаметром 160 м опрокинутую сферическую оболочку со стрелой провиса $f_0 = 10$ м, выполненную из стального листа толщиной 6 мм.

Одним из проектов, построенных для Олимпиады–80, проходящей в г. Москве, был крытый стадион «Олимпийский». Сооружение решено в виде единой пространственной большепролетной конструкции. К наружному кольцу подвешена висячая растянутая оболочка из стального листа толщиной 5 мм в виде эллиптического параболоида положительной гауссовой кривизны со стрелой провисания.

В основу методик расчёта пространственных тонколистовых мембранных конструкций положена теоретическая база, предложенная в трудах В. З. Власова [2], В. В. Новожилова [3], А. Л. Гольденвейзера [4], А. И. Лурье [5], С. П. Тимошенко [9]. Базовые теоретико-методические рекомендации были дополнены в конце 20-го столетия трудами учёных нового поколения Н. В. Колкунова [6], Н. М. Никирева [7].

Продолжение развития теоретических исследований и дальнейшее внедрение конструктивных решений для современных большепролетных мембранных конструкций приведены в трудах: П. Г. Еремеева [1], В. Ф. Муцанова [10, 11, 12], Е. В. Горохова [11, 12], Л. В. Енджиевского [13], И. Г. Людковского [14, 15], В. И. Трофимова [31].

Использование мембранных покрытий (в особенности в промышленных зданиях с подвесным оборудованием) вызывает затруднение из-за его деформативности. Для таких мембранных покрытий необходима система устройств стабилизирующих систем.

Одной из особенностей работы подобных систем является не до конца исследованный вопрос включения в совместную работу тонколистовой мембранной оболочки подкрепляющего элемента под действием поперечной нагрузки, и связанная с этим задача корректного назначения исходных жесткостных характеристик подкрепляющих элементов [18].

Свой вклад в развитие вопроса исследования совместной работы жёсткого элемента и мембранного покрытия на действие растягива-

ющих нагрузок, приложенных к жёсткому элементу, внесли следующие ученые: П. Ф. Папкович [19–20], А. А. Уманский [21], Г. Г. Ростовцев [22, 23], Г. Х. Хертель [24], В. Ф. Муцанов [25, 26], П. Г. Еремеев [1, 27, 28], П. Кун [29].

В работе [32] приводится алгоритм расчёта пластинки на прочность и жёсткость с учётом податливости опорного контура, но в рамках разрабатываемого алгоритма назначение жесткостных характеристик, подкрепляющих элементов осуществлялось без учёта редуцированного коэффициента.

П. Г. Еремеевым было установлено, что в практических расчётах тонколистовую оболочку, подкреплённую рёбрами, обладающей только продольной жёсткостью, можно заменять гладкой оболочкой приведённой толщины, если продольная жёсткость рёбер составляет менее 20 % суммарной жёсткости оболочки. В остальных случаях следует выполнять расчёт численными методами с включением фактических продольных и жесткостных характеристик [1].

В работах [33–34] рассматривались существующие методики определения эффективной ширины пластинки при совместной работе подкрепляющего элемента жесткости и тонколистового мембранного покрытия, в том числе – метод редуцированных коэффициентов. Проанализирована применимость к решению данной задачи подходов, изложенных в работах [19, 35], где в качестве объекта исследований рассматривается совместная работа пластины и подкрепляющего элемента при действии поперечной нагрузки. Полученные результаты свидетельствуют о значительном влиянии геометрии оболочки на величину включения в совместную работу тонколистовой обшивки с внецентренно-сжатым (растянутым) подкрепляющим элементом, и сформулирована необходимость их уточнения.

При этом сравнение полученных результатов осуществлялось с данными численных исследований, выполненных в конечно-элементной постановке при упрощенном моделировании подкрепляющего элемента стержневыми элементами общего вида, что в итоге позволило осуществить первичную оценку величины редуцированного коэффициента при совместной работе особо тонкой мембранной обшивки с подкрепляющим элементом.

Обособленными направлениями, объясняющими включение мембранной оболочки в совместную работу с подкрепляющим элементом, стало решение задач устойчивости пластинок, подкреплённых рёбрами жёсткости, которые нашли своё отражение в работах: С. П. Тимошенко [36], А. С. Локшина [37], R. Barbre [38-39], E. Melan [40], L. Rendulic [41], E. E. Lundquist [42], Т. Карман [43], E. E. Sechler [44], Г. Винтер [45–46].

На основании проведённого анализа и выделения нерешённых вопросов сформулированы:

- **цель работы:** исследовать степень влияния кривизны покрытия, соотношения изгибных жёсткостных характеристик оболочки и подкрепляющего элемента на напряжённо-деформированное состояние в зоне контакта;
- **объект исследования:** вогнутая положительной гауссовой кривизны тонколистовая мембрана, подкреплённая ребром жёсткости;
- **предмет исследования:** напряжённо-деформированное состояние тонколистового мембранного покрытия и подкрепляющего элемента в зоне контакта.

Примечание: данное исследование выполняется в рамках НИР «Научное обоснование новых подходов к проектированию оптимальных пространственных строительных металлоконструкций высокого уровня ответственности» на основе Соглашения № 22-29-00139 между Российским научным фондом и ФГАОУ ВО «Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого».

2. Методы исследований

2.1 Обоснование условий применения МКЭ

Расчёт тонколистовых мембранных покрытий относится к классу задач, в основу которых заложена теория безмоментных пологих оболочек, потому что их напряжённое состояние определяется в основном цепными напряжениями ввиду малой жёсткости мембраны на изгиб. Учёт данного фактора в сочетании с дискретным расположением подкрепляющих элементов приводит к необходимости использования МКЭ в геометрически нелинейной постановке.

2.2 Моделирование поверхности

2.2.1 Моделирование поверхности на прямоугольном плане положительной гауссовой кривизны мембранного покрытия в точечном исчислении

Исследуемым объектом является вогнутая положительной гауссовой кривизны тонколистовая мембрана на прямоугольном плане с размерами: длиной $l = 24$ м, шириной $b = 18$ м, толщиной равной $t_m = 2, 4, 6$ и соотношением кривизны $K = 1/R = 1/10 \dots 1/40$, состоящая из 69 807 узлов и 79 200 элементов, подкреплённая оболочечным элементом в виде двутавра, моделирование которого осуществлялось элементами типа КЭ-344 [16].

Для исследований напряжённо-деформированного состояния тонколистового мембранного покрытия и подкрепляющего элемента в зоне контакта методом конечных элементов с учётом геометрической нелинейности необходимо получить компьютерную модель мембранного покрытия и подкрепляющего элемента, параметризованных согласно исходным данным, с учётом необходимой конечно-элементной сетки [16].

На рис. 1 представлена конструктивная схема оболочки положительной гауссовой кривизны на прямоугольном плане, изогнутой в двух направлениях и подкреплённой двутавровым элементом жёсткости [47].

Поверхность мембранного покрытия представляет собой оболочку, построенную по следующей геометрической схеме: три отрезка прямых $A_1 A_2$, $C_1 C_2$ и окружность $B_1 B_2 B_3$, являются направляющими для построения поверхности. Образующая линия представляет собой дугу окружности, проходящую через три наперёд заданные точки (рис. 2).

Точечное уравнение образующей дуги окружности (рис. 5), проходящей через три точки [47, 48], имеет следующий вид:

$$M = (N_A - N_C) \frac{\sin(\beta + \varphi) \sin(\gamma - \varphi)}{\sin \beta \sin \gamma} + (N_B - N_C) \frac{2 \cos \gamma \sin(\beta + \varphi) \sin \varphi}{\sin \beta \sin \gamma} + N_C, \quad (1)$$

где $\beta = \angle N_A N_B N_C$ – угол при вершине N_B треугольника $N_A N_B N_C$;

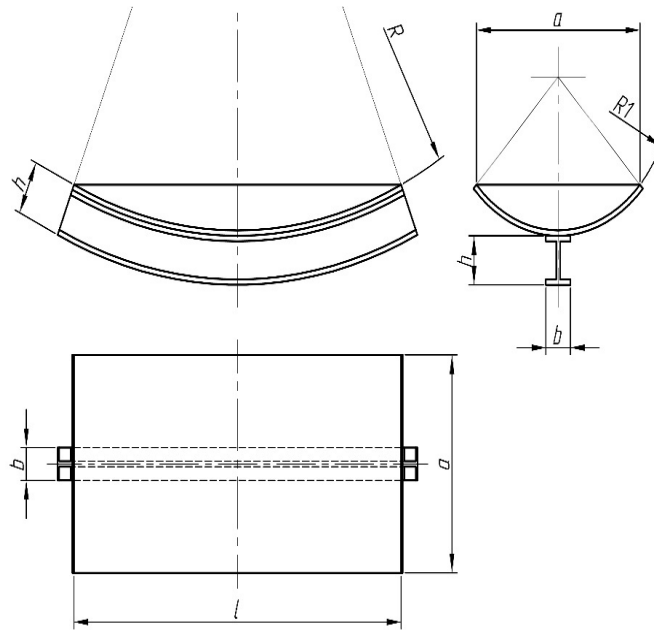


Рисунок 1. Конструктивная схема изогнутого мембранного покрытия в двух направлениях с подкрепляющим элементом.

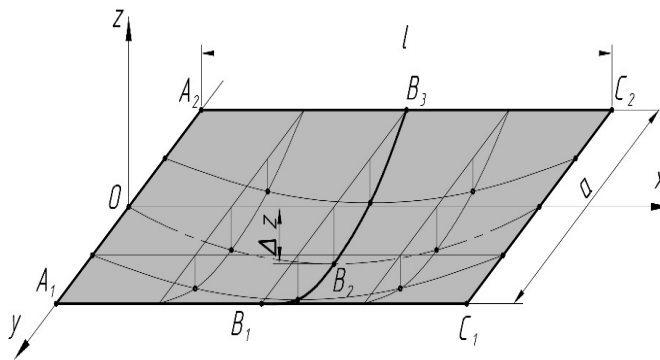


Рисунок 2. Геометрическая схема линейчатой поверхности мембранного покрытия.

$\gamma = \angle N_B N_C N_A$ – угол при вершине N_C треугольника $N_A N_B N_C$;

φ – текущий угловой параметр, который принадлежит интервалу: $0 \leq \varphi \leq (\pi - \beta)$.

