



ISSN 1819-432X print / ISSN 1993-3495 online

СУЧАСНЕ ПРОМИСЛОВЕ ТА ЦИВІЛЬНЕ БУДІВНИЦТВО
СОВРЕМЕННОЕ ПРОМЫШЛЕННОЕ И ГРАЖДАНСКОЕ СТРОИТЕЛЬСТВО
MODERN INDUSTRIAL AND CIVIL CONSTRUCTION

ТОМ 6, N2, 2010, 77-91

УДК 624.04+624.074

РОЗРАХУНОК ТРИШАРОВОЇ ПЛАСТИНКИ, ЩО ЛЕЖИТЬ НА ВИНКЛЕРОВСЬКІЙ ОСНОВІ, ВАРІАЦІЙНО-РІЗНИЦЕВИМ МЕТОДОМ

В. П. Мущанов, О. І. Демідов

*Донбаська національна академія будівництва і архітектури,
вул. Державіна, 2, м. Макіївка, Україна, 86123.*

E-mail: mvf@donnasa.edu.ua

Отримана 14 березня 2010; прийнята 31 травня 2010.

Анотація. Стаття присвячена застосуванню варіаційно-різницевого методу розрахунку прямокутних тришарових пластин на пружній основі з урахуванням зрушення між її шарами на основі варіаційного рівняння Ж. Лагранжа. Передбачається лінійна залежність між прогином і відсіччю пружної основи по Винклеру. При записі варіаційного рівняння Лагранжа зв'язок між напругою і деформаціями представлений у формі закону Гука, але з урахуванням зрушення між шарами пластинки. Геометричні рівняння прийняті в лінійній постановці у формі співвідношень Коши. Матеріал кожного шару пластинки має різні модулі пружності E_i ($i = 1, 2, 3$), але однаковий коефіцієнт Пуассона. Кінематичні граничні умови задовольняються точно, а статичні – на вільних від закріплення краях пластинки – приблизно. Розглядаються два приклади розрахунку тришарових пластин. У першому прикладі розглядається прямокутна пластинка, жорстко затиснена по усьому контуру. У другому прикладі приводиться розрахунок прямокутної пластинки, шарнірно закріпленої по контуру і ослабленої великим прямокутним отвором, край якого вільний від закріплень. Обидві пластинки завантажено нормальним рівномірно розподіленим навантаженням. Перевіряється збіжність рішення завдань шляхом згущування сітки. Представлені поля прогинів w , моментів M_x , що вигинають, і епюри нормального напруження σ_x по товщині пластинки в найбільш навантажених перерізах. Робота присвячена актуальному питанню будівельної механіки тришарових пластинок, що лежать на суцільній пружній основі, ослаблених великими вирізами.

Ключові слова: прямокутна тришарова пластинка з отвором, варіаційно-різницевий метод, різницевий оператор.

РАСЧЕТ ТРЕХСЛОЙНОЙ ПЛАСТИНКИ, ЛЕЖАЩЕЙ НА ВИНКЛЕРОВСКОМ ОСНОВАНИИ, ВАРИАЦИОННО- РАЗНОСТНЫМ МЕТОДОМ

В. Ф. Мущанов, А. И. Демидов

*Донбасская национальная академия строительства и архитектуры,
ул. Державина, 2, г. Макеевка, Украина, 86123.*

E-mail: mvf@donnasa.edu.ua

Получена 14 марта 2010; принята 31 марта 2010.

Аннотация. Статья посвящена применению вариационно-разностного метода расчета прямоугольных трехслойных пластин на упругом основании с учетом сдвига между её слоями на основе вариационного уравнения Ж. Лагранжа. Предполагается линейная зависимость между прогибом и отпором упругого основания по Винклеру. При записи вариационного уравнения Лагранжа связь между напряжениями и деформациями представлена в форме закона Гука, но с учетом сдвига между слоями пластинки. Геометрические уравнения приняты в линейной постановке в форме соотношений Коши. Материал каждого слоя пластинки имеет разные модули упругости E_i ($i = 1, 2, 3$), но одинаковый коэффициент

