



## АНАЛІЗ СТІЙКОСТІ І МАНЕВРНОСТІ РУХУ МОДЕЛІ СІДЕЛЬНОГО АВТОПОЇЗДА З СИСТЕМОЮ УПРАВЛІННЯ ОПОРНОЮ ВІССЮ НАПІВПРИЧЕПА

**В.Г. Вербицкий<sup>a</sup>, О.Д. Бумага<sup>b</sup>**

<sup>a</sup>Донецкий институт автомобильного транспорта  
вул. Артема, 17, м. Донецьк, Україна, 83089.

<sup>b</sup>Донбасская национальная академия строительства и архитектуры  
вул. Державина, 2, м. Макіївка, Україна, 86123.  
E-mail: oxsi@bigmir.net, alexbumaga@rambler.ru

Отримана 24 березня 2008; прийнята 14 травня 2008.

**Анотація.** Розв'язано задачу аналізу множини стаціонарних станів дволанкового автопоїзда, що складається з двохосного тягача та одноосного напівпричепи. Належний вибір лінійного закону управління забезпечує достатню маневреність довгобазного автопоїзда при русі в кільцевому коридорі. Визначена область стійкості прямолінійного режиму в просторі керованих параметрів (передавального коефіцієнта і швидкості подовжнього руху): від'ємний коефіцієнт передачі приводить до інтенсивного ковзання напівпричепи (випадок втрати стабільності прямолінійного руху), тому що опорна вісь напівпричепи орієнтується у напрямі відхилення напівпричепи, і центр мас тягача намагається рухатись по спіралі, що згортається; позитивний коефіцієнт передачі приводить до «помірного» відхилення траєкторії центру мас трактора від первинного прямолінійного напрямку руху (стабілізує прямолінійну конфігурацію автопоїзда). Чисельно побудовані однопараметричні множини стаціонарних станів на основі диференціально-геометричного методу продовження по параметру.

**Ключові слова:** математична модель автопоїзда, коливальна нестійкість, передаточний коефіцієнт, метод продовження по параметру, стійкість руху.

## АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ И МАНЕВРНОСТИ ДВИЖЕНИЯ МОДЕЛИ СЕДЕЛЬНОГО АВТОПОЕЗДА С СИСТЕМОЙ УПРАВЛЕНИЯ ОПОРНОЙ ОСЬЮ ПОЛУПРИЦЕПА

**В.Г. Вербицкий<sup>a</sup>, А.Д. Бумага<sup>b</sup>**

<sup>a</sup>Донецкий институт автомобильного транспорта  
ул. Артема, 17, г. Донецк, Украина, 83089.

<sup>b</sup>Донбасская национальная академия строительства и архитектуры  
ул. Державина, 2, г. Макеевка, Украина, 86123.  
E-mail: oxsi@bigmir.net, alexbumaga@rambler.ru

Получена 24 марта 2008; принята 14 мая 2008.

**Аннотация.** Решена задача повышения маневренности двухзвенного автопоезда, состоящего из двухосного тягача и одноосного полуприцепа с системой принудительного поворота опорной осью. Надлежащий выбор линейного закона управления обеспечивает достаточную маневренность длиннобазного автопоезда при движении в кольцевом коридоре. Определена область устойчивости прямолинейного режима в пространстве управляемых параметров (передаточного коэффициента и скорости продольного движения): отрицательный передаточный коэффициент приводит к интенсивному заносу полуприцепа (случай потери устойчивости прямолинейного движения), так как опорная ось полуприцепа ориентирована в сторону отклонения самого полуприцепа, а центр масс тягача стремится

двигаться по скручивающейся спирали; положительный передаточный коэффициент приводит к «умеренному» отклонению траектории центра масс тягача от первоначального прямолинейного направления движения (стабилизирует прямолинейную конфигурацию автопоезда). Численно построено однопараметрическое семейство стационарных режимов на основе дифференциально-геометрического метода продолжения по параметру.

**Ключевые слова:** математическая модель автопоезда, колебательная неустойчивость, передаточный коэффициент, метод продолжения по параметру, устойчивость движения.

## ANALYSIS OF STABILITY AND MODEL MANOEVRABILITY OF SADDLE LORRY CONVOY MODEL WITH THE CONTROL SYSTEM OF THE SUPPORTING AXIS SEMITRAILER

V.G. Verbitskiy<sup>a</sup>, A.D. Bumaga<sup>b</sup>

<sup>a</sup>*Donetsk Institute of Motor Transport*

*Artema str, 17, Donetsk, Ukraine, 83089.*

<sup>b</sup>*Donbass National Academy of Civil Engineering and Architecture*

*Derzhavina str., 2, Makeyevka, Ukraine, 86123.*

*E-mail: oxsi@bigmir.net, alexbumaga@rambler.ru*

*Received 24 March 2008; accepted 14 May 2008.*

**Abstract.** The problem on manoeuvrability improving of the two-link lorry convoy consisting of biaxial truck tractor and uniaxial semi-trailer has been solved. The proper choice of linear law of management provides sufficient construability of the two-link road train at motion in a circular corridor. The area of the rectilinear motion stability has been determined in the sphere of the guided parameters (transmission coefficient and longitudinal velocity): a negative transmission coefficient results the intensive skidding of semitrailer the (case of stability loss of rectilinear motion), as the supporting axis of semitrailer is oriented toward the declination of semitrailer, itself and the center of the tractor mass tries to move on a convoluting spiral; the positive transmission coefficient results the «moderate» deviation of trajectory of the truck mass centre from the primary rectilinear direction of motion (stabilizes the rectilinear configuration of the two-link lorry convoy). Numerical constructions are given sets of the one-parameter set of steady regime on the basis of the differential-geometric method of parameter continuation.

**Keywords:** mathematical model of lorry convoy, swaying instability, transmission coefficient, method of continuation on a parameter, stability of motion.

### Введение

Математическая модель автопоезда была объектом исследования многих авторов [2 - 8] (для нее характерны как колебательная неустойчивость – виляние полуприцепа, так и «складывание» – занос полуприцепа). Наиболее полно изучена линейная модель автопоезда [10], для которой получено аналитическое выражение критической скорости прямолинейного движения (в терминологии теории устойчивости движения А.М. Ляпунова это критический случай одного нулевого корня). Автопоезд с закрепленным рулевым управлением при движении со скоростью выше критической

уже не может сохранять прямолинейный режим движения (подобно одиночному автомобилю с избыточной поворачиваемостью при закритической скорости).