Точечные уравнения направляющих линий:

$$\begin{aligned} N_A &= A_1 \bar{t} + A_2 t, \\ N_B &= (B_1 - B_3) \frac{\sin(\beta' + \varphi') \sin(\gamma' - \varphi')}{\sin \beta' \sin \gamma'} + \\ &+ (B_2 - B_3) \frac{2 \cos \gamma' \sin(\beta' + \varphi') \sin \varphi'}{\sin \beta' \sin \gamma'} + B_3, \\ N_C &= C_1 \bar{t} + C_2 t \end{aligned} \quad (2)$$

где t – текущий линейный параметр, который принадлежит интервалу: $0 \leq t \leq 1$,

$\bar{t} = 1 - t$ – дополнение параметра t до 1,

φ' – взаимосвязь между текущими параметрами направляющих линий отрезков прямой и дугой окружности: $\varphi' = t(\pi - \beta')$.

Тогда:

$$N_B = (B_1 - B_3) \sigma + (B_2 - B_3) \tau + B_3, \quad (3)$$

где $\sigma = \frac{\sin(\beta' + t(\pi - \beta')) \sin(\gamma' - t(\pi - \beta'))}{\sin \beta' \sin \gamma'}$,

$$\tau = \frac{2 \cos \gamma' \sin(\beta' + t(\pi - \beta')) \sin(t(\pi - \beta'))}{\sin \beta' \sin \gamma'}$$

Подставив в уравнение образующей окружности уравнения направляющих, получим точечное уравнение поверхности:

$$M = (A_1 \bar{t} + A_2 t - C_1 \bar{t} - C_2 t) \lambda + \\ + \left((B_1 - B_3) \sigma + (B_2 - B_3) \tau + B_3 - C_1 \bar{t} - C_2 t \right) \times (4) \\ \times \psi + C_1 \bar{t} + C_2 t$$

Координаты узловых точек, определяющих их взаимное положение, принимаем в соответствии с (рис. 5):

$$\begin{aligned} x_{A_1} = 0; \quad y_{A_1} = \frac{a}{2}; \quad z_{A_1} = 0; \\ x_{A_2} = 0; \quad y_{A_2} = -\frac{a}{2}; \quad z_{A_2} = 0; \\ x_{B_1} = \frac{l}{2}; \quad y_{B_1} = \frac{a}{2}; \quad z_{B_1} = 0; \\ x_{B_2} = \frac{l}{2}; \quad y_{B_2} = 0; \quad z_{B_2} = -\Delta z; \\ x_{B_3} = \frac{l}{2}; \quad y_{B_3} = -\frac{a}{2}; \quad z_{B_3} = 0; \\ x_{C_1} = l; \quad y_{C_1} = \frac{a}{2}; \quad z_{C_1} = 0; \\ x_{C_2} = l; \quad y_{C_2} = -\frac{a}{2}; \quad z_{C_2} = 0; \end{aligned} \quad (5)$$

Подставив координаты узловых точек в базовую систему параметрических уравнений, получим систему параметрических уравнений поверхности вогнутой в двух направлениях положительной гауссовой кривизны мембранного покрытия:

$$\left\{ \begin{aligned} x &= -l \left(\frac{\sin(\beta + \varphi) \sin(\gamma - \varphi)}{\sin \beta \sin \gamma} + \frac{\cos \gamma \sin(\beta + \varphi) \sin \varphi}{\sin \beta \sin \gamma} - 1 \right); \\ y &= a \left(\frac{\sin(\beta' + t(\pi - \beta')) \sin(\gamma' - t(\pi - \beta'))}{\sin \beta' \sin \gamma'} + \right. \\ &\quad \left. \frac{\cos \gamma' \sin(\beta' + t(\pi - \beta')) \sin(t(\pi - \beta'))}{\sin \beta' \sin \gamma'} + t - 1 \right) \times \\ &\quad \times \frac{2 \cos \gamma \sin(\beta + \varphi) \sin \varphi}{\sin \beta \sin \gamma} + \frac{a}{2} - at; \\ z &= -4\Delta z \frac{\cos \gamma' \sin(\beta' + t(\pi - \beta')) \sin(t(\pi - \beta'))}{\sin \beta' \sin \gamma'} \times \\ &\quad \times \frac{\cos \gamma \sin(\beta + \varphi) \sin \varphi}{\sin \beta \sin \gamma}. \end{aligned} \right. \quad (6)$$

Далее визуализированную средствами системы компьютерной алгебры компьютерную модель полученной поверхности оболочки (рис. 3) экспортируем в формат *.dxf с учётом необходимой

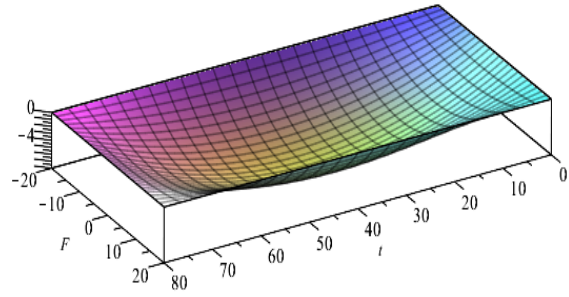


Рисунок 3. Визуализация изогнутой в двух направлениях положительной гауссовой кривизны на прямоугольном плане модели оболочки с конечно-элементной сетью.

разбивки и плотности конечно-элементной сетки прямоугольной и треугольной формы для импорта в систему конечно-элементного анализа напряжённо-деформированного состояния конструкций SCAD Office.

2.2.2 Моделирование поверхности верхней полки двутаврового элемента жёсткости

Верхняя полка двутавра совпадает с поверхностью мембранного покрытия, только ограничена более короткими отрезками $A'_1 A'_2$, $B'_1 B'_2$, $C'_1 C'_2$ (рис. 4).

По аналогии с поверхностью оболочки мембранного покрытия получим параметрические уравнения верхней полки:

$$\left\{ \begin{aligned} x &= -l \left(\frac{\sin(\beta + \varphi) \sin(\gamma - \varphi)}{\sin \beta \sin \gamma} + \frac{\cos \gamma \sin(\beta + \varphi) \sin \varphi}{\sin \beta \sin \gamma} - 1 \right); \\ y &= b \left(\frac{1}{2} - t \right); \\ z &= -\Delta z \frac{2 \cos \gamma \sin(\beta + \varphi) \sin \varphi}{\sin \beta \sin \gamma}. \end{aligned} \right. \quad (7)$$

2.2.3 Моделирование линейчатой поверхности стенки двутаврового элемента жёсткости для изогнутой положительной гауссовой кривизны мембранной оболочки

Стенка двутавра представляет собой поверхность оболочки, для построения которой используем

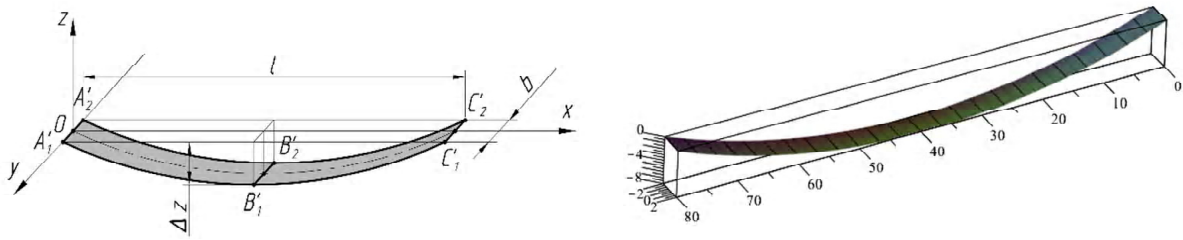


Рисунок 4. Геометрическая схема и компьютерная модель поверхности верхней полки двутавра.

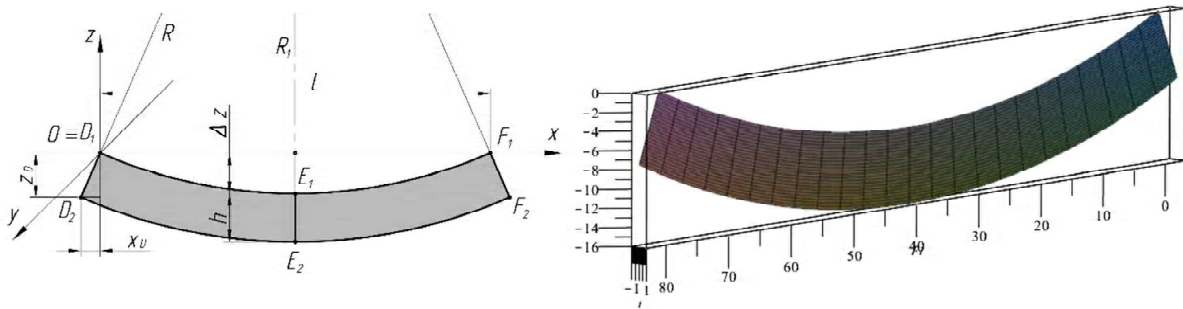


Рисунок 5. Геометрическая схема и компьютерная модель линейчатой поверхности стенки двутавра.