Пуассона. Кинематические граничные условия удовлетворяются точно, а статические – на свободных от закрепления краях пластинки приближенно. Рассматриваются два примера расчета трехслойных пластин. В первом примере рассматривается прямоугольная пластинка, жестко защемленная по всему контуру. Во втором примере приводится расчет прямоугольной пластинки, шарнирно закрепленной по контуру и ослабленной большим прямоугольным отверстием, края которого свободны от закреплений. Обе пластинки загружены нормальной равномерно распределенной нагрузкой. Проверяется сходимость решения задач путем сгущения сетки. Представлены поля прогибов w , изгибающих моментов M_x , и эпюры нормальных напряжений σ_x по толщине пластинки в наиболее нагруженных сечениях. Работа посвящена актуальному вопросу строительной механики трехслойных пластинок, лежащих на сплошном упругом основании, ослабленных большими вырезами.

Ключевые слова: прямоугольная трехслойная пластинка с отверстием, вариационно-разностный метод, разностный оператор.

CALCULATION OF THE THREE-LAYER PLATE, LYING ON THE VINKLER'S BASE BY A VARIATION-HETEROGENEOUS METHOD

V. F. Muschanov, A. I. Demidov

*Donbas National Academy of Civil Engineering and Architecture,
2, Derzhavin Str., Makijivka, Ukraine, 86123.*

E-mail: mvf@donnasa.edu.ua

Received 14 March 2010; accepted 31 May 2010.

Abstract. The article is devoted to variational and heterogeneous application method of calculation of the rectangular three-layer plates on the resilient base taking into account the displacement between its layers on the ground of variational equation. Lagrange the linear dependence is assumed between bending and rebuff of the resilient basement on Vinkler. While recording of Lagrange the variational equation of the connection between tensions and deformations is represented in form of the Hook's law, but taking into account the displacement between the layers of the plate. Geometrical equations are accepted in the linear in setting the form Koshy correlations. The material of each layer of the plate has the different modules of resiliency of E_i ($i = 1, 2, 3$), but similar coefficient of Puasson. Kinematic boundary conditions are satisfied exactly, but static – on the free from fixing of the plate edge approximately. Two examples of calculation of the three-layer plate are considered. The first example is the rectangular scale-board, hardly jammed along the whole contour. The example is the plate calculation fixed with the hinges along the contour and loosened with the rectangular opening, edges of which are free from fixing. Both plates are under the normal distributed loading. Solving tasks similarity is checked up by means of condensing of the net. The fields of bending of w are represented, bending moments of M_x , and profiles of normal tensions σ_x on the thickness of the plate in the most loaded sections. Work is devoted to the actual question of structural mechanics of the three-layer plates, lying on the continuous resilient base loosened with large cuts.

Keywords: the rectangular three-layer plate with the opening, variantion and heterogeneous method, various operator.

1. Постановка задачи

Исследованию напряженно-деформированного состояния многослойных плит посвящено значительное количество работ. Обратим внимание на наиболее существенные работы.

Работа [8] посвящена разработке метода и алгоритма расчета на прочность и жесткость пола промышленного здания на основе модели многослойной плиты на двухпараметрическом ос-

новании. Решение задачи основывается на использовании основных положений вариационного исчисления, получении достаточно близких результатов расчета по двум альтернативным методам Ритца-Тимошенко и Власова-Канторовича, а также на экспериментальном подтверждении предложенной математической модели.

В работе [9] рассматривается моделирование и расчет армированных многослойных плит на упругом основании. Представлены модели де-

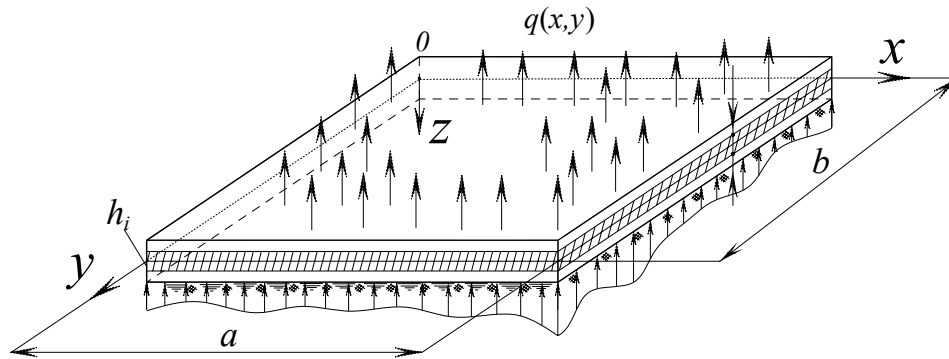


Рис. 1. Пластика нагруженная произвольной поперечной нагрузкой $q(x,y)$.