Условия возникновения колебательной (флаттерной) неустойчивости даже в случае прямолинейного движения автопоезда (критический случай пары комплексно-сопряженных корней с нулевой действительной частью) в общем случае слишком громоздки и не поддаются сколько-нибудь полному качественному анализу (из численного анализа следует, что на колебательную неустойчивость существенно влияет величина момента инерции

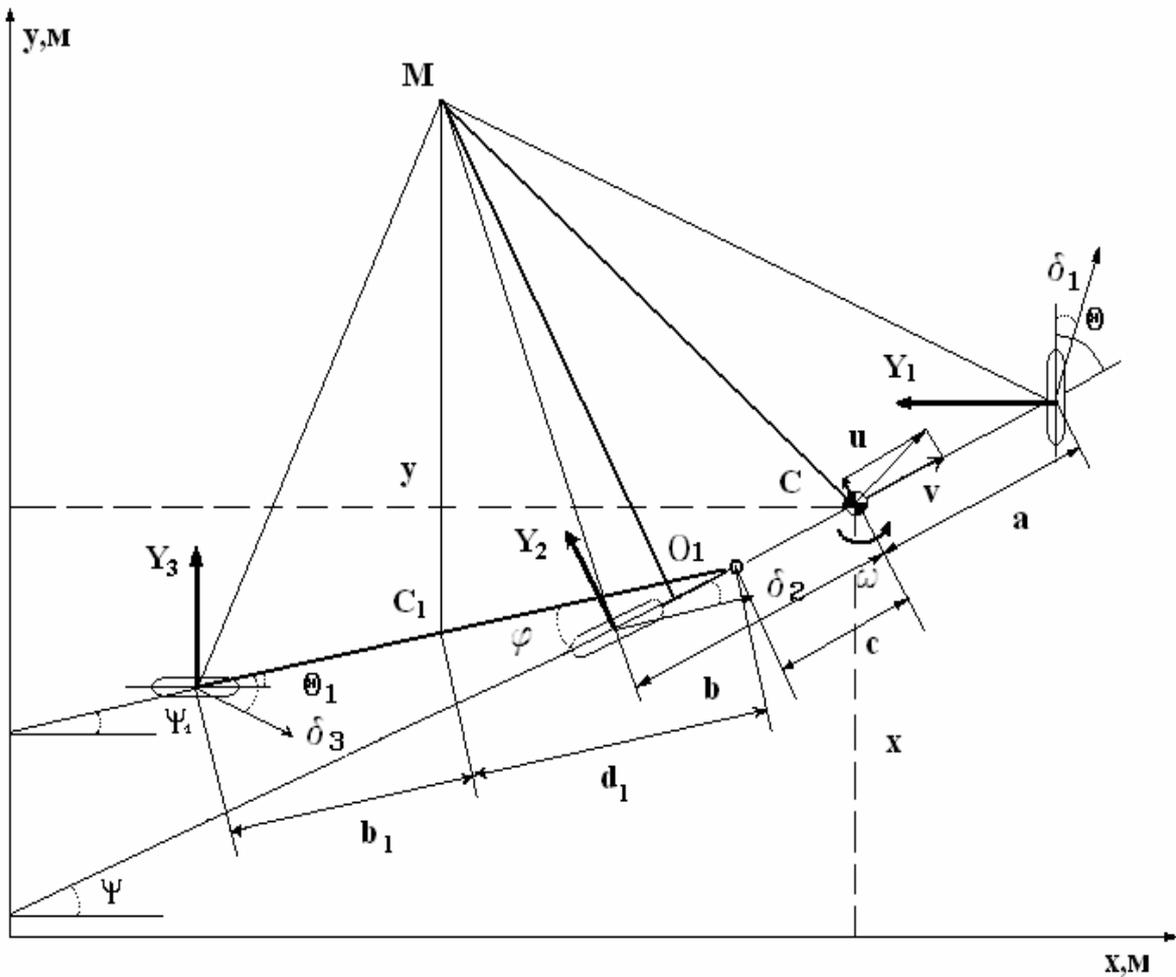


Рис.1. Схема двухзвенного седельного автопоезда.

полуприцепа и положение его центра масс). Вопросы устойчивости круговых стационарных режимов движения изучены еще менее полно, можно сослаться на работу, где получен результат, обобщающий формулу критической скорости на случай круговых режимов достаточно большого радиуса [6].

Целью данной работы является развитие численно-аналитических методов анализа устойчивости и маневренности движения модели седельного автопоезда с системой управления опорной осью полуприцепа по углу складывания между тягачом и полуприцепом, а также выбор надлежащего линейного закона управления, обеспечивающего достаточную маневренность длиннобазного автопоезда при движении в кольцевом коридоре.

### Постановка задачи

На рис.1 показан вид в плане одноколейной (велосипедной) модели сочлененного автопоезда с жестким рулевым управлением, состоящего из ведущего звена (тягача) и одноосного ведомого звена (полуприцепа). Упругое колесо обладает свойством увода — вектор скорости может не лежать в продольной плоскости симметрии колеса (т.е. направление качения не совпадает с продольной плоскостью колеса), при этом возникает поперечная составляющая реакции опорной поверхности (сила увода).

Параметры системы:  $v$  — продольная составляющая скорости центра масс тягача;

$a, b$  — расстояние от центра масс тягача до точек крепления передней и задней оси тягача;  $c$  — расстояние от центра масс тягача до точки

сцепки с задним звеном;  $d_1$  – расстояние от центра масс заднего звена до точки сцепки; коэффициент трения  $k_f$ ; коэффициенты увода на осях ( $k_1, k_2, k_3$ ); коэффициенты сцепления при определении боковых сил увода ( $\chi_1, \chi_2, \chi_3$ ); устанавливаемый угол поворота колес управляемого модуля  $\theta$ ; устанавливаемый угол поворота колес полуприцепа  $\theta_1 = \text{PCH}$  (линейный закон управления должен обеспечить прохождение автопоезда в габаритном кольцевом коридоре, не ухудшая при этом показатели устойчивости в прямолинейном режиме и круговых режимах достаточно большого радиуса).

Упругие свойства катящихся колес (свойства увода) описаны феноменологической гипотезой бокового увода [1]: силы бокового увода, имеющие эмпирическое происхождение, можно аппроксимировать выражениями (монотонно возрастающая функция, имеющая характер кривой насыщения)

$$Y_i = k_i \delta_i / \sqrt{1 + (k_i \delta_i / \chi_i Z_i)^2}, \quad (1)$$

где  $Z_i$  – реакции опорной поверхности на осях

$$Z_1 = \frac{1}{l} [mgb - m_2 g \frac{b_1}{L_1} (c - b)];$$

$$Z_2 = \frac{1}{l} [mga + m_2 g \frac{b_1}{L_1} (c + a)];$$

$$Z_3 = m_2 g \frac{d_1}{L_1}; \quad l = a + b; \quad L_1 = d_1 + b_1.$$

Сила увода линейна в некоторой конечной окрестности нуля ( $k_i$  – коэффициент увода:  $Y_i'(0) = k_i > 0$ ). Пусть  $N_i$  – вертикальная нагрузка на ось, тогда при достаточно больших углах увода боковая сила стремится к пределу

$$\lim_{\delta_i \rightarrow +\infty} Y_i(\delta_i) / N_i = \chi_i.$$

Возможна более точная аппроксимация сил увода на основе «магической формулы» [12], однако ее использование требует знания большого числа констант, определяемых экспериментально.