метод подвижного симплекса. Направляющими линиями являются отрезки D_1D_2 , E_1E_2 и F_1F_2 , а образующей – дуга окружности (рис. 5). В этом случае точечное уравнение поверхности будет следующим:

$$M = (D_1\bar{t} + D_2t - F_1\bar{t} - F_2t) \frac{\sin(\beta + \varphi) \sin(\gamma - \varphi)}{\sin \beta \sin \gamma} + (E_1\bar{t} + E_2t - F_1\bar{t} - F_2t) \frac{2 \cos \gamma \sin(\beta + \varphi) \sin \varphi}{\sin \beta \sin \gamma} + C_1\bar{t} + C_2t. \quad (8)$$

Координаты узловых точек:

$$\begin{aligned} x_{D_1} &= 0; \quad y_{D_1} = 0; \quad z_{D_1} = 0; \\ x_{D_2} &= -x_D; \quad y_{D_2} = 0; \quad z_{D_2} = -z_D; \\ x_{E_1} &= \frac{l}{2}; \quad y_{E_1} = 0; \quad z_{E_1} = -\Delta z; \\ x_{E_2} &= \frac{l}{2}; \quad y_{E_2} = 0; \quad z_{E_2} = -\Delta z - h; \\ x_{F_1} &= l; \quad y_{F_1} = 0; \quad z_{F_1} = 0; \\ x_{F_2} &= l + x_D; \quad y_{F_2} = 0; \quad z_{F_2} = -z_D. \end{aligned}$$

Подставив координаты узловых точек, получим параметрические уравнения поверхности стенки двутавра:

$$\begin{cases} x = -\left(2 \frac{hl}{2R} t + l\right) \left(\frac{\sin(\beta + \varphi) \sin(\gamma - \varphi)}{\sin \beta \sin \gamma} - \frac{\cos \gamma \sin(\beta + \varphi) \sin \varphi}{\sin \beta \sin \gamma} - 1 \right) - \frac{hl}{2R} t; \\ y = 0; \\ z = \left(-\Delta z - ht + \frac{h(R - \Delta z)}{R} t \right) \times \frac{2 \cos \gamma \sin(\beta + \varphi) \sin \varphi}{\sin \beta \sin \gamma} - \frac{h(R - \Delta z)}{R} t. \end{cases} \quad (9)$$

2.2.4 Моделирование линейчатой поверхности нижней полки двутаврового элемента жёсткости для мембранного покрытия положительной гауссовой кривизны

Для моделирования нижней полки используем точечное уравнение цилиндрической поверхности и базовую систему параметрических уравнений, полученную для поверхности мембранного покрытия. По аналогии с верхней полкой двутавра, направляющими будут отрезки $A_1''A_2''$,

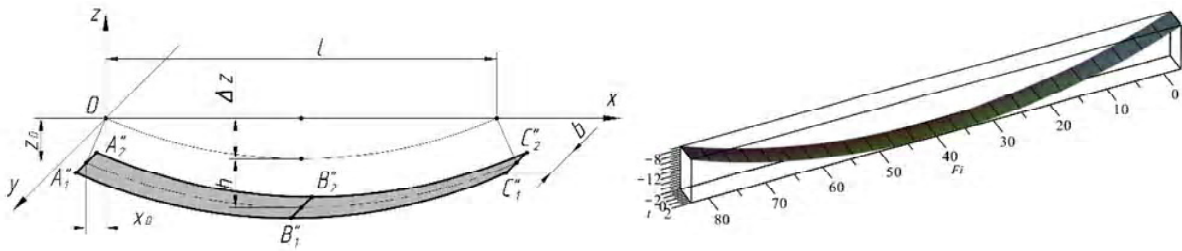


Рисунок 6. Геометрическая схема компьютерная модель поверхности нижней полки двутавра.

$B_1''B_2''$, $C_1''C_2''$, а образующей – дуга окружности (рис. 6).

С учётом координат исходных точек получим следующие параметрические уравнения искомой линейчатой поверхности:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = - \left(2 \frac{hl}{2R} + l \right) \left(\frac{\sin(\beta + \varphi) \sin(\gamma - \varphi)}{\sin \beta \sin \gamma} + \frac{\cos \gamma \sin(\beta + \varphi) \sin \varphi}{\sin \beta \sin \gamma} - 1 \right) \\ y = \frac{hl}{2R}; \\ z = -\Delta z \left(\frac{R+h}{R} \right) \frac{2 \cos \gamma \sin(\beta + \varphi) \sin \varphi}{\sin \beta \sin \gamma} - \frac{h(R - \Delta z)}{R}. \end{array} \right. \quad (10)$$

3. Результаты исследований

Дальнейшие численные исследования проводились с использованием программного обеспечения SCAD Office. Расчётная схема оболочки подкрепляющего элемента смоделирована при помощи плоских оболочечных конечных элементов типа КЭ-344 и состоящая из 69 807 узлов и 79 200 элементов. Прикладываемая распределённая по площади нагрузка интенсивностью $q = 49 \text{ кН/м}^2$ ориентирована вдоль оси подкрепляющего элемента [16].

Закрепление узлов по поперечным сторонам, с учётом симметрии решаемой задачи, допускают линейные перемещения лишь вдоль оси Z и закреплены от углов поворота U_z и U_y . Узлы по

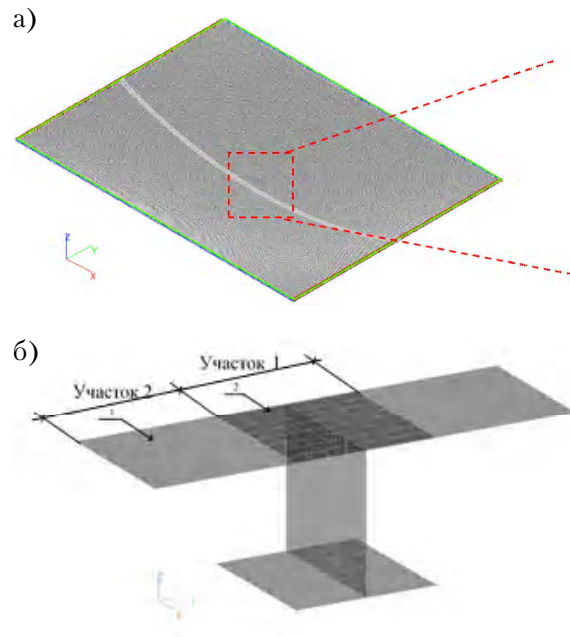


Рисунок 7. Модель изогнутого мембранного покрытия положительной гауссовой кривизны на прямоугольном плане: а) общий вид; б) фрагмент участка мембранного покрытия, подкреплённого элементом жёсткости: 1 – оболочечный элемент мембраны (КЭ-344); 2 – оболочечный элемент полки (КЭ-344).

продольным сторонам закреплены в виде шарнирно-неподвижных опор, ограничивающих линейные перемещения вдоль осей X, Y, Z и углов поворота U_y и U_z (рис. 7).

На основании проведённого численного эксперимента были построены эпюры нормальных напряжений и гистограммы распределения напряжений на исследуемом участке при включении мембранного покрытия в совместную работу с подкрепляющим элементом жёсткости двутаврового сечения (рис. 8).

На рис. 9 приведены результаты численного расчёта участка тонколистового мембранного

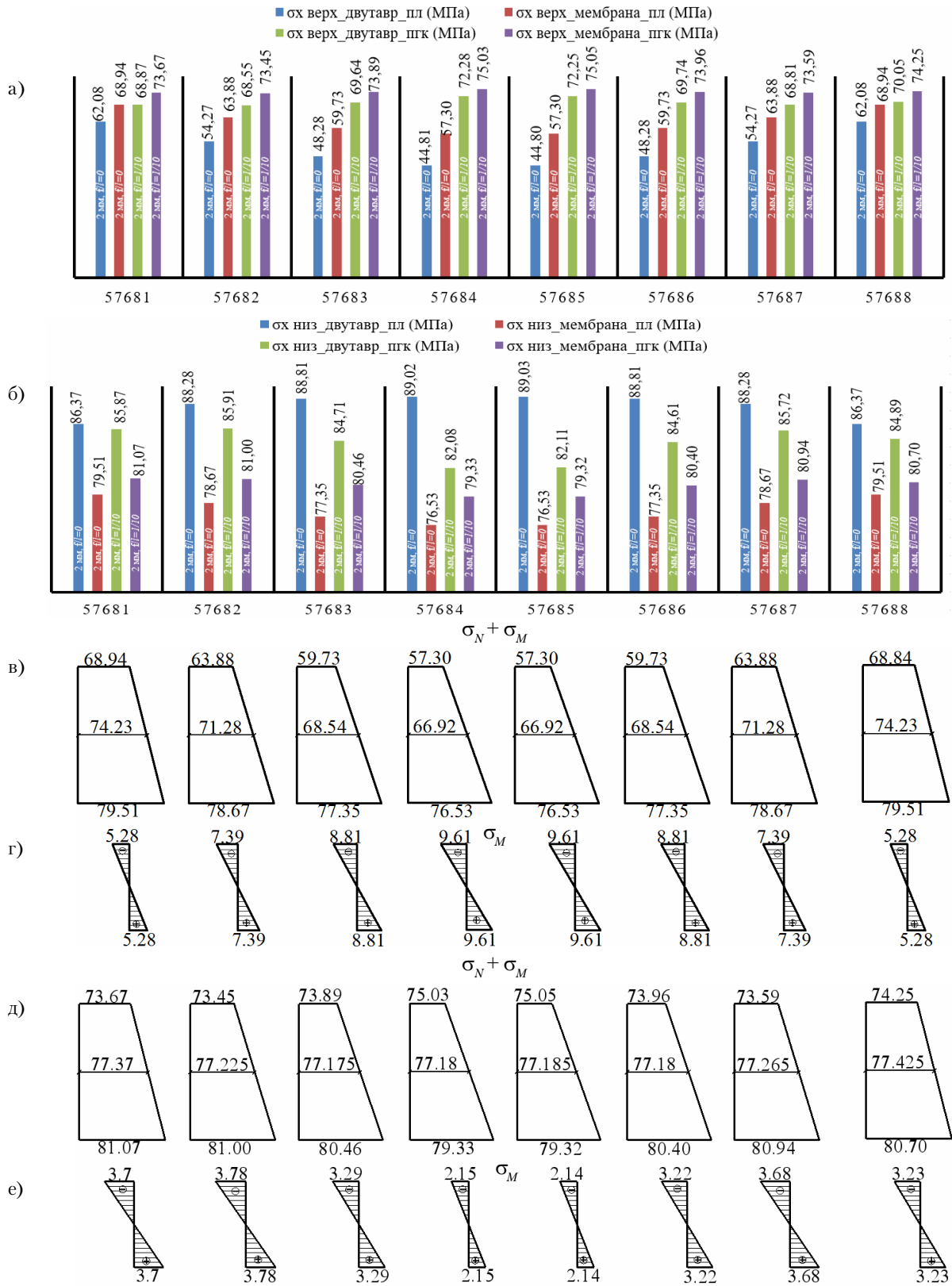


Рисунок 8. Эпюры суммарных нормальных напряжений от изгибающего момента M и продольной силы N в плоской и изогнутой положительной гауссовой кривизны мембраны на участке № 1 (в соответствии с рис.7,б): а), б) напряжения в верхней полке двутавра и мембране; в), д) эпюры суммарных нормальных напряжений от изгибающего момента M и продольной силы N ; г), е) эпюры напряжений от изгибающего момента.