формирования упругого слоя, армированного объёмными и плоскими георешетками и геосетками. Устанавливаются зависимости между термоупругими характеристиками композитного материала исходной среды с характеристиками армирующей структуры и ее геометрическими параметрами. Для проверки соответствия разработанных моделей деформирования реальным условиям работы слоистых дорожных конструкций, армированных геосинтетическими материалами, проведены испытания в натуральных условиях конструкций дорожных одежд с основаниями, армированными объёмными георешетками. Изложена теория продольно-поперечного изгиба многослойных плит с решетчатым армированием (полиармированных плит) на упругом основании при воздействии статической нагрузки и температуры. Задача продольно-поперечного изгиба сведена к задаче поперечного изгиба. Задача решается методом начальных параметров.

Получено дифференциальное уравнение изгиба полиармированной плиты без учета и с учетом сил трения с основанием. Показано, что учет сил трения несущественно влияет на напряженно-деформированное состояние многослойных плит. Разработаны расчетные модели конструкции дорожной одежды с решетчатой плитой в основании. Обсуждаются результаты численного решения задач методом конечных элементов. Дается оценка влияния конструктивных параметров решетчатой плиты на её жесткость. Приводятся результаты стендовых и натуральных испытаний конструкции дорожной одежды с решетчатой плитой в основании.

В работе [10] изучено напряженно-деформированное состояние многослойной конст-

рукции при совместном действии нагрузки и внешней среды применительно к расчету дорожной одежды на мостовых сооружениях. Рассмотрены различные методы расчета этих конструкций на земляном полотне и на мостовых сооружениях. Приведены собранные по различным источникам и систематизированные экспериментальные данные по влиянию температуры и агрессивной хлоридсодержащей среды на прочностные и деформационные характеристики материала слоев многослойной дорожной одежды и материала плиты проезжей части. Построена модель теплового воздействия окружающей среды на поведение многослойной конструкции дорожной одежды и плиты проезжей части, которые рассматриваются как многослойная пластина, подверженная воздействию температуры окружающей среды. Описаны разработанные методика расчета, алгоритм и программный комплекс, а также приведены результаты расчета трехслойной пластинчатой конструкции на армированной плите проезжей части при совместном действии нагрузки и внешней среды.

В статье [12] рассматривается расчет на поперечный изгиб круглых многослойных плит покрытия с изотропными слоями симметрично расположенными относительно центра пластинки. Система уравнений равновесия в случае многослойных симметричных пластин распадается на две независимые системы, описывающие плоское напряженное состояние, соответствующее поперечному изгибу в полярной системе координат. Задача решается в прогибах $w(r, \theta)$ путем решения уравнения Софи-Жермен.