Пусть  $m, m_2, I, I_2$  – массы и центральные моменты инерции относительно вертикальных осей корпуса и полуприцепа соответственно;  $M_{O1}$  – упруговязкий момент, возникающий на оси сцепки (в цилиндрическом шарнире) с

полуприцепом, в линейном приближении

$$M_{O1} = k_p \phi + h_p \dot{\Phi}.$$

### Основная часть

Вывод дифференциальных уравнений плоско-параллельного движения седельного автопоезда приведен в [7]

$$\begin{aligned} m(U + wv) &= \cos(\theta)Y_1 + \cos(\phi + \theta_1)Y_3 - \\ &- 2m_2 \sin(\phi)wdl\Phi + m_2 \sin(\phi)d1\Phi^2 + \\ &+ m_2 \cos(\phi)d1\Omega - m_2 \cos(\phi)d1PP + \\ &+ m_2 \sin(\phi)d1w^2 + Y_2 - m_2U + m_2c\Omega - \\ &- m_2wv; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J\Omega &= 2cm_2 \sin(\phi)wdl\Phi - cm_2 \sin(\phi)d1\Phi^2 - \\ &- cm_2 \cos(\phi)d1\Omega + cm_2 \cos(\phi)d1PP - \\ &- cm_2 \sin(\phi)d1w^2 + a \cos(\theta)Y_1 - \\ &- c \cos(\phi + \theta_1)Y_3 + cm_2U - \\ &- m_2c^2\Omega - b_2Y_2 + cm_2wv \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} J_2(\Omega - PP) &= -L_1Y_3 \cos(\theta_1) + dl \cos(\phi)m_2U + \\ &+ dl \cos(\phi)m_2wv - dl \sin(\phi)m_2wu - \\ &- dl^2m_2\Omega + dl^2m_2PP - cm_2 \cos(\phi)d1\Omega + \\ &+ cm_2 \sin(\phi)d1w^2 \end{aligned}$$

Система дифференциальных уравнений движения автопоезда описывает изменение фазовых переменных ( $u, w, \phi, \Phi$ ):  $u$  – поперечная составляющая скорости центра масс тягача (квазискорость),  $U$  – ее производная в подвижной системе координат;  $W$  – угловое ускорение относительно вертикальной оси;  $\dot{\omega}$  – скорость складывания угла;  $PP$  – угловое ускорение полуприцепа относительно вертикальной оси.

Силы взаимодействия между звеньями (действуют на тягач) определяются соотношениями:

$$\begin{aligned} X_{O1} &= -m_2[\dot{v} - \omega u - (\dot{\omega} - \ddot{\phi})d_1 \sin \phi + \omega^2 c + \\ &+ (\omega - \dot{\phi})^2 d_1 \cos \phi] + X_3 \cos \phi + Y_3 \sin \phi; \\ Y_{O1} &= -m_2[\dot{u} + \omega v - (\dot{\omega} - \ddot{\phi})d_1 \cos \phi - \dot{\omega} c - \\ &- (\omega - \dot{\phi})^2 d_1 \sin \phi] - X_3 \sin \phi + Y_3 \cos \phi. \end{aligned} \quad (3)$$

Приведенные углы бокового увода колесных осей определяются выражениями

$$\begin{aligned} \delta_1 &= \theta - \operatorname{arctg} \frac{(u + a\omega)}{v}; \\ \delta_2 &= \operatorname{arctg} \frac{-u + b\omega}{v}; \\ \delta_3 &= -\theta_1 + \operatorname{arctg} \frac{-u_1 + b_1\omega_1}{v_1}; \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} v_1 &= v \cos(\phi) - (u - \omega c) \sin(\phi); \\ u_1 &= v \sin(\phi) + (u - \omega c) \cos(\phi) - \omega_1 d_1; \quad \omega_1 = \omega - \dot{\phi}. \end{aligned}$$

Уравнения в вариациях. Уравнения (2) при уравновешенных продольных силах ( $X_1 = 0, X_2 = 0, X_3 = 0$ ) допускают решение

$$\{v = \text{const}, u = 0, \omega = 0, q = 0, \phi = 0, \dot{\phi} = 0\},$$

которое соответствует равномерному прямолинейному движению машины. Примем это движение за невозмущенное и исследуем его устойчивость по А.М. Ляпунову. Опуская штрихи возле вариаций переменных и полагая  $Y_i = k_i d_i$ ,

получаем следующие линеаризованные уравнения возмущенного движения.

Матрица при старших производных  $A(3,3)$  системы линейного приближения:

$$A = \begin{bmatrix} m + m_2 & -m_2(d_1 + c) & m_2 d_1 \\ -m_2 c & J + m_2 c^2 + cm_2 d_1 & -cm_2 d_1 \\ m_2 d_1 & -J_2 - d_1^2 m_2 - cm_2 d_1 & J_2 + d_1^2 m_2 \end{bmatrix}$$

Матрица коэффициентов при координатах системы линейного приближения  $B(3,3)$ :

$$\begin{aligned} B = & \left[ \begin{aligned} & -\frac{k_1 + k_2 + k_3}{v}, \\ & -\frac{mv^2 + kla - k_3c - k_3b_1 - k_3d_1 - k_2b + m_2v^2}{v}, \\ & -k_3(PCH + 1) \end{aligned} \right], \\ & \left[ \begin{aligned} & -\frac{k_1a + k_2b + k_3c}{v}, \\ & -\frac{a^2kl + cm_2v^2 - b^2k_2 - c^2k_3 - k_3b_1c - k_3d_1c}{v}, \\ & -ck_3(-PCH - 1) \end{aligned} \right], \\ & \left[ \begin{aligned} & -\frac{(b_1 + d_1)k_3}{v}, -\frac{1}{v}(-k_3b_1c - k_3b_1^2 - 2k_3b_1 - k_3d_1c - \\ & -k_2d_1^2 + d_1v^2), k_3(-b_1PCH - b_1 - d_1PCH - d_1) \end{aligned} \right] \end{aligned}$$

В случае ( $X_1 = 0, X_2 = 0, X_3 = 0, k_p = 0, h_p = 0$ ) может быть получено обозримое условие

статической устойчивости, которое совпадает с условием устойчивости модели автопоезда с «неподвижной» опорной осью полуприцепа [8]

$$V_{kp}^2 = \frac{k_1 k_2 L_1^2}{m L_1 (k_1 a_1 - k_2 b) + m_2 b_1 [k_1 (a + c) + k_2 (c - b)]}. \quad (5)$$

Разрешив систему (2) относительно старших производных, можно применить численные методы интегрирования. Матрица  $C(4,4)$  системы линейных дифференциальных уравнений, разрешенных относительно производных, определяет свойства устойчивости модели автопоезда в окрестности прямолинейного режима движения (если действительные части всех собственных значений матрицы  $C$  отрицательны при заданных конструктивных параметрах системы и текущей скорости продольного движения – имеет место устойчивость прямолинейного равномерного движения, если же при изменении параметров появилось хотя бы одно собственное значение с положительной действительной частью – прямолинейный режим неустойчив).