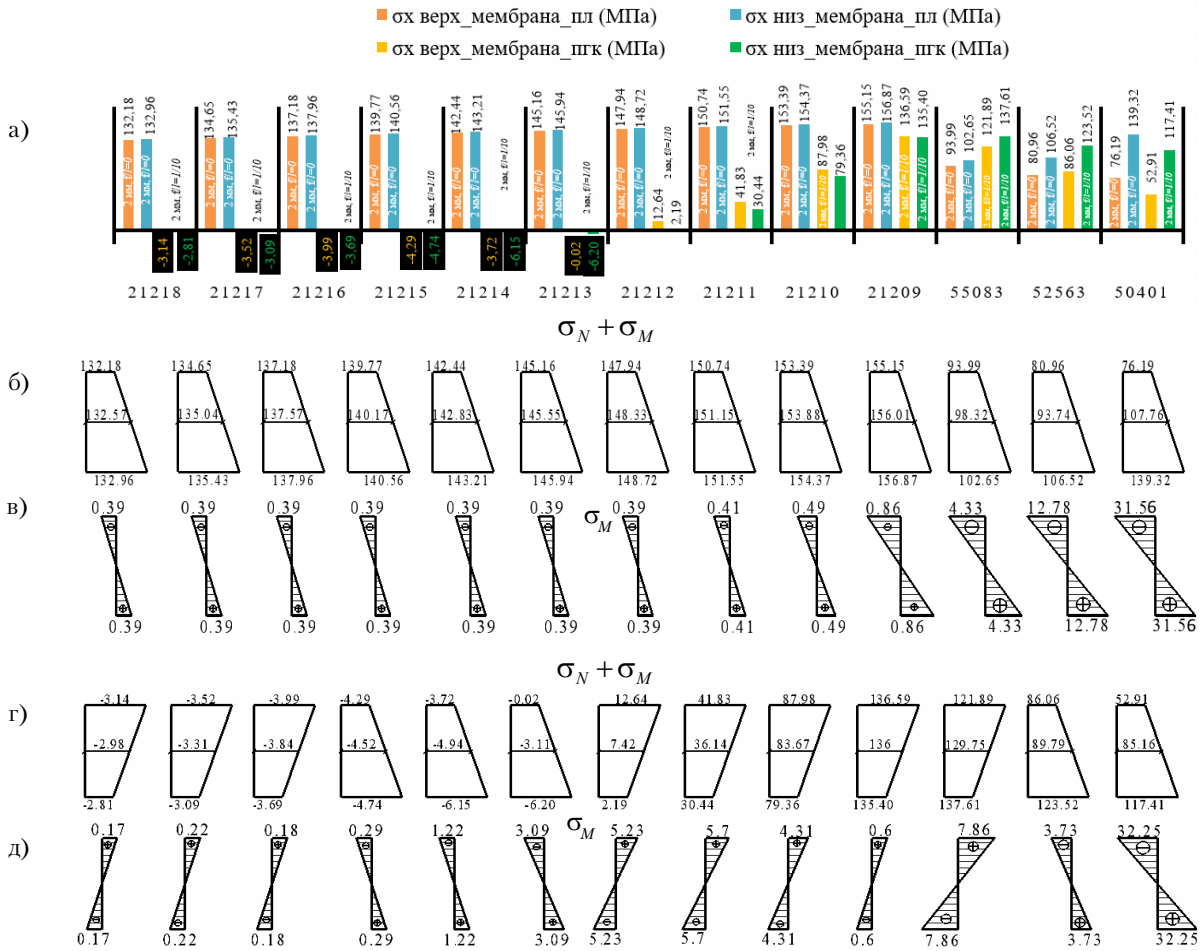


Рисунок 9. Эпюры суммарных нормальных напряжений от изгибающего момента M и продольной силы N в плоской и изогнутой положительной гауссовой кривизны мембраны на участке № 2 (в соответствии с рис. 7,б): а) напряжения в мембране; б), г) эпюры суммарных нормальных напряжений от изгибающего момента M и продольной силы N ; в), д) эпюры напряжений от изгибающего момента.

покрытия, вовлекаемого в совместную работу с подкрепляющим элементом жёсткости.

На рис. 10 изображено распределение изгибных напряжений от действия поперечной нагрузки на плоскую и изогнутую положительной гауссовой кривизны тонколистовую мембранную оболочку при включении в совместную работу элемента жёсткости.

Закономерности изменения напряжений, которые возникли от поперечной нагрузки в тонколистовой мембране и подкрепляющем элементе жёсткости, определяются коэффициентами k_1, k_2, k_3 , которые характеризуют степень включения в совместную работу с мембранной оболочкой:

$$k_1 = \frac{\sigma_{M, \max}^m}{\sigma_M^0}, \quad (11)$$

$$k_2 = \frac{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\sigma_M^m}{\sigma_M^0} \right)_i}{n}, \quad (12)$$

$$k_3 = \frac{2l}{b_j}, \quad (13)$$

где k_1 – характеризует величину отношения напряжений в мембране на прилегающем и надпорном участках;

k_2 – характеризует соотношение величин напряжений в надпорном участке мембраны и полки подкрепляющего элемента;

k_3 – характеризует длину примыкающего участка мембраны;

Таблица 1. Экспериментальные данные для математического моделирования.

Коэффициенты	$x_1 = \frac{EI_P}{Db_M}$	$x_2 = K$				
		0	0,0083	0,0111	0,0165	0,0321
$k_1 = \frac{\sigma_M^{m,max}}{\sigma_M^{m,0}}$	8,89	4,06	7,76	8,32	6,77	9,98
	1,11	1,45	1,79	1,8	1,77	1,84
	0,33	1,03	1,18	1,12	1,11	1,07
$k_2 = \frac{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\sigma_M^{m,0}}{\sigma_M^0} \right)_i}{n}$	8,89	0,43	0,43	0,43	0,43	0,43
	1,11	0,87	0,87	0,87	0,87	0,87
	0,33	1,3	1,3	1,3	1,3	1,3
$k_3 = \frac{2l}{b_M}$	8,89	5	39	33	23	11
	1,11	7	38	31	22	12
	0,33	8	37	30	22	14

где K – кривизна оболочки мембранного покрытия.

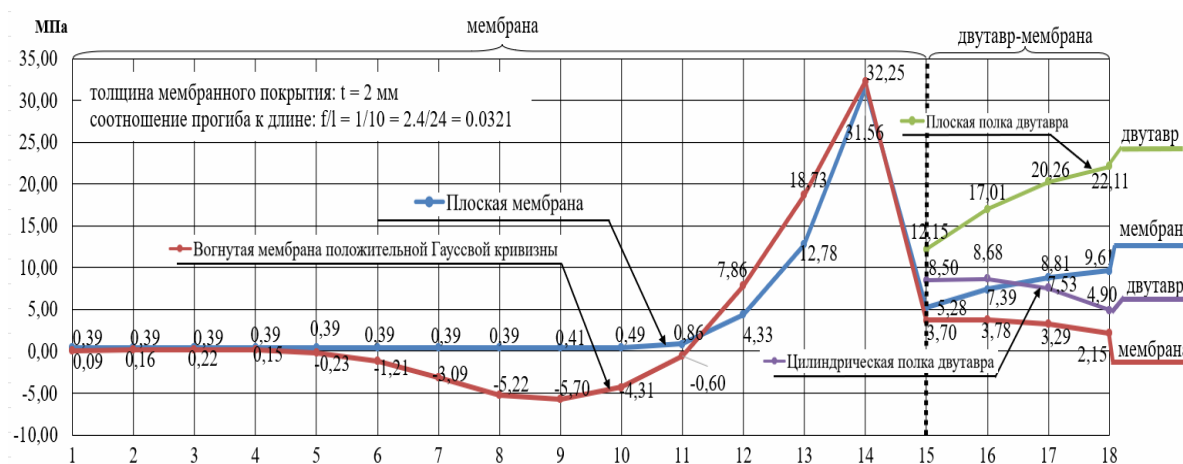


Рисунок 10. Изменения изгибных напряжений в полке двутавра и мембране.

- $\sigma_M^{m,0}$ – изгибные напряжения в элементе мембраны, расположенном над полкой двутавра;
- $\sigma_M^{m,max}$ – максимальные изгибные напряжения в элементе мембраны, примыкающем к подкрепляющему элементу;
- σ_M^0 – изгибные напряжения в полке двутавра;
- n – количество конечных элементов;
- l – длина вовлекаемого участка в совместную работу, мм;
- b_M – половина ширины мембранного покрытия над полкой двутавра, мм.

4. Анализ результатов исследований

При проведении вычислительного эксперимента были получены экспериментальные данные

для определения зависимости напряжённо-деформированного состояния цилиндрической оболочки мембранного покрытия на прямоугольном плане (табл. 1).

На рис. 11–13 представлены графики изменения каждого коэффициента в зависимости от жесткостных характеристик и кривизны поверхности, характеризующие включения подкрепляющего элемента в совместную работу с тонколистовой мембранной оболочкой.

На рис. 11–13 приведены результаты сравнения данного исследования с материалами, полученными в работе [16].

Анализируя зависимости, представленные на рис. 15–17, можно прийти к следующим выводам:

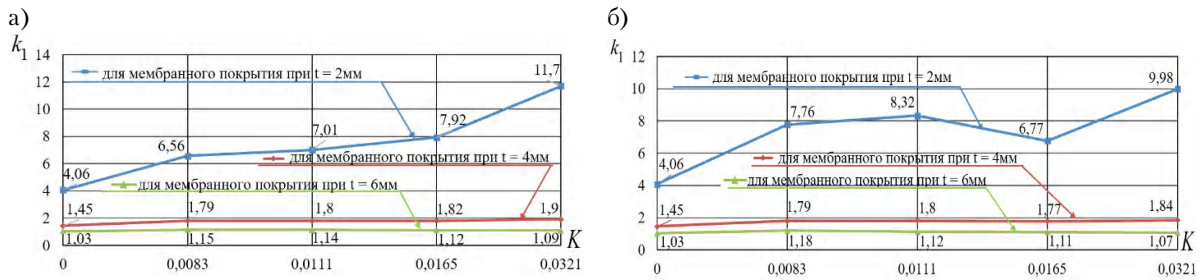


Рисунок 11. Зависимость k_1 от жесткостных характеристик $\frac{EI_p}{Db_i}$ и кривизны мембранной оболочки K : а) цилиндрическая оболочка; (ординарная кривизна); б) оболочка положительной гауссовой кривизны (двойной кривизны).