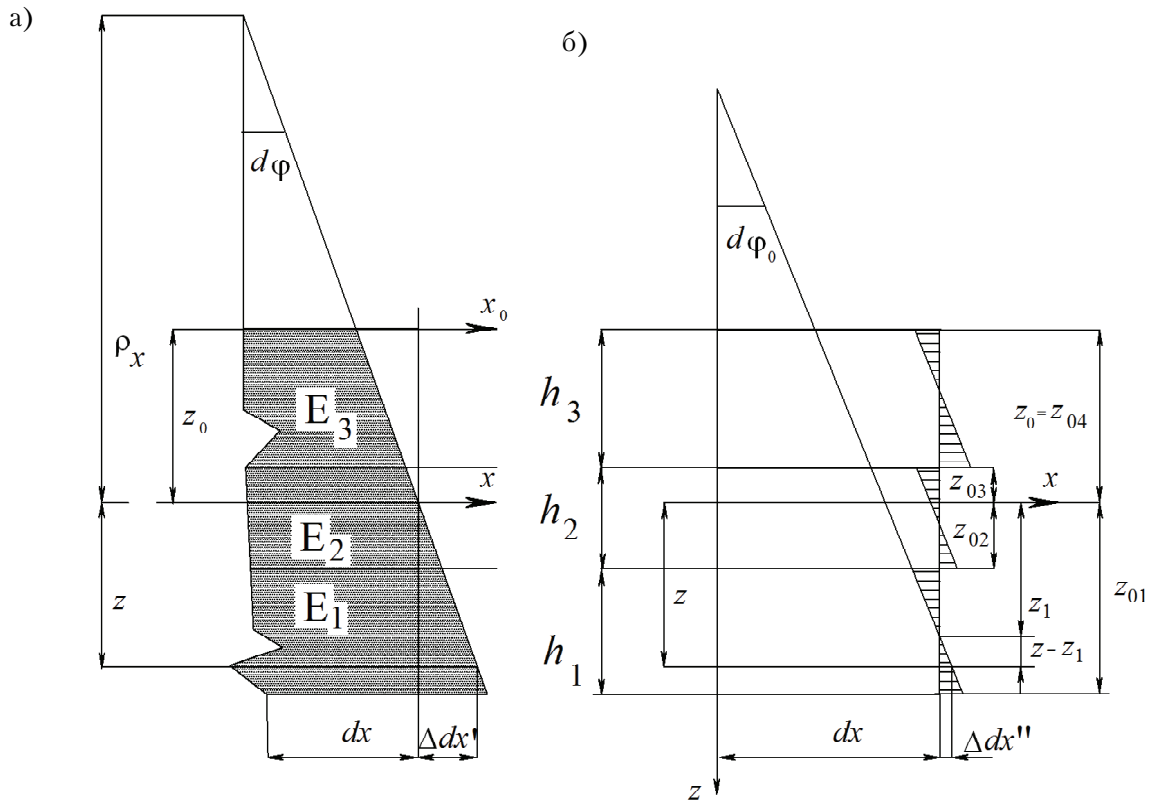


Рис. 2. Деформации элемента пластинки.

В работе [1] рассматривается частный случай расчета трехслойной пластинки, лежащей на упругом основании с коэффициентом постели k_0 , с двумя противоположно расположенными шарнирно закрепленными и двумя свободными от закреплений краями. Для решения этой задачи по определению напряженно-деформированного состояния применяется метод прямых.

Рассмотрим общий случай трехслойной прямоугольной пластинки с размерами в плане $a \times b$ толщиной каждого слоя h_1, h_2 и h_3 , соответственно, в декартовой прямоугольной системе координат xuz с произвольными по контуру закреплениями. Пластика нагружена произвольной поперечной нагрузкой $q(x,y)$ (рис. 1). Задачу будем решать в рамках пропорциональной зависимости между отпором упругого основания и прогибом.

2. Деформации и напряжения в трехслойной пластинке

Запишем основные разрешающие уравнения для расчета данной пластинки, так как это предло-

жено в работе [1] в предположении о том, что решение задачи будет выполняться вариационно-разностным методом.

Для трехслойной пластины рассматриваются деформации слоев в двух вариантах (рис. 2). Согласно варианту (а) предполагаем справедливость гипотезы прямых нормалей для всей пластины и отсутствие сдвигов между слоями. В этом случае деформация произвольного волокна

$$\varepsilon'_x = \frac{\Delta dx'}{dx} = \frac{(\rho_x + z) d\varphi}{\rho_x d\varphi} = \frac{z}{\rho_x}. \quad (a)$$

По варианту (б) считаем, что справедливость гипотезы прямых нормалей выполняется в пределах каждого слоя в отдельности, и возникают сдвиги между слоями. Тогда деформации

$$\varepsilon''_x = \frac{\Delta dx''}{dx} = \frac{(z - z_i) d\varphi_0}{\rho_x d\varphi_0} = \frac{z - z_i}{\rho_x}. \quad (б)$$

Введем обозначение

$$\varepsilon_x = \varepsilon'_x (1 - r) + \varepsilon''_x \cdot r, \quad (в)$$

где $0 \leq r \leq 1$ – коэффициент, определяемый экспериментальным путем. Значение $r = 0$ соответствует жесткому трению между слоями пластин-

ки, а $r=0$ независимому деформированию каждого слоя. Подставим (а) и (б) в формулу (в), получим формулы для определения деформаций произвольного волокна в пределах каждого слоя.