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{\omega} \\ \dot{\phi} \\ \dot{\Phi} \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} u \\ \omega \\ \phi \\ \Phi \end{pmatrix}.$$

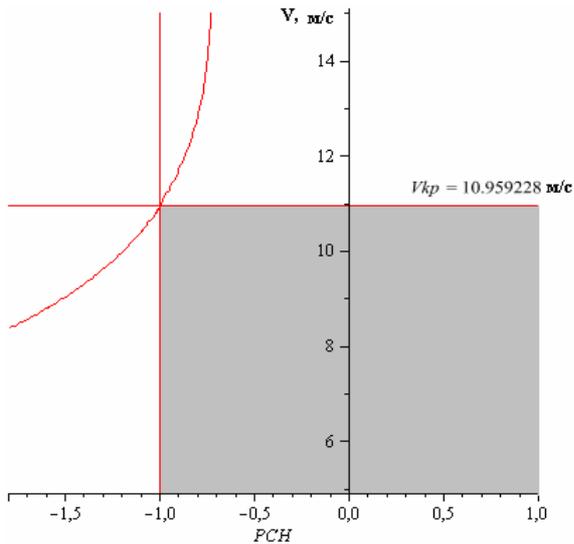
Рассмотрим условия устойчивости прямолинейного стационарного режима движения для следующего базового набора числовых значений параметров модели автопоезда:  $m = 7000 \text{ кг}, m_2 = 18000 \text{ кг}, a = 1,4 \text{ м}, b = 4 \text{ м}, c = 4,39 \text{ м}, b_1 = 7 \text{ м}, d_1 = 5 \text{ м}, k_p = 0, h_p = 0, v = 4,5 \text{ м/с}, k_1 = 160000 \text{ Н}, k_2 = 180000 \text{ Н}, k_3 = 165000 \text{ Н}, J = 0,35 * m * a * b \text{ кг м}^2, J_2 = 0,8 * m_2 * d_1 * b_1 \text{ кг м}^2, c_i = 0,8$ .

На рисунке 2 в плоскости параметров ( $PCH, v$ ) представлена область устойчивости прямолинейного режима, полученная на основе численного анализа необходимых и достаточных условий устойчивости Рауса-Гурвица:

Характеристическое уравнение системы  $n$  линейных дифференциальных уравнений в общем случае представляется полиномом  $n$ -й степени

$$a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_n = 0, \quad a_0 > 0 \quad (6)$$

Действительные части корней уравнения (6) отрицательны тогда и только тогда, когда положительны все диагональные миноры



**Рис.2.** Область устойчивости прямолинейного движения в плоскости параметров  $(PCH, v)$  ограничена горизонтальной прямой  $v=v_{kp}$  (критическая скорость  $v_{kp}=10.959228$  м/с) и слева вертикальной прямой  $PCH=-1$ .

матрицы Гурвица

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & \dots \\ a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & \dots \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 & \dots \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

В области устойчивости все определители Гурвица должны принимать положительные значения ( $DG[i]>0, i=1...4$ ).

Ниже показано распределение знаков определителей Гурвица в различных областях плоскости параметров  $(PCH, v)$ :

$(\{v=10, PCH=1.0\}, DG[4])>0$ ;  $(\{v=10, PCH=0.99\}, DG[4])>0$ ;  $(\{v=8, PCH=-1.5\}, DG[4])<0$ ;  
 $(\{v=10, PCH=-1.5\}, DG[4])>0$ .  
 $(\{v=10, PCH=1.0\}, DG[3])>0$ ;  $(\{v=10, PCH=0.99\}, DG[3])>0$ ;  $(\{v=8, PCH=-1.5\}, DG[3])>0$ ;  
 $(\{v=10, PCH=-1.5\}, DG[3])<0$ .

Сопоставим эти результаты с набором собственных значений матрицы линейного приближения  $C$  (рис.3, а, б):

а)  $(v=10$  м/с,  $PCH=1.0$ ):  
 $eigv=-1.368861594+1.843272810i, -0.1522942784-4.815638935-1.368861594-1.843272810i$

б)  $(v=10$  м/с,  $PCH=-1.5$ ):

$eigv=0.4058212404-0.1607529094-2.981319987-4.96940472i$

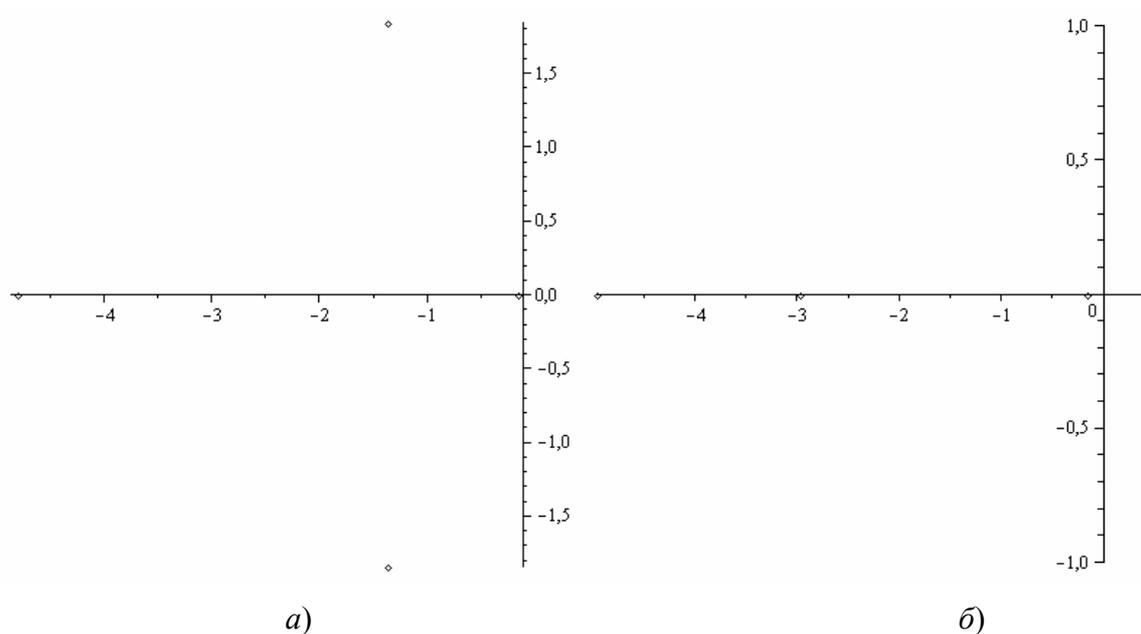
Далее рассмотрим характер динамического поведения автопоезда в случае потери устойчивости прямолинейного движения. Ниже представлены результаты (рис.4, а, б) численного интегрирования нелинейной системы дифференциальных уравнений движения автопоезда ( $v=10$  м/с,  $PCH=-1.5$ ,  $\mathcal{J}_0=0.1$ рад – начальное возмущение по углу складывания):

Отрицательный передаточный коэффициент, в случае потери устойчивости прямолинейного движения, приводит к интенсивному заносу полуприцепа, так как опорная ось полуприцепа ориентирована в сторону отклонения самого полуприцепа; центр масс тягача стремится двигаться по спиралевидной скручивающейся кривой (в этом случае происходит быстрый рост угловой скорости). Положительный передаточный коэффициент в аналогичном случае приводит к «умеренному» отклонению траектории центра масс тягача от первоначального прямолинейного направления движения с незначительным углом складывания – принудительный поворот опорной оси полуприцепа в этом случае стабилизирует прямолинейную конфигурацию автопоезда.