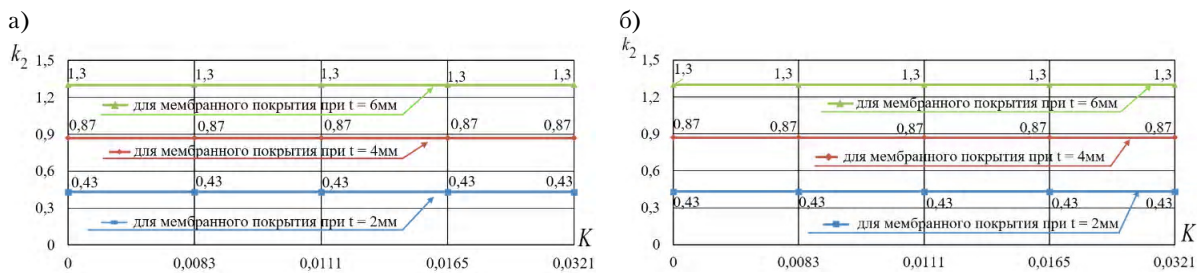


Рисунок 12. Зависимость k_2 от жесткостных характеристик $\frac{EI_p}{Db_i}$ и кривизны мембранной оболочки K : а) цилиндрическая оболочка (ординарная кривизна); б) оболочка положительной гауссовой кривизны (двойной кривизны).

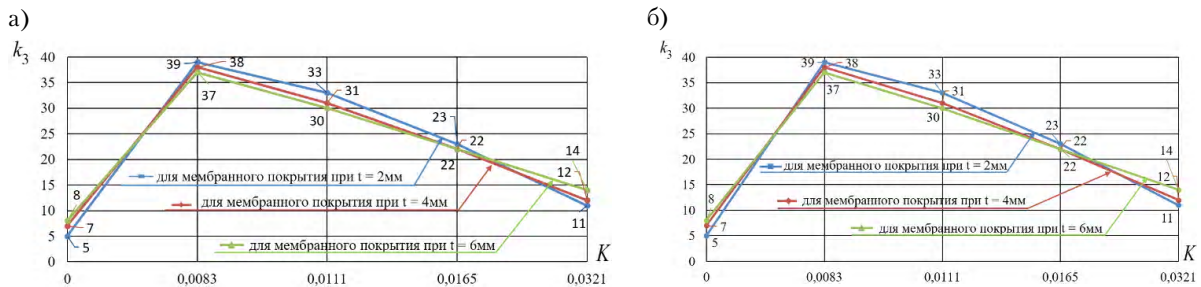


Рисунок 13. Зависимость k_3 от жесткостных характеристик $\frac{EI_p}{Db_i}$ и кривизны мембранной оболочки K : а) цилиндрическая оболочка; (ординарная кривизна); б) оболочка положительной гауссовой кривизны (двойной кривизны).

- Коэффициент k_1 , характеризующий величину отношения напряжений в мембране на прилегающем и надпорном участках:
 - зависит от соотношения изгибных жесткостей в мембране и подкрепляющего элемента;
 - имеет тенденцию к росту с увеличением стрелы провиса для особо тонких мембран.
- Коэффициент k_2 , характеризующий соотношение величин напряжений в надпорном участке мембраны и полке подкрепляющего элемента не зависит от стрелы провисания

мембраны, а является лишь обратной пропорциональной функцией лишь соотношения

$$\gamma = \frac{EI_p}{Db_M}$$

- Коэффициент k_3 , характеризующий длину примыкающего участка мембраны, участвующего в совместной работе с подкрепляющим элементом на поперечный изгиб:
 - существенно зависит от изменения кривизны мембраны;

Таблица 2. Реорганизованные исходные данные для математического моделирования.

x_1	x_2	k_1	k_2	k_3
8,89	0	4,06	0,43	5
1,11	0,008313	1,79	0,87	12
0,33	0,011062	1,14	1,3	22
8,89	0,016502	7,92	0,43	33
1,11	0,032051	1,9	0,87	38
0,33	0	1,03	1,3	8
8,89	0,008313	6,56	0,43	11
1,11	0,011062	1,8	0,87	22
0,33	0,016502	1,12	1,3	30
8,89	0,032051	11,7	0,43	39
1,11	0	1,45	0,87	7
0,33	0,008313	1,15	1,3	14
8,89	0,011062	7,01	0,43	23
1,11	0,016502	1,82	0,87	31
0,33	0,032051	1,09	1,3	37

- практически не зависит от изменения соотношения $\gamma = \frac{EI_p}{Db_i}$.

Для использования методов математического моделирования исходные экспериментальные данные (табл. 1) необходимо реорганизовать (табл. 2).

Для поиска максимальных значений коэффициента детерминации изменяемые ячейки переменных выбирались в соответствии с аппроксимирующими функциями. Таким образом, задача поиска решения в программном пакете Maple поставлена следующим образом: определить такие значения полиномиальных коэффициентов, которые обеспечивают максимальное значение коэффициента детерминации.

С учётом полиномиальных коэффициентов математических моделей, получим:

$$k_1 = -0,012x_1^2 - 1178,342x_2^2 + 18,815x_1x_2 + 0,56x_1 + 30,867x_2 + 0,771 \quad (14)$$

$$k_2 = -1,346\sqrt{x_1} + 0,277x + 1,981, \quad (15)$$

$$k_3 = 61473,441x_2^{0,9} + 338,331x_1^2x_2^2 - 1558,633x_2^{1,5}x_1 - 0,068x_1^2 + 105565,96x_2^{1,5} + 176,612x_1x_2 + 0,346x_1 - 105376,64x_2 + 7,32 \quad (16)$$

При этом были достигнуты следующие коэффициенты детерминации:

- для первой модели $k_1 = f_1(x_1, x_2)$: $R^2 = 0,972$;
- для второй модели $k_2 = f_2(x_1, x_2)$: $R^2 = 1$;
- для третьей модели $k_3 = f_3(x_1, x_2)$: $R^2 = 0,997$.

Выполним визуализацию полученных моделей в одной из систем компьютерной алгебры.

Как видно из рис. 14 вторая и третья модели, несмотря на высокие значения коэффициента детерминации, склонны к незапланированным осцилляциям, что приводит к необходимости дополнительных исследований, связанных с использованием двумерной интерполяции для построения искомым моделей.

Выводы

1. Для плоской подкреплённой мембраны увеличение в линейной зависимости её толщины ($t_i = 2, 4, 6$) и, соответственно, изменение

соотношения жёсткостей $\frac{EI_p}{Db_i}$:

- практически не сказывается на длине участка, вовлекаемого в совместную работу с под-

крепляющим элементом $\left(\frac{2l}{b_i} \approx 2\right)$;

– приводит к перераспределению усилий между мембраной и подкрепляющим элементом, заключается в увеличении доли усилий, воспринимаемых мембраной и более «сглаженному» виду дальнейшей эпоры.

2. Искривление плоской поверхности мембраны в поверхность положительной гауссовой кривизны приводит к:

– синусоидальной затухающей эпоре локальных напряжений и увеличивает длину присоединённого участка мембраны до

$$\left(\frac{2l}{b_j} \approx 2.5 \right);$$

– снижению пиков напряжений в присоединённом участке мембраны до 25 % при снижении величины изгибных напряжений σ_i и увеличению напряжений от действия продольной силы σ_N ;

– более активному вовлечению мембраны в совместную работу с подкрепляющим элементом, о чем свидетельствует рост коэффициента k_1 с 4,06 до 9,98 при неизменном соотношении напряжений в полке двутавра и расположенном над ним участке мембраны $k_2 \approx 1,74$;

– большему вовлечению в совместную работу мембраны, расположенной над полкой двутавра

$$\left(\frac{\sigma_M^{nl}}{\sigma_{об}^{nl}} = 0,85 \rightarrow \frac{\sigma_M^H}{\sigma_{об}^H} = 0,9 \right).$$

3. Переход от поверхности нулевой гауссовой кривизны в виде цилиндрической оболочки к поверхности положительной гауссовой кривизны в виде провисающей оболочки не

оказывает существенного влияния НДС в зоне контакта, за исключением значений для коэффициента k_j , для которого:

– в случае особо пологих оболочек ($K = 0,0083...0,0111$) значения вырастает до 18 %;

– для больших кривизн ($K = 0,0165...0,0321$) значения коэффициента снижается до 14,5 %, это объясняется более ярко выраженной пространственной работой мембранной оболочки.

4. Представленные модели зависимости для определения $k_1 - k_3$ (рис. 14) с высокой точностью описывают сформированные закономерности, которые могут быть использованы при уточнённом определении изгибных геометрических характеристик подкрепляющих элементов цилиндрических мембранных оболочек, а также напряжённо-деформированного состояния элементов в зоне примыкания.

5. Как видно из полученных результатов предложенный подход к аппроксимации двумерных экспериментальных данных является в достаточной степени гибким и эффективным инструментом, имеющим все необходимые свойства для обобщения на многомерное пространство, но обладает недостатками, присущими классическому методу наименьших квадратов в части возникновения незапланированных осцилляций между узловыми точками аппроксимации.

6. Несомненным преимуществом предложенного метода является то, что полученные в результате аппроксимации уравнения, в большинстве случаев, получаются не в кодированном виде, а в натуральном. В случае, когда

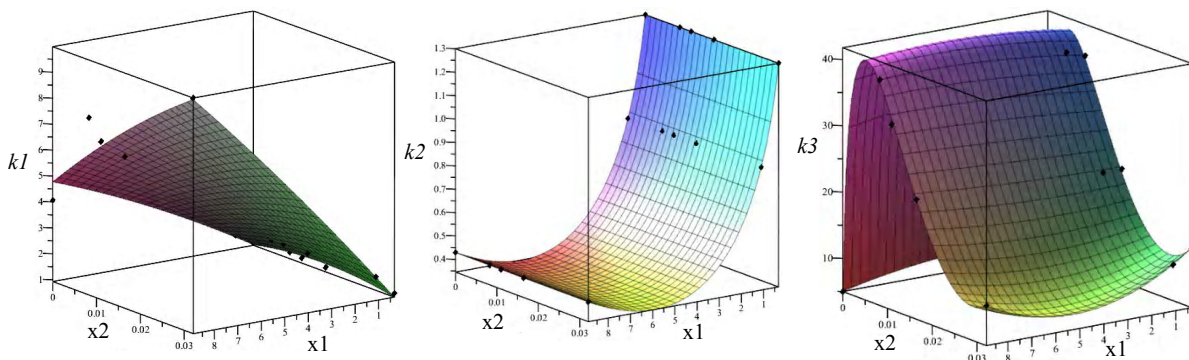


Рисунок 14. Визуализация полученных моделей в виде поверхностей отклика: а) для коэффициента k_1 ; б) для коэффициента k_2 ; в) для коэффициента k_3 .