$$\begin{cases} \varepsilon_{xi} = \frac{1}{\rho_x}(z - r \cdot z_i) = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(z - r \cdot z_i) \\ \varepsilon_{yi} = \frac{1}{\rho_y}(z - r \cdot z_i) = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}(z - r \cdot z_i) \\ \gamma_{xyi} = \frac{1}{\rho_{xy}}(z - r \cdot z_i) = -2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}(z - r \cdot z_i) \end{cases} \quad (1)$$

Используя закон Гука, при условии равенства коэффициентов Пуассона для материалов, слоев и разных значений модулей упругости из (1), находим:

$$\begin{cases} \sigma_{xi} = -\frac{E_i}{1-\mu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) (z - r \cdot z_i) \\ \sigma_{yi} = -\frac{E_i}{1-\mu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) (z - r \cdot z_i) \\ \sigma_{xyi} = -\frac{E_i}{1-\mu^2} (1-\mu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} (z - r \cdot z_i) \end{cases} \quad (2)$$

где i – номер слоя.

Для определения положения нейтрального слоя положим, что погонная продольная сила

$$\begin{aligned} N_x &= \sum_{i=1}^3 \int_{F_i} \sigma_{xi} dF = 0, \\ N_y &= \sum_{i=1}^3 \int_{F_i} \sigma_{yi} dF = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Подставляя (2) в (3), получаем

$$E_1 \int_{z_{02}}^{z_{01}} (z - z_1 r) dz + E_2 \int_{z_{03}}^{z_{02}} (z - z_2 r) dz + E_3 \int_{z_0}^{z_{03}} (z - z_3 r) dz = 0.$$

Интегрируем по z в указанных пределах по толщине каждого слоя пластинки, получаем:

$$E_1 \left(\frac{z^2}{2} - z_1 r z \right) \Big|_{z_{02}}^{z_{01}} + E_2 \left(\frac{z^2}{2} - z_2 r z \right) \Big|_{z_{03}}^{z_{02}} + E_3 \left(\frac{z^2}{2} - z_3 r z \right) \Big|_{z_0}^{z_{03}} = 0.$$

Введем обозначения $m_1 = E_1/E_3$, $m_2 = E_2/E_3$ и, учитывая, что $z_{01} - z_{02} = h_1$, $z_{02} - z_{03} = h_2$, $z_0 - z_{03} = h_3$

$$S_{x_0} = \frac{h_3^2}{2} + m_2 h_2 \left(h_3 + \frac{h_2}{2} \right) + m_1 h_1 \left(h_3 + h_2 + \frac{h_1}{2} \right), \quad (4)$$

$$F_{np} = h_3 + m_2 h_2 + m_1 h_1. \quad (5)$$

Положение нейтральной оси будет определяться координатой:

$$z_0 = \frac{S_{x_0}}{F_{np}}. \quad (6)$$

3. Усилия и моменты в трехслойной пластинке

Запишем выражения для погонных изгибающих и крутящих моментов:

$$\begin{aligned} M_x &= \int_{z_{02}}^{z_{01}} \sigma_{x1} (z - r z_1) dz + \\ &+ \int_{z_{03}}^{z_{02}} \sigma_{x2} (z - r z_2) dz + \int_{z_{04}}^{z_{03}} \sigma_{x3} (z - r z_3) dz. \end{aligned}$$

Вместо напряжений подставим их значения по формулам (2), получим:

$$\begin{aligned} M_x &= \int_{z_{02}}^{z_{01}} \frac{E_1}{1-\mu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) (z - r \cdot z_1)^2 dz + \\ &+ \int_{z_{03}}^{z_{02}} \frac{E_2}{1-\mu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) (z - r \cdot z_2)^2 dz + \\ &+ \int_{z_{04}}^{z_{03}} \frac{E_3}{1-\mu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) (z - r \cdot z_3)^2 dz. \end{aligned}$$

После интегрирования получаем

$$M_x = -D_1 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \quad (7)$$

где приведенная жесткость пластины

$$D_1 = \frac{E_1 J_1 + E_2 J_2 + E_3 J_3}{1-\mu^2}. \quad (8)$$

Здесь обозначено

$$\begin{aligned} J_i &= \frac{1}{3} (z_{0,i}^3 - z_{0,i+1}^3) - r \cdot z_i (z_{0,i}^2 - z_{0,i+1}^2) + \\ &+ (r \cdot z_i)^2 (z_{0i} - z_{0,i+1}), \end{aligned} \quad (9)$$

где $z_{0,i}$ – координаты границ слоев; z_i – координаты срединных плоскостей каждого слоя.