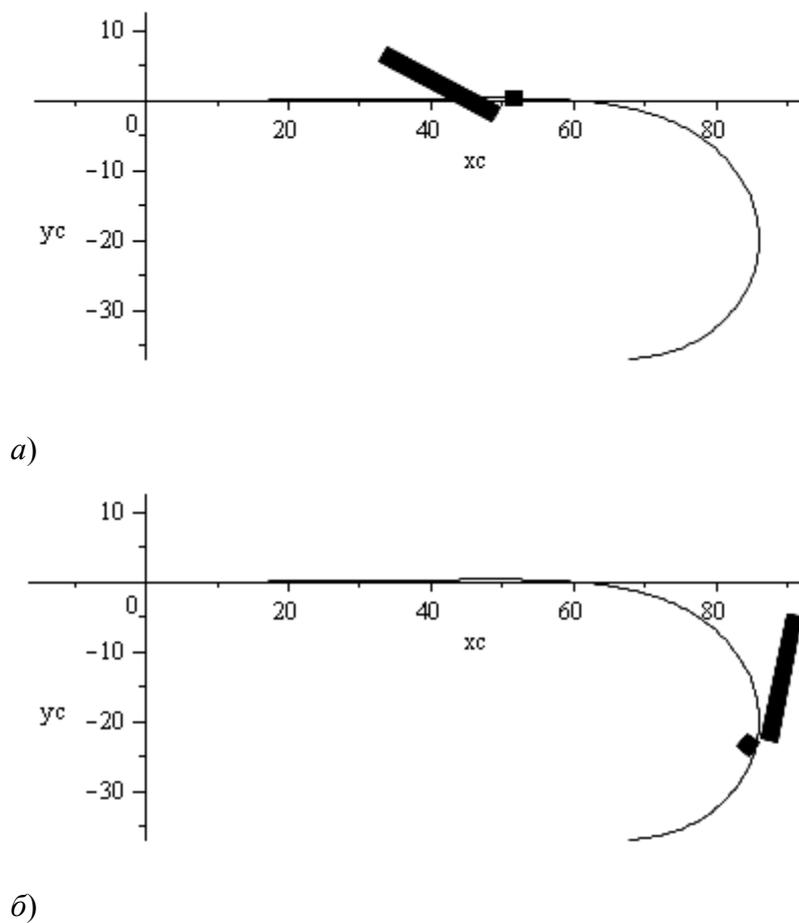
### Визуализация прохождения автопоездом кольцевого коридора

Выбор значений управляющих параметров  $(v, q, PCH)$  был продиктован следующими соображениями – конфигурация автопоезда должна соответствовать двум предельным положениям длиннобазного полуприцепа в кольцевом коридоре. Для одного из них полуприцеп «совпадает» с хордой внешней окружности, для другого – «касается» внутренней окружности, не выходя за пределы кольца. Если эти предельные положения сливаются фактически в одно, то соответствующая база полуприцепа является предельно допустимой для данного кольцевого коридора. Диапазон возможных углов складывания в каждом из предельных случаев будет определяться положением точки сцепки и расстояниями от точки сцепки до колес передней и задней осей тягача.

Значения фазовых переменных  $\{j=0.797223232$  рад,  $u=1.441446038$  м/с,  $w=0.6467876694$  рад/с} определяют стационарный



**Рис.3.** а) действительные части всех собственных значений меньше нуля – устойчивость; б) имеется одно действительное собственное значение больше нуля – неустойчивость.



**Рис.4.** а), б). В процессе движения возмущения по углу складывания растут; происходит переориентация полуприцепа (меняется знак угла складывания).