было использовано нормирование факторов, переход к натуральным значениям не представляет никакого труда путём простейшей замены переменных линейной функции. Использование нормирования исходных дан-

ных, которое является не чем иным как заменой переменных, является также эффективным инструментом, позволяющим в значительной мере повысить точность результатов моделирования.

Литература

1. Еремеев, П. Г. Пространственные тонколистовые металлические конструкции покрытий / П. Г. Еремеев. – Москва : Издательство Ассоциации строительных вузов, 2006. – 560 с. : ил. – Текст : непосредственный.
2. Власов, В. З. Общая теория оболочек и её приложения в технике / В. З. Власов. – Москва ; Ленинград : Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1949. – 784 с., 3 л. табл. : черт. – Текст : непосредственный.
3. Новожилов, В. В. Теория тонких оболочек / В. В. Новожилов. – 2-е изд., доп. и перераб. – Ленинград : Судпромгиз, 1962. – 431 с. : черт. – Текст : непосредственный.
4. Гольденвейзер, А. Л. Теория упругих тонких оболочек / А. Л. Гольденвейзер. – Москва : Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1953. – 544 с. : черт. – Текст : непосредственный.
5. Лурье, А. И. Статика тонкостенных упругих оболочек / А. И. Лурье. – Москва ; Ленинград : Гостехиздат, 1947. – 252 с. : черт. – Текст : непосредственный.
6. Колкунов, Н. В. Основы расчета упругих оболочек : [для строительных специальностей вузов] / Н. В. Колкунов ; 2-е изд., перераб. и доп. – Москва : Высшая школа, 1972. – 296 с. : ил. – Текст : непосредственный.
7. Никиреев, В. М. Практические методы расчета оболочек / В. М. Никиреев, В. Л. Шадурский. – Москва : Стройиздат, 1966. – 271 с. : черт. – Текст : непосредственный.
8. Ржаницын, А. Р. Безмоментная теория пологих оболочек / А. Р. Ржаницын. – Текст : непосредственный // Расчет пространственных конструкций : сборник трудов. – 1955. – Выпуск III. – С. 135–147.
9. Тимошенко, С. П. Пластинки и оболочки / С. П. Тимошенко ; перевод с английского В. И. Конттовт. – Москва ; Ленинград : Гостехиздат, 1948. – 460 с. : черт. – Текст : непосредственный.
10. Мущанов, В. Ф. Висячая ортотропная металлическая оболочка покрытия производственного здания с подвесным транспортным оборудованием : специальность 05.23.01 «Строительные конструкции, здания и сооружения» : автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата технических наук / Мущанов Владимир

Reference

1. Eremeev, P. G. Spatial thin-sheet metal structures of coatings – Moscow : Publishing House of the Association of Construction Universities, 2006. – 560 p. : ill. – Text : direct. (in Russian)
2. Vlasov, V. Z. General theory of shells and its applications in technology. – Moscow ; Leningrad : State Publishing House of Technical and Theoretical Literature, 1949. – 784 p. – Text : direct. (in Russian)
3. Novozhilov, V. V. Theory of thin shells. – 2nd ed., add. and processed. – Leningrad : Sudpromgiz, 1962. – 431 p. : crap. – Text : direct. (in Russian)
4. Goldenweiser, A. L. Theory of elastic thin shells – Moscow : State Publishing House of Technical and Theoretical Literature, 1953. – 544 p. : crap. – Text : direct. (in Russian)
5. Lurie, A. I. Statics of thin-walled elastic shells / A. I. Lurie. – Moscow ; Leningrad : Gostekhizdat, 1947. – 252 p. : crap. – Text : direct. (in Russian)
6. Kolkunov, N.V. Fundamentals of calculation of elastic shells. : [for construction specialties of universities]. – Moscow : Higher School, 1972. – 296 p.– Text : direct. (in Russian)
7. Nikireev, V. M.; Shadursky V. L. Practical methods for calculating shells. – Moscow : Stroyizdat, 1966. – 271 p. : crap. – Text : direct. (in Russian)
8. Rzhantsyn, A. R. Momentless theory of shallow shells. – Text : direct. – In: *Calculation of spatial structures: collection of works.* – 1955. – Issue III. – P. 135–147. (in Russian)
9. Timoshenko, S. P. Plates and shells. Translation from English by V. I. Kontovt. – Moscow ; Leningrad : Gostekhizdat, 1948. – 460 p. : crap. – Text : direct. (in Russian)
10. Muschanov, V. F. Hanging orthotropic metal shell of the covering of an industrial building with suspended transport equipment : specialty 05.23.01 «Building structures, buildings and structures»: abstract of the dissertation for the degree of candidate of technical. – Moscow, 1986. – 24 p. – Text : direct. (in Russian)
11. Gorokhov, E. V. [et al.]. Calculation and design of spatial metal structures: a textbook for construction students, undergraduates, graduate students, as well as postgraduate training and retraining. – Makeevka : DonNASA, 2012. – 560 p. – Text : direct. (in Russian)

- Филлипович ; Московский инженерно-строительный институт им. В. В. Куйбышева. – Москва, 1986. – 24 с. – Текст : непосредственный.
11. Расчет и проектирование пространственных металлических конструкций : учебное пособие для студентов строительного профиля, магистрантов, аспирантов, а также послевузовской подготовки и переподготовки / Е. В. Горохов [и др.] : под общей редакцией Е. В. Горохова ; Донбасская национальная академия строительства и архитектуры. – Макеевка : ДонНАСА, 2012. – 560 с. : ил., табл. – Текст : непосредственный.
 12. Конструкции стационарных покрытий над трибунами стадионов : монография / Е. В. Горохов, В. Ф. Муцанов, Р. И. Кинаш [и др.] ; 2-е изд., испр. и доп. – Макеевка : Донбасская национальная академия строительства и архитектуры, 2008. – 404 с. – Текст : непосредственный.
 13. Енджиевский, Л. В. Нелинейные деформации ребристых оболочек / Л. В. Енджиевский. – Красноярск : Издательство Красноярск университета, 1982. – 295 с. : ил. – Текст : непосредственный.
 14. Людковский, И. Г. Висячие покрытия в виде тонколистовых мембран / И. Г. Людковский, М. А. Иванов. – Текст : непосредственный // Пространственные конструкции зданий и сооружений. – 1972. – № 1. – С. 139–144.
 15. Висячие оболочки покрытий с внешним армированием / И. Г. Людковский, М. А. Иванов, А. В. Пасюга [и др.]. – Текст : непосредственный // На стройках России. – 1987. – № 11. – С. 7–11.
 16. Особенности совместной работы подкрепляющего элемента с полой цилиндрической безмоментной оболочкой при действии поперечной нагрузки / В. Ф. Муцанов, Е. В. Конопацкий, В. А. Шпиньков [и др.]. – Текст : электронный // Металлические конструкции. – 2021. – Том 27, № 2. – С. 97–118. – URL: http://donnasa.ru/publish_house/journals/mk/2021-2/04_mushchanov_konopatskiy_shpinkov_krysko.pdf (дата публикации: 14.06.2021).
 17. Муцанов, В. Ф. Висячая ортотропная металлическая оболочка покрытия производственного здания с подвесным транспортным оборудованием : специальность 05.23.01 «Строительные конструкции, здания и сооружения» : диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук / Муцанов Владимир Филиппович ; Московский инженерно-строительный институт им. В. В. Куйбышева. – Москва, 1986. – 173 с. : ил. – Текст : непосредственный.
 18. Сивоконь, Ю. В. Мембранные оболочки покрытий над трибунами стадионов с большими вырезами на эллиптическом плане : специальность 05.23.01 «Строительные конструкции, здания и сооружения» : диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук / Сивоконь Юлия Владимировна. – Макеевка : ДонНАСА, 2007. – 273 с. – Текст : непосредственный.
 12. Gorokhov E. V.; Muschanov V. F.; Kinash R. I. [et al.]. Designs of stationary coverings over stadium stands : monograph ; 2nd ed., rev. and additional. – Makeevka : Donbas National Academy of Civil Engineering and Architecture, 2008. – 404 p. – Text : direct. (in Russian)
 13. Endzhievsky, L. V. Nonlinear deformations of ribbed shells. – Krasnoyarsk : Krasnoyarsk University Publishing House, 1982. – 295 p. – Text : direct. (in Russian)
 14. Lyudkovsky, I. G.; Ivanov M. A. Hanging coatings in the form of thin-sheet membranes. – Text : direct. – In: *Spatial structures of buildings and structures*. – 1972. – № 1. – P. 139–144. (in Russian)
 15. Lyudkovsky, I. G.; Ivanov, M. A.; Pasyuta, A. V. [et al.]. Hanging shells of coatings with external reinforcement. – Text : direct. – In: *On construction sites in Russia*. – 1987. – № 11. – P. 7–11. (in Russian)
 16. Muschanov, V. F.; Konopatsky, E.V.; Shpinkov V. A. [et al.]. Features of the joint operation of a reinforcing element with a flat cylindrical moment-free shell under the action of a transverse load. – Text : electronic. – In: *Metal structures*. – 2021. – Volume 27, Number 2. – P. 97–118. – URL: http://donnasa.ru/publish_house/journals/mk/2021-2/04_mushchanov_konopatskiy_shpinkov_krysko.pdf (publication date: 06.14.2021). (in Russian)
 17. Muschanov, V. F. Hanging orthotropic metal shell of the covering of an industrial building with suspended transport equipment: specialty 05.23.01 «Building structures, buildings and structures»: dissertation for the degree of candidate of technical sciences – Moscow Civil Engineering Institute named after. V. V. Kuibycheva. – Moscow : 1986. – 173 p. – Text : direct. (in Russian)
 18. Syvokon, Yu. V. Membrane shells of coverings over stadium stands with large cutouts on an elliptical plan : specialty 05.23.01 «Building structures, buildings and structures» : dissertation for the degree of candidate of technical sciences. – Makeevka : DonGASA, 2007. – 273 p. – Text : direct. (in Russian)
 19. Papkovich, P. F. Proceedings on the structural mechanics of a ship : [in 4 volumes] : volume 3 : Complex bending of rods and bending of plates / P. F. Papkovich ; under the general editorship of Doctor of Technical Sciences prof. V. V. Ekimova. – Leningrad: Sudpromgiz, 1962. – 527 p. : crap. – Text : direct. (in Russian)
 20. Papkovich, P. F. Theory of elasticity : textbook – Leningrad ; Moscow : Oborongiz, 1939. – 640 p. – Text : direct. (in Russian)
 21. Strength and stability of thin-walled structures in aircraft construction : collection of abstracts and translations / edited by A. A. Umansky and P. M. Znamensky. – Moscow : Central Aerohydrodynamic Institute named after Professor N. E. Zhukovsky, 1937. – 217 p. – Text : direct. (in Russian)
 22. Rostovtsev, G. G. Reduced width of an isotropic and anisotropic flat plate. – Text : direct. – In: *Pro-*