Аналогично можно получить выражения для погонного изгибающего

$$M_y = -D_1 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad (10)$$

и погонного крутящего момента

$$M_{xy} = -D_1 (1-\mu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \quad (11)$$

Сравнивая зависимости (2) и (7, 10, 11), получим формулы для вычисления нормальных и касательных напряжений, изгибающие и крутящие моменты, соответственно:

$$\begin{cases} \sigma_{xi} = \frac{E_i \cdot M_x}{(1-\mu^2) \cdot D_1} (z-r \cdot z_i) \\ \sigma_{yi} = \frac{E_i \cdot M_y}{(1-\mu^2) \cdot D_1} (z-r \cdot z_i) \\ \tau_{yi} = \frac{E_i \cdot M_{xy}}{(1-\mu^2) \cdot D_1} (z-r \cdot z_i) \end{cases} \quad (12)$$

Таким образом, вся задача сводится к определению функции прогибов путем решения дифференциального уравнения вида:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q - k_0 w}{D_1},$$

где q – интенсивность нагрузки; k_0 – коэффициент постели упругого основания.

Рассмотрим решение поставленной задачи по определению напряженно-деформированного состояния прямоугольной трехслойной пластинки вариационно-разностным методом на основе уравнения Лагранжа.

4. Вариационное уравнение Ж. Лагранжа для трехслойной пластинки

Вариационное уравнение Лагранжа представим в такой форме:

$$\delta \mathcal{E} = \delta(W + A) = 0, \quad (a)$$

где \mathcal{E} – потенциальная энергия системы; W – потенциальная энергия, накопленная в пластинке; A – работа внешней нагрузки.

Потенциальную энергию можно представить следующим образом:

$$W = \frac{1}{2} \left[\sum_{i=1}^3 \int_{V_i} \sigma_{x_i} \varepsilon_{x_i} dV + \sum_{i=1}^3 \int_{V_i} \sigma_{y_i} \varepsilon_{y_i} dV + \sum_{i=1}^3 \int_{V_i} \tau_{xy_i} \gamma_{xy_i} dV \right]. \quad (13)$$

Подставим вместо деформаций и напряжений (1) и (2) в (13), получим:

$$\begin{aligned} W = & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \left[\frac{E_i}{1-\mu^2} \int_{\Sigma} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} d\Sigma \int_{z_{i-1}}^{z_i} (z-R \cdot z_i)^2 dz + \right. \\ & + \frac{E_i}{1-\mu^2} \int_{\Sigma} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} d\Sigma \int_{z_{i-1}}^{z_i} (z-R \cdot z_i)^2 dz + \\ & \left. + \frac{E_i}{1-\mu^2} (1-\mu) \int_{\Sigma} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 d\Sigma \int_{z_{i-1}}^{z_i} (z-R \cdot z_i)^2 dz \right] \end{aligned} \quad (14)$$

Выполним интегрирование в пределах толщин каждого слоя пластинки, получим

$$\begin{aligned} W = & \frac{D_1}{2} \left[\int_0^a \int_0^b \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx dy + \right. \\ & + \int_0^a \int_0^b \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} dx dy + \\ & \left. + 2(1-\mu) \int_0^a \int_0^b \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 dx dy \right] \end{aligned} \quad (15)$$

или

$$\begin{aligned} W = & \frac{D_1}{2} \left\{ \int_0^a \int_0^b \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \right. \right. \\ & + 2\mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \left. \left. \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \right] dx dy + \right. \\ & \left. + 2(1-\mu) \int_0^a \int_0^b \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 dx dy \right\} \end{aligned} \quad (16)$$

Здесь D_1 – приведенная жесткость определяется по формуле (8); μ – коэффициент Пуассона материала пластинки.