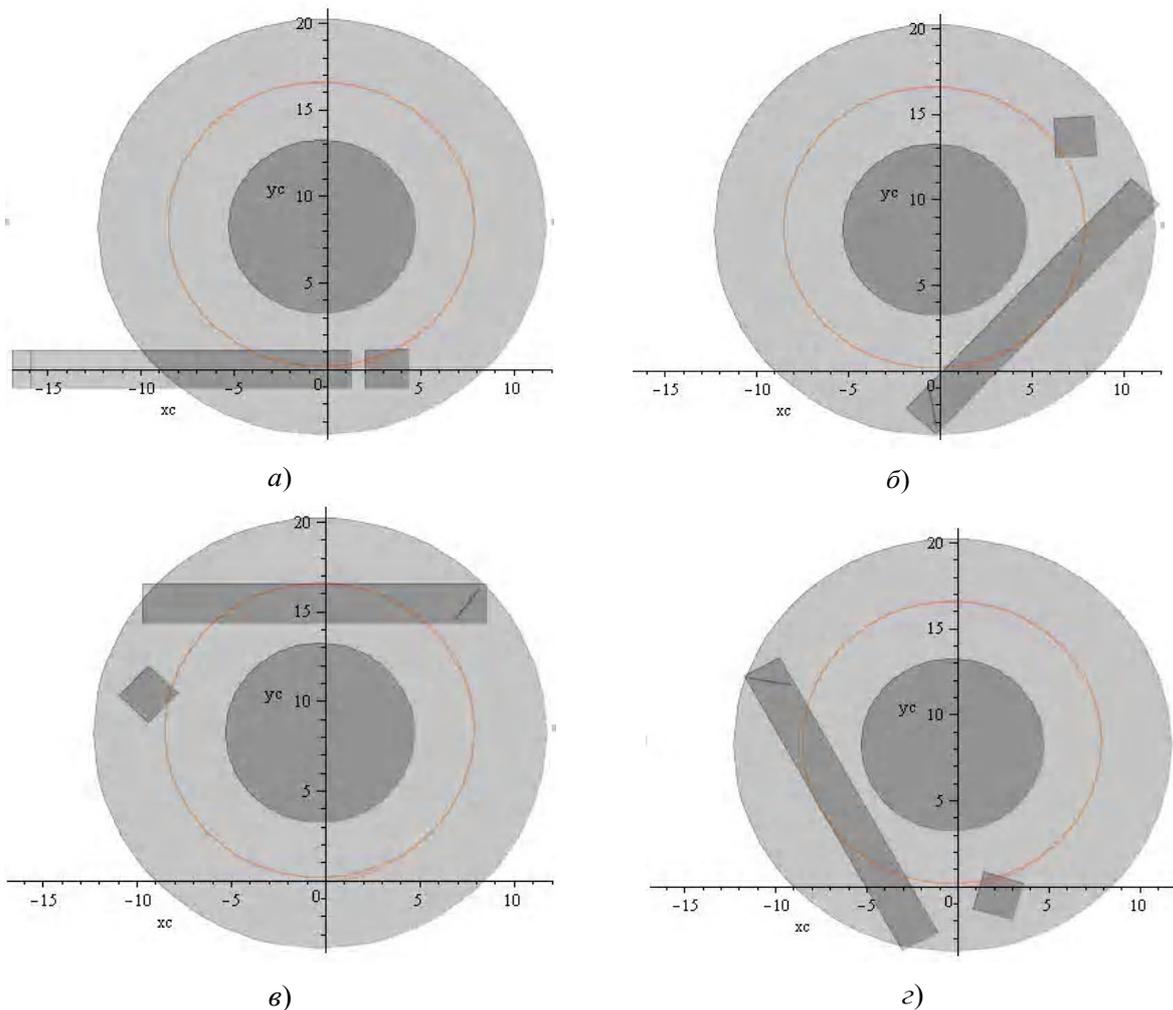


Рис.5. а), б), в), з). Последовательные этапы прохождения кольцевого коридора.

режим при выбранных управляющих параметрах ( $v=5.1\text{ м/с}$ ;  $q = 0.56\text{ рад}$ ;  $PCH=0.815$ ); характер устойчивости соответствующего режима определим по набору собственных значений матрицы линеаризации (линеаризация проводится в окрестности найденного кругового режима), характеристическое уравнение и его корни приводятся ниже:

$$\text{chp}_{s^*} = \lambda^4 + 6.394640135 \lambda^3 + 13.34992579 \lambda^2 + 15.40577521 \lambda + 6.935158636;$$

$$\text{eig}_{s^*} = -0.8421221487 + 1.169232254 I, -0.8696803146, -3.840715523, -0.8421221487 - 1.169232254 I.$$

Приведем еще один набор управляющих параметров ( $v=4\text{ м/с}$ ;  $q = 0.56\text{ рад}$ ;  $PCH=0.8$ ) и соответствующий ему устойчивый стационарный

режим  $\{j = 0.4991666151\text{ рад}$ ,  $u = 1.437781358\text{ м/с}$ ,  $w = 0.9100787673\text{ рад}\}$ ;

$$\begin{aligned} \text{chp}_{s^{**}} &= \lambda^4 + 10.70595516 \lambda^3 + 34.88319238 \lambda^2 + \\ &+ 38.99302174 \lambda + 13.12100538; \\ \text{eig}_{s^{**}} &= -0.6131939546, -1.174342605, - \\ &3.169459599, -5.748959001 \end{aligned}$$

Положение полуприцепа при прохождении габаритного кольца в этом случае отвечает второму «граничному» положению, таким образом, найден искомым интервал возможных значений управляющих параметров, обеспечивающих необходимую маневренность модели автопоезда.

На последующих этапах движения полуприцеп остается «касательным» к внутренней границе коридора.

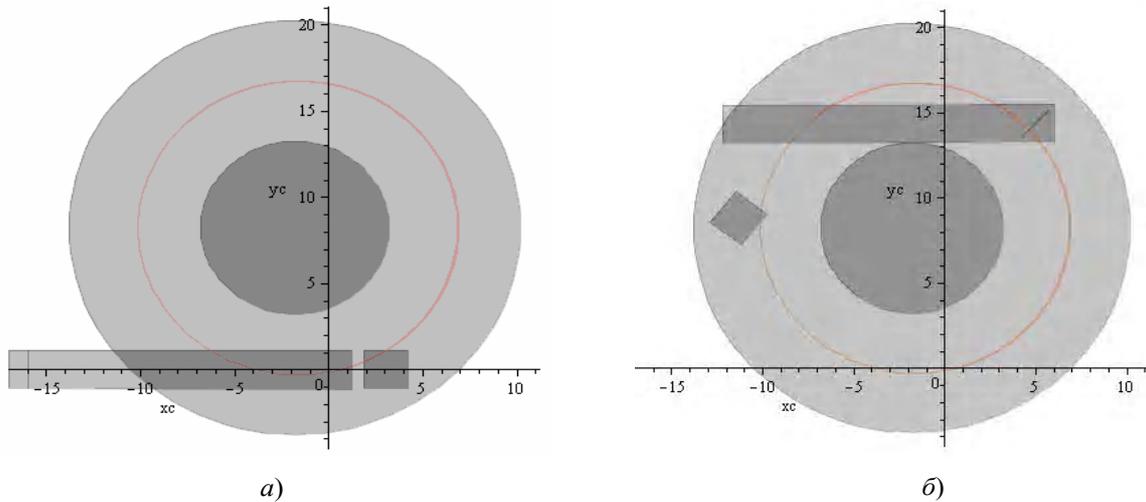


Рис.6. а), б). Последовательные этапы прохождения кольцевого коридора.

**Метод продолжения по параметру**

Рассмотрим далее метод продолжения по параметру, который может быть полезен при решении задачи синтеза закона управления. Если при заданных управляющих параметрах ( $v = \text{const}$ ,  $q = \text{const}$ ) система имеет хотя бы один устойчивый стационарный режим, то на основе численного построения фазового портрета может быть найден соответствующий устойчивый режим движения и оценена его область притяжения. Для определения координат неустойчивого стационарного режима этот приближенный метод может не сработать, даже в случае обращения времени. В работе [11] приведен метод продолжения по параметру, который успешно может быть применен для определения всего множества стационарных режимов.

Система (2) при уравновешенных продольных силах ( $X_1 = 0, X_2 = 0, X_3 = 0$ ) допускает очевидное решение  $\{v = \text{const}, u = 0, w = 0, q = 0, \phi = 0, \dot{\phi} = 0\}$ , которое соответствует равномерному прямолинейному движению автопоезда (стационарный прямолинейный режим). Этот заведомо известный стационарный режим может служить стартовой точкой для метода продолжения по параметру  $q$ . Очевидно, все множество стационарных режимов определяется системой (2), в которой нужно положить  $U = 0; W = 0; \Phi = 0; PP = 0$ :