19. Папкович, П. Ф. Труды по строительной механике корабля : [в 4 томах] : том 3: Сложный изгиб стержней и изгиб пластин / П. Ф. Папкович ; под общей редакцией доктора технических наук проф. В. В. Екимова. – Ленинград : Судпромгиз, 1962. – 527 с. : черт. – Текст : непосредственный.
20. Папкович, П. Ф. Теория упругости : учебник / П. Ф. Папкович. – Ленинград ; Москва : Оборонгиз, 1939. – 640 с. : ил. – Текст : непосредственный.
21. Прочность и устойчивость тонкостенных конструкций в самолетостроении : сборник рефератов и переводов / под редакцией А. А. Уманского и П. М. Знаменского. – Москва : Центральный аэрогидродинамический институт имени профессора Н. Е. Жуковского, 1937. – 217 с. : черт. – Текст : непосредственный.
22. Ростовцев, Г. Г. Приведенная ширина изотропной и анизотропной плоской пластинки / Г. Г. Ростовцев. – Текст : непосредственный // Труды Ленинградского института инженеров ГВФ. – 1936. – № 5–1936. – С. 111–141.
23. Ростовцев, Г. Г. Расчет тонкой плоской обшивки, подкрепленной ребрами жесткости, при нагружении силами, лежащими в ее плоскости и перпендикулярными к ней / Г. Г. Ростовцев. – Текст : непосредственный // Труды ЛИИГ ВФ. – 1940. – № 20. – С. 14.
24. Хертель, Г. Тонкостенные конструкции (Конструктивные элементы, определение прочных размеров и конструирование в самолетостроении и др. отраслях техники) / перевод с немецкого Е. М. Марьиной [и др.] ; под редакцией доктора технических наук В. А. Марьина и кандидата технических наук П. М. Любалина. – Москва : Машиностроение, 1965. – 527 с. : ил. – Текст : непосредственный.
25. Мушанов, В. Ф. Вероятностно-оптимальное проектирование большепролетных покрытий мембранного типа / В. Ф. Мушанов, И. В. Роменский. – Текст : непосредственный // «Металлостроительство-96» (Состояние и перспективы развития) : материалы международной конференции, Донецк-Макеевка, 1996 : сборник трудов в 2 т., том 1 / редколлегия Е. В. Горохов, А. М. Югов, С. В. Колесниченко. – Донецк-Макеевка : [б. и.], 1996. – С. 6–9.
26. Мушанов, В. Ф. Современные методы анализа конструктивных форм мембранных покрытий / В. Ф. Мушанов, И. В. Роменский. – Текст : непосредственный // Теория и практика металлических конструкций : сборник тезисов : Том 1. – Макеевка : ДонНАСА, 1997. – С. 258–262.
27. Еремеев, П. Г. Исследование работы замкнутого опорного контура мембранных оболочек / П. Г. Еремеев. – Текст : непосредственный // Строительная механика и расчет сооружений. – 1981. – № 4. – С. 11–14.
28. Еремеев, П. Г. Влияние податливости опорного контура мембраны на перераспределение в нем усилий / П. Г. Еремеев. – Текст : непосредственный // *Proceedings of the Leningrad Institute of Civil Air Fleet Engineers.* – 1936. – № 5–1936. – P. 111–141. (in Russian)
29. Rostovtsev, G. G. Calculation of thin flat sheathing, reinforced with stiffeners, when loaded with forces lying in its plane and perpendicular to it. – Text : direct. – In: *Proceedings of LIIG VF.* – 1940. – № 20. – P. 14. (in Russian)
24. Hertel, G. Thin-walled structures (Structural elements, determination of strong dimensions and design in aircraft manufacturing and other branches of technology) / translation from German by E. M. Maryina [and others] ; edited by Doctor of Technical Sciences V. A. Maryin and Candidate of Technical Sciences P. M. Lyubalin. – Moscow : Mechanical Engineering, 1965. – 527 p. : ill. – Text : direct. (in Russian)
25. Muschanov, V. F. Probabilistic-optimal design of long-span membrane-type coverings. – Text : direct. – In: «*In Metal Construction-96*» (State and development prospects) : materials of the international conference, Donetsk–Makeevka, 1996 : collection of works in 2 volumes, volume 1 / editorial board E. V. Gorokhov, A. M. Yugov, S. V. Kolesnichenko. – Donetsk–Makeevka : 1996. – P. 6–9. (in Russian)
26. Muschanov, V. F.; Romensky, I. V. Modern methods of analysis of structural forms of membrane coatings. – Text : direct. – In: *Theory and practice of metal structures : international conference, when and where the conference was held, in how many volumes*, volume 1. – Donetsk–Makeevka : [publishing house], 1997. – P. 258–262. (in Russian)
27. Eremeev, P. G. Study of the work of a closed support contour of membrane shells. – Text : direct. – In: *Structural mechanics and calculation of structures.* – 1981. – № 4. – P. 11–14. (in Russian)
28. Eremeev, P. G. The influence of the compliance of the supporting contour of the membrane on the redistribution of forces in it. – Text : direct. – In: *Structural mechanics and calculation of structures.* – 1984. – № 6. – P. 71–75. (in Russian)
29. Kuhn, P. Calculation of the strength of shells in aircraft construction / translation from English by A. V. Karavaeva [et al.] ; edited by S. Ya. Makarov. – Moscow : Oborongiz, 1961. – 306 p. (in Russian)
30. Bubnov, I. G. Selected works / edited and with a foreword by Academician Yu. A. Shimansky. – Leningrad : Sudpromgiz, 1956. – 439 p. – Text : direct. (in Russian)
31. Trofimov, V. I. Long-span spatial coverings made of thin-sheet aluminum ; Central Research Institute of Building Structures – Moscow : Stroyizdat, 1975. – 166 p. – Text : direct. (in Russian)
32. Moiseenko, M. O.; Popov O. N. Algorithm for calculating plates with initial deflection taking into account the compliance of the contour. – Text : electronic. – In: *Scientific almanac.* – 2017. – № 12–2(38). – P. 43–50. – URL: <http://ucom.ru/doc/na.2017.12.02.043.pdf> (date of access: 06.09.2021). (in Russian)

- ный // Строительная механика и расчёт сооружений. – 1984. – № 6. – С. 71–75.
29. Кун, П. Расчет на прочность оболочек в самолетостроении / перевод с английского А. В. Караваева [и др.] ; под редакцией С. Я. Макарова. – Москва : Оборонгиз, 1961. – 306 с. : ил.
 30. Бубнов, И. Г. Избранные труды / под редакцией и с предисловием академика Ю. А. Шиманского. – Ленинград : Судпромгиз, 1956. – 439 с. – Текст : непосредственный.
 31. Трофимов, В. И. Большепролетные пространственные покрытия из тонколистового алюминия / В. И. Трофимов ; Центральный научно-исследовательский институт строительных конструкций – Москва : Стройиздат, 1975. – 166 с. : ил. – Текст : непосредственный.
 32. Моисеенко, М. О. Алгоритм расчета пластин с начальным прогибом с учетом податливости контура / М. О. Моисеенко, О. Н. Попов. – Текст : электронный // Научный альманах. – 2017. – № 12-2(38). – С. 43–50. – URL: <http://ucom.ru/doc/na.2017.12.02.043.pdf> (дата обращения: 09.06.2021).
 33. Муцанов, В. Ф. Учет совместной работы тонколистовой мембраны с подкрепляющими элементами стабилизирующей системы / В. Ф. Муцанов, В. А. Шпиньков. – Текст : непосредственный // Металлические конструкции. – 2016. – Том 22, № 2. – С. 79–89.
 34. Муцанов, В. Ф. Уточнённая оценка совместной работы тонколистовой мембранной обшивки с подкрепляющим элементом / В. Ф. Муцанов, В. А. Шпиньков. – Текст : электронный // Металлические конструкции. – 2018. – Том 24, № 3. – С. 133–141. – URL: http://donnasa.ru/publish_house/journals/mk/2018-3/04_muschanov_shpinkov.pdf (дата публикации: 08.10.2018).
 35. EN 1993-1-5. Eurocode 3: Design of steel structures. Part 1-5. Plated structural elements : European Standard : Supersedes ENV 1993-1-5:1997 : This European Standard was approved by CEN on 13 January 2006. – Brussels : Management Centre, 2006. – 55 p. – URL : <https://www.phd.eng.br/wp-content/uploads/2015/12/en.1993.1.5.2006.pdf> (дата обращения: 09.06.2021). – Текст : электронный.
 36. Timoshenko, S. Uber die Stabilitat versteifter Platten / S. Timoshenko. – Текст : непосредственный // Der Eisenbau. – 1921. – Volume 12. – P. 147–163.
 37. Локшин, А. С., О расчете пластинок с ребрами жесткости / А. С. Локшин. – Текст : непосредственный // Прикладная математика и механика. – 1935. – Том 2. – С. 225–235.
 38. Barbre, R. Beulspannungen von Rechteckplatten mit Längssteifen bei gleichmäßiger Druckbeanspruchung / R. Barbre. – Текст : непосредственный // Der Bauingenieur. – 1936. – Volume 17, № 25/26. – P. 268–273.
 39. Muschanov, V. F.; Shpinkov, V. A. Accounting for the joint work of a thin-sheet membrane with reinforcing elements of a stabilizing system. – Text : direct. – In: *Metal structures*. – 2016. – Volume 22, № 2. – P. 79–89. (in Russian)
 40. Muschanov, V. F.; Shpinkov, V. A. Refined assessment of the joint work of thin-sheet membrane sheathing with a reinforcing element. – Text : electronic. – In: *Metal structures*. – 2018. – Volume 24, № 3. – P. 133–141. – URL: http://donnasa.ru/publish_house/journals/mk/2018-3/04_muschanov_shpinkov.pdf (date of publication: 10.08.2018). (in Russian)
 41. EN 1993-1-5. Eurocode 3: Design of steel structures. Part 1-5. Plated structural elements : European Standard : Supersedes ENV 1993-1-5:1997 : This European Standard was approved by CEN on 13 January 2006. – Brussels : Management Centre, 2006. – 55 p. – URL: <https://www.phd.eng.br/wp-content/uploads/2015/12/en.1993.1.5.2006.pdf> (access date: 06/09/2021). – Text : electronic.
 42. Timoshenko, S. Uber die Stabilitat versteifter Platten. – Text : direct. – In: *Der Eisenbau*. – 1921. – Volume 12. – P. 147–163.
 43. Lokshin, A. S., On the calculation of plates with stiffeners. – Text : direct. – In: *Applied mathematics and mechanics*. – 1935. – Volume 2. – P. 225–235. (in Russian)
 44. Barbre, R. Beulspannungen von Rechteckplatten mit Längssteifen bei gleichmäßiger Druckbeanspruchung. – Text : direct. – In: *Der Bauingenieur*. – 1936. – Volume 17, № 25/26. – P. 268–273. (in German)
 45. Barbre, R. Stabilität gleichmäßig gedrückter Rechteckplatten mit Längs- oder Quersteifen – Text: direct. In: *Ingenieur-Archiv*. – 1937. – Volume 8. – P. 117. (in German)
 46. Melan, E. Über die Stabilität von Stäben, welche aus einem mit Randwinkeln verstärkten Blech bestehen – Text: direct. – In: *Verh. III. Int. Kongr. f. Techn. Mechanic*. – Stockholm. – 1930. – P. 59. (in German)
 47. Rendulic, L. Über die Stabilität von Stäben, welche aus einem mit Randwinkeln verstärkten Blech bestehen. – Text : direct. – In: *Ingenieur-Archiv*. – 1932. – Volume 3, № 5. – P. 447–453.
 48. Lundquist, E. E. Comparison of Three Methods for Calculating the Compressive Strength of Flat and Slightly Curved Sheets and Stiffener Combination. – Text : direct. – In: *NACA Tech.* – 1933. – Note 455. – P. 424.
 49. Karman, T. Mathematical methods in engineering / T. Karman and M. Bio ; translation from English by M. G. Shestopal; edited by A. M. Lopshitz ; 2nd ed. – Moscow ; Leningrad: Gostekhizdat, 1948. – 424 p. – Text : direct. (in Russian)
 50. Von Kármán T.; Sechler, E. E.; Donnell, L. H. The strength of thin plates in compression. – In: *Trans. ASME*. – 1932. – Volume 54. – P. 53–57.
 51. Bleich, F. Stability of metal structures ; lane from English Zh. S. Sislyan; edited by E. I. Grigolyuk. –