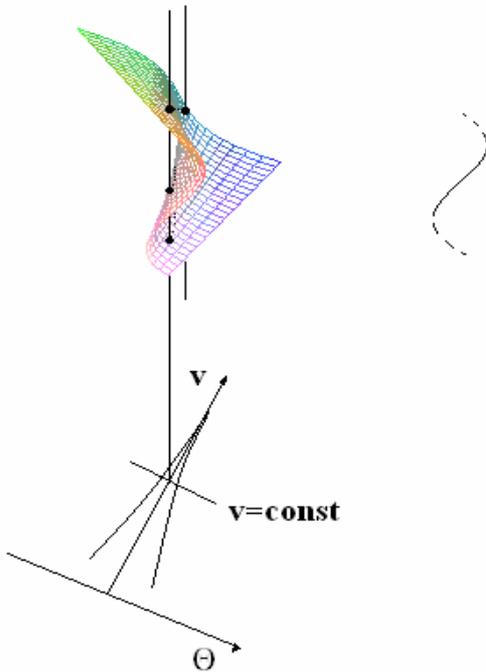
$$-m \omega v + \cos(\theta) Y1 + \cos(\phi + \theta l) Y3 + m2 \sin(\phi) dl \omega^2 + Y2 - ml \omega v - m2 \omega v = 0;$$

$$-c \cos(\phi + \theta l) Y3 + c m2 \omega v - b Y2 - c m2 \sin(\phi) dl \omega^2 + a \cos(\theta) Y1 - a ml \omega v = 0; \quad (7)$$

$$-Ll Y3 \cos(\theta l) + dl \cos(\phi) m2 \omega v - dl \sin(\phi) m2 \omega u + c m2 \sin(\phi) dl \omega^2 = 0.$$

Уравнения (7) являются условиями равновесия рассматриваемой двухзвенной шарнирно соединенной системы: первое уравнение представляет условие равенства нулю проекции главного вектора сил на поперечную ось тягача; второе – условие равенства нулю главного момента сил (полос приведения – центр масс тягача); третье – условие равенства нулю главного момента сил, действующих на полуприцеп (полос приведения точка сцепки с тягачом).

Нелинейный характер сил увода может породить несколько стационарных режимов движения автопоезда при фиксированных управляемых параметрах ( $v, q$ ), практическая реализация одного из возможных стационарных режимов будет зависеть от начальных условий (начальных значений фазовых переменных). Наиболее простой случай реализации этой возможности представлен на рисунке 7 – поверхность стационарных состояний является «сборкой». Сечение плоскостью  $v=\text{const}$  этой поверхности задает кривую стационарных состояний с характерными для сборки двумя точками поворота, которые являются границами устойчивых и неустойчивых интервалов. Кривые стационарных состояний могут быть получены на основе графо-аналитического метода продолжения по параметру



**Рис.7.** Реализация нескольких стационарных состояний модели при фиксированных управляемых параметрах  $(v, q)$ .

(в данном случае по  $q$ ), структура этих кривых дает представление о структуре самой поверхности стационарных состояний.

Реализуемые для этого случая бифуркации слияния и рождения могут быть представлены в символическом виде

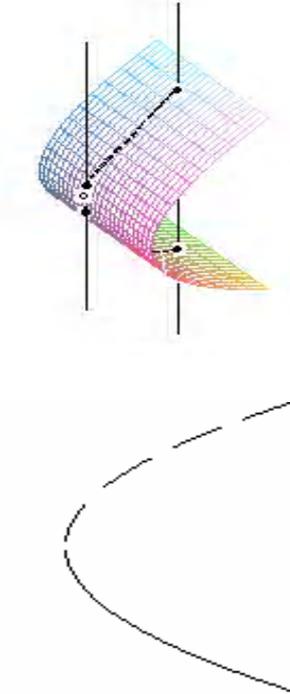
$$O_2^{2,0} + (O_1^{1,1}, O_2^{1,1}) \rightarrow O_1^{1,1}; O_2^{2,0} \rightarrow O_1^{1,1} + (O_1^{2,0}, O_2^{2,0}).$$

Здесь первая цифра верхнего индекса особой точки равна числу корней характеристического уравнения с отрицательными действительными частями, вторая – с положительными. Тогда индекс Пуанкаре  $j(O_2^{2,0})=1$ , а  $j(O_1^{1,1})=-1$ . Имеет место «закон сохранения» суммы индексов Пуанкаре левой и правой частей символического равенства (до и после бифуркации).

Для кривой стационарных состояний с точкой поворота бифуркации слияния и рождения могут быть представлены в символическом виде (рис. 8):

$$(O_1^{2,0} + O_2^{1,1}) \Rightarrow \emptyset; \emptyset \Rightarrow (O_1^{2,0} + O_2^{1,1}).$$

Точке поворота (точке слияния или рождения) соответствует двукратный стационарный режим «седло-узел». Появление точек



**Рис.8.** Точка поворота на поверхности складки (двукратный стационарный режим).

поворота для систем с одним управляющим параметром является случаем общего положения (устойчивым образом реализуется при малых структурных изменениях системы). В этих точках, как отмечалось раньше, происходит смена устойчивости ветви стационарных состояний.

Задача качественного анализа стационарных режимов системы (2) и оценка их максимально возможного числа зависят от принятых предположений о характере сил увода.

Для системы нелинейных конечных уравнений (7) может быть получена вспомогательная система дифференциальных уравнений, позволяющая получить численно интегральные кривые  $u = u(q)$ ,  $w = w(q)$ ,  $\phi = \phi(q)$ , т.е. однопараметрическое семейство стационарных состояний.

Действительно, предположим, что имеется ветвь стационарных состояний, выходящая из некоторой (стартовой) точки четырехмерного евклидова пространства  $(u, w, \phi, q)$ . Тогда все фазовые переменные, отвечающие стационарным режимам (вместе с дополнительной переменной  $q$ ), являются координатами точек этой кривой. Параметризуем ее длиной дуги  $s$

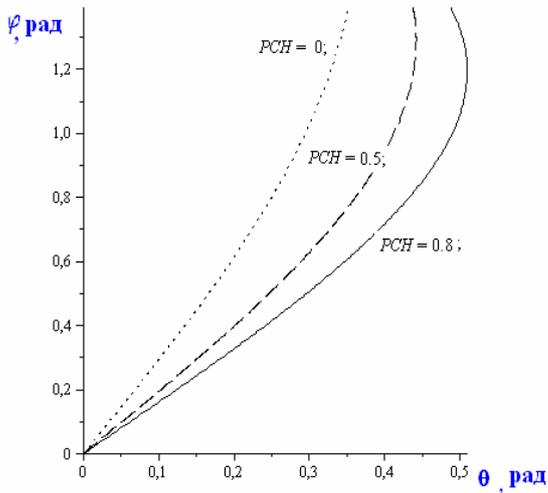


Рис. 9. Ветви стационарных кривых  $\varphi = \varphi(\theta)$  при различных передаточных коэффициентах  $PCH$ .

( $ds = \sqrt{(du)^2 + (d\omega)^2 + (d\phi)^2 + (d\theta)^2}$ ). При изменении натурального параметра  $s$  (т.е. при движении вдоль кривой стационарных режимов) будет выполняться следующее условие: модуль скорости изображающей точки тождественно равен единице

$$1 = \sqrt{(du/ds)^2 + (d\omega/ds)^2 + (d\phi/ds)^2 + (d\theta/ds)^2}. \quad (8)$$

При движении изображающей точки вдоль кривой стационарных состояний, наряду с последним условием (8), выполняются еще три соотношения (по количеству уравнений первоначальной системы (7)) – дифференциалы правых частей системы (7) остаются равными нулю.

Таким образом, имеем четыре соотношения, которые связывают между собой скорости изменения фазовых переменных ( $du/ds, d\omega/ds, d\phi/ds$ ) и скорость изменения параметра ( $d\theta/ds$ ) [9]. Кроме формальной вычислительной стороны в методе продолжения по параметру имеются важные моменты, связанные с анализом «геометрии» кривой стационарных состояний. В первую очередь нужно упомянуть о дивергентной потере устойчивости стационарных режимов при прохождении точек поворота [6, 9]. В точках «поворота» происходит исчезновение устойчивого стационарного состояния через бифуркацию складки (потенциальная возможность заноса), «каспу» («точке возврата») отвечает

смена устойчивости стационарного режима (в модели с симметрией этому случаю соответствует потеря устойчивости прямолинейного режима движения).

Этот случай связан с появлением положительных действительных корней характеристического уравнения, однако точка возврата теряет всякий содержательный характер, если в системе уже имела место колебательная неустойчивость (имелись комплексно сопряженные корни с положительными действительными частями).

Построим множество стационарных состояний автопоезда для приведенного выше набора числовых значений параметров системы.

Параметр продольной скорости центра масс и передаточное число при повороте оси полуприцепа являются свободными параметрами (пусть  $v = 4.5 \text{ м/с}$ ;  $PCH = \{0; 0.5; 0.8\}$ ). На рисунке 9 представлены равновесные кривые  $\varphi = \varphi(\theta)$ , которые позволяют более точно определить значение искомого передаточного коэффициента.

Приведенные кривые равновесного состояния дают информацию о максимально возможных углах поворота переднего управляемого модуля тягача  $q^*$  (им соответствуют абсциссы точек поворота ветвей). Эти углы зависят от параметра продольной скорости  $v$ . Далее потребуется реализация метода продолжения по параметру  $PCH$  – передаточному коэффициенту. В этом случае стартовой (начальной) точкой при реализации метода продолжения по параметру будут служить значения фазовых переменных в круговом стационарном режиме при управляющих параметрах ( $v; q^*; PCH$ ). Построив кривую  $\varphi = \varphi(PCH)$ , и выделив интервал возможных углов складывания  $\Delta\varphi$ , получим интервал изменения передаточного коэффициента  $\Delta PCH$ , обеспечивающего требуемую маневренность.

## Выводы

На основе дифференциально-геометрического метода продолжения по параметру дана оценка маневренности автопоезда; определена конфигурация автопоезда в различных круговых режимах и влияние на устойчивость движения линейного закона управления поворотом опорной оси полуприцепа.

**Литература**

1. Рокар И. Неустойчивость в механике. – М.: Изд-во иностр. лит., 1959. – 288с.
2. Вербицкий В. Г., Лобас Л. Г. Бифуркации и устойчивость стационарных состояний связи катящихся упруго-деформированных тел // Прикл. механика. – 1987. – 23, № 8. – С. 101–106.
3. Вербицкий В.Г., Лобас Л.Г. Вещественные бифуркации двухзвенных систем с качением// Прикл. математика и механика. – 1996. – 60, №3. – С. 418–425.
4. Вороніна І. Ф., Кузнецов Р. М., Енглезі О. А., Шкварко К. В. Експериментальні дослідження триланкових автопоїздів // Автошляховик України. Окремий випуск. Вісник ПНЦ ТАУ. – 2005.- №8. – С.139-143.
5. Крестьянполь О. А. Маневреність та стійкість руху автопоїздів із самовстановлювальною віссю напівпричепа: Автореф. дис. канд. техн. наук: 05.22.02/ Укр.. трансп. ун-т. – Київ, 1999. – 16с.
6. Лобас Л.Г., Вербицкий В.Г. Качественные и аналитические методы в динамике колесных машин. - Киев: Наук. думка, 1990. – 232 с.
7. Вербицкий В. Г., Загороднов М. И. Определение и анализ устойчивости круговых стационарных режимов движения модели седельного автопоезда // Вісник Донецького ін-ту автомоб. транспорту: Зб. наук. пр. – 2007. – №1. – С. 10 – 19.
8. Мойся Д.Л., Бумага А.Д. Определение маневренности и анализ устойчивости движения модели седельного автопоезда // Вісник Донецьк. ін-ту автомоб. транспорту: Зб. наук. праць. – 2007. – №3. – С. 10–19.
9. Холоднюк М., Клич А., Кубичек М., Марек М. Методы анализа нелинейных математических моделей. – М.: Мир, 1991. – 368с.
10. Эллис Д.Р. Управляемость автомобиля. – М.: Машиностроение, 1975. – 216с.
11. Shinohara Y. A geometric method for the numerical solution of non-linear equations and its application to non-linear oscillations // Publ. Res. Inst. Math. Sci., Kyoto Univ. 1972. V. 8, № 1. P. 13–42.
12. Pacejka H. B., Bakker E. The magic formula type model // Prog. 1 st. Collog. Models for Vehicle Dynamics Analysis. Delft, 1991. Amsterdam: Swits and Zeitlinger, 1993. P.1-18.

**Вербицкий Владимир Григорович** – доктор фіз.-мат. наук, професор, працює завідувачем кафедрою «Теоретична механіка» Донецького інституту автомобільного транспорту. Наукові інтереси: теоретичні завдання стійкості колісних машин.

**Бумага Александр Дмитриевич** – к.т.н., доцент, працює доцентом кафедри «Автомобілі і автомобільне господарство» Донбаської національної академії будівництва і архітектури. Наукові інтереси: теоретичні завдання стійкості колісних машин.

**Вербицкий Владимир Григорьевич** – доктор физ.-мат. наук, профессор, работает заведующим кафедрой «Теоретическая механика» Донецкого института автомобильного транспорта. Научные интересы: теоретические задачи устойчивости колесных машин.

**Бумага Александр Дмитриевич** – к.т.н., доцент, работает доцентом кафедры «Автомобили и автомобильное хозяйство» Донбасской национальной академии строительства и архитектуры. Научные интересы: теоретические задачи устойчивости колесных машин.

**Verbitskiy Vladimir Grigoryevich** a doctor of phiz.-math. sciences, professor, works as a head of «Theoretical mechanics» chair of the Donetsk Institute of Motor Transport. Scientific interest: theoretical tasks of the wheeled machines stability.

**Bumaga Alexander Dmitrievich** – candidate of technical sciences, associate professor, works as the associate professor of «Cars and motor-car economy» chair of the Donbass National Academy of Building and Architecture. Scientific interests: theoretical tasks of the wheeled machines stability.