39. Barbre, R. Stabilität gleichmässig gedrückter Rechteckplatten mit Längs – oder Querstiffen / R. Barbre. – Текст : непосредственный // Ingenieur-Archiv. – 1937. – Volume 8. – P. 117.
40. Melan, E. Über die Stabilität von Stäben, welche aus einem mit Randwinkeln verstärkten Blech bestehen / E. Melan. – Текст : непосредственный // Verh. III. Int. Kongr. f. Techn. Mechanik. – Stockholm. – 1930. – P. 59.
41. Rendulic, L. Über die Stabilität von Stäben, welche aus einem mit Randwinkeln verstärkten Blech bestehen / L. Rendulic. – Текст : непосредственный // Ingenieur-Archiv. – 1932. – Volume 3, № 5. – P. 447–453.
42. Lundquist, E. E. Comparison of Three Methods for Calculating the Compressive Strength of Flat and Slightly Curved Sheets and Stiffener Combination / E. E. Lundquist. – Текст : непосредственный // NASA Tech. – 1933. – Note 455. – P. 32.
43. Карман, Т. Математические методы в инженерном деле / Т. Карман и М. Био; перевод с английского М. Г. Шестопаля; под редакцией А. М. Лопшица; 2-е изд. – Москва; Ленинград: Гостехиздат, 1948. – 424 с. – Текст : непосредственный.
44. Von Kármán T. The strength of thin plates in compression / Von Kármán T., E. E. Sechler, L. H. Donnell // Trans. ASME. – 1932. – Volume 54. – P. 53–57.
45. Блейх, Ф. Устойчивость металлических конструкций / Ф. Блейх; пер. с англ. Ж. С. Сисляна; под ред. Э. И. Григолюка. – Москва: Физматгиз, 1959. – 544 с.: черт. – Текст : непосредственный.
46. Нехаев, Г. А. Легкие металлические конструкции : учебное пособие / Г. А. Нехаев. – 2-е изд. – Саратов: Вузовское образование, 2019. – 91 с. – ISBN 978-5-4487-0334-8. – Текст : электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS : [сайт]. – URL: <https://www.iprbookshop.ru/79642.html> (дата обращения: 09.06.2021). – Режим доступа: для авторизир. пользователей.
47. Крысько, А. А. Геометрическое и компьютерное моделирование криволинейных поверхностей мембранных покрытий на прямоугольном плане / А. А. Крысько. – Текст : непосредственный // Строительство и техногенная безопасность. – 2020. – № 18 (70). – С. 97–106.
48. Конопацкий, С. В. Використання узагальнених тригонометричних функцій для визначення плоских кривих / С. В. Конопацький, І. Г. Балюба, – В. М. Верещага. – Текст : непосредственный // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – 2013. – Випуск 4. – Том 57. – С. 119–124.
- Moscow: Fizmatgiz, 1959. – 544 p.: черт. – Текст : direct. (in Russian)
46. Nekhaev, G. A. Light metal structures : textbook ; 2nd ed. – Saratov : University Education, 2019. – 91 p. – ISBN 978-5-4487-0334-8. – Text : electronic. – In: *Electronic library system IPR BOOKS*: [website]. – URL: <https://www.iprbookshop.ru/79642.html> (date of access: 06.09.2021). (in Russian)
47. Krysko, A. A. Geometric and computer modeling of curved surfaces of membrane coatings on a rectangular plan. – Text : direct. – In: *Construction and technogenic safety*. – 2020. – № 18 (70). – P. 97–106. (in Russian)
48. Konopatskyi, E. V.; Balyuba, I. G.; Vereshchaga, V. M. Use of generalized trigonometric functions to determine plane curves. – Text : direct. – In: *Applied geometry and engineering graphics*. – 2013. – Issue 4. – Volume 57. – P. 119–124. (in Russian)

Муцанов Владимир Филиппович – доктор технических наук, профессор; заведующий кафедрой теоретической и прикладной механики, проректор по научной работе ФГБОУ ВО «Донбасская национальная академия строительства и архитектуры». Член международной организации «Институт гражданских инженеров» и международной организации «Пространственные конструкции», академик Академии строительства Украины и Украинской академии наук, член-корреспондент академии архитектуры Украины. Научные интересы: теория надёжности, расчёт, проектирование и техническая диагностика пространственных металлических конструкций.

Конопацкий Евгений Викторович – доктор технических наук, доцент; профессор кафедры инженерной геометрии, компьютерной графики и автоматизированного проектирования ФГБОУ ВО «Нижегородский государственный архитектурно-строительный университет». Научные интересы: параметризация геометрических многообразий в точечном исчислении; геометрическое моделирование многофакторных процессов и явлений живой и не живой природы, техники, технологии, экономики, строительства и архитектуры с помощью многомерной интерполяции и аппроксимации.

Шпильков Владимир Александрович – ассистент кафедры теоретической и прикладной механики ФГБОУ ВО «Донбасская национальная академия строительства и архитектуры». Научные интересы: расчёт и проектирование пространственных систем покрытий в виде мембранных покрытий на эллиптическом плане.

Муцанов Володимир Пилипович – доктор технічних наук, професор; завідувач кафедри теоретичної і прикладної механіки, проректор з наукової роботи ФДБОУ ВО «Донбаська національна академія будівництва і архітектури». Член міжнародної організації «Інститут цивільних інженерів» і міжнародної організації «Просторові конструкції», академік Академії будівництва України і Української академії наук, член-кореспондент Академії архітектури України. Наукові інтереси: теорія надійності, розрахунок, проектування та технічна діагностика просторових металевих конструкцій.

Конопацький Євген Вікторович – доктор технічних наук, доцент; професор кафедри інженерної геометрії, комп'ютерної графіки та автоматизованого проектування ФДБОУ ВО «Нижегородський державний архітектурно-будівельний університет». Наукові інтереси: параметризація геометричних різноманіття у точковому численні; геометричне моделювання багатфакторних процесів і явищ живої і не живої природи, техніки, технології, економіки, будівництва та архітектури за допомогою багатовимірної інтерполяції і апроксимації.

Шпильков Володимир Олександрович – асистент кафедри теоретичної і прикладної механіки ФДБОУ ВО «Донбаська національна академія будівництва і архітектури». Наукові інтереси: розрахунок і проектування просторових систем покриттів у вигляді мембранных покриттів на еліптичному плані.

Mushchanov Volodymyr – D. Sc. (Engineering), Professor; Head of the Theoretical and Applied Mechanics Department, vice-rector on the scientific activity of the FSBEI HE «Donbas National Academy of Civil Engineering and Architecture». A member of the international organization «Institute of Civil Engineer» and international organization of «Spatial Structures», the academician of the Civil Engineering Academy in Ukraine and the Academy of Sciences of Ukraine, an associate member of the Academy of Architecture of Ukraine. Scientific interests: the reliability theory, analyze, designing and engineering diagnostics of spatial metallic structures.

Konopatskiy Evgeniy – D. Sc. (Engineering), Associate Professor; Professor of the Department Engineering Geometry, Computer Graphics and Automated Designing of the FSBEI HE «Nizhny Novgorod State University of Architecture and Civil Engineering». Scientific interests: parameterization of geometric manifolds in point calculus; geometric modeling of multi-factor processes and phenomena of living and non-living nature, engineering, technology, economics, building and architecture using multidimensional interpolation and approximation.

Shpinkov Vladimir – assistant of the Theoretical and Applied Mechanics Department, FSBEI HE «Donbas National Academy of Civil Engineering and Architecture». Scientific interests: calculation and design of spatial coating systems in the form of membrane coatings on an elliptical plane.