Работу внешних сил найдем по формуле:

$$A = - \int_0^a \int_0^b (q - k_0 w) w dx dy. \quad (17)$$

Здесь k_0 – коэффициент постели упругого основания. Подставим в формулу (a) работу внутренних (16) и внешних сил (17), получим:

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{E} = & \delta \left\{ \frac{D_1}{2} \int_0^a \int_0^b \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + 2\mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \right] dx dy + \right. \\ & \left. + 2(1-\mu) \int_0^a \int_0^b \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 dx dy \right\} - \int_0^a \int_0^b (q - k_0 w) w dx dy = 0 \end{aligned} \quad (18)$$

Уравнение (18) является вариационным уравнением Лагранжа в перемещениях (прогибах).

Здесь

$$\begin{aligned} \mathcal{E} = & \frac{D_1}{2} \left\{ \int_0^a \int_0^b \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + 2\mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \right] dx dy + \right. \\ & \left. + 2(1-\mu) \int_0^a \int_0^b \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 dx dy \right\} - \int_0^a \int_0^b (q - k_0 w) w dx dy \end{aligned} \quad (19)$$

является функционалом от функции прогибов $w(x,y)$. Для отыскания минимума функционала (19) согласно условию (a) воспользуемся разностным методом.

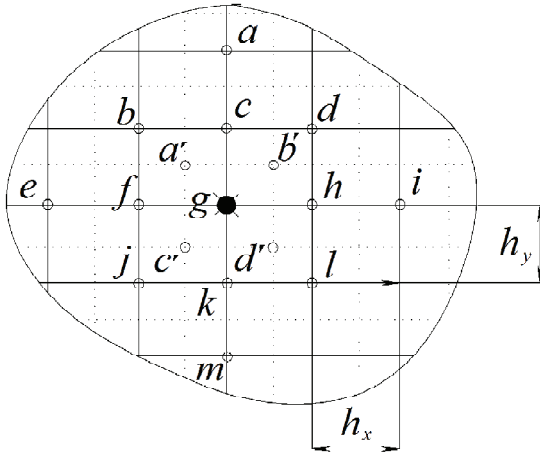


Рис. 3. Сеточная область.

Область, занятую пластинкой, покроем прямоугольной сеткой. Шаг сетки по направлению оси x обозначим через h_x , а по направлению оси y – через h_y . Эту сетку назовем основной. По центру ячеек основной сетки нанесем вспомогательную сетку (штриховая линия).

Выделим некоторую часть сеточной области. Обозначение узлов основной и вспомогательной сетки показано на рис. 3. Функцию $w(x,y)$ заменим её дискретным значением в центральном узле g через w_g .

Вторые производные от функции прогиба w $\partial^2 w / \partial x^2$ и $\partial^2 w / \partial y^2$ заменяем конечными разностями в узлах c, f, g, h, k основной сетки подобно выражениям:

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_c = \frac{1}{h_x^2}(w_d - 2w_c + w_b),$$

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_g = \frac{1}{h_x^2}(w_h - 2w_g + w_f),$$

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)_g = \frac{1}{h_y^2}(w_c - 2w_g + w_k),$$

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)_h = \frac{1}{h_y^2}(w_d - 2w_h + w_l).$$

Смешанную производную $\partial^2 w / \partial x \partial y$ заменяем конечными разностями в виде:

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)_{a'} = \frac{1}{h_x h_y}(w_c + w_f - w_b - w_g),$$

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)_{b'} = \frac{1}{h_x h_y}(w_d + w_g - w_c - w_h),$$

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)_{c'} = \frac{1}{h_x h_y}(w_g + w_j - w_f - w_k),$$

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)_{d'} = \frac{1}{h_x h_y}(w_h + w_k - w_g - w_l).$$

Функционал (19) представим в виде такой суммы:

$$\begin{aligned} \mathcal{E} = & \frac{D_1}{2} \iint_s A_1(x, y) dx dy + \frac{D_1}{2} \iint_s A_2(x, y) dx dy + \\ & + D_1 \mu \iint_s A_3(x, y) dx dy + D_1(1 - \mu) \iint_s A_4(x, y) dx dy - \\ & - \int_0^a \int_0^b A_q(x, y) dx dy + \int_0^a \int_0^b A_{k_0}(x, y) dx dy \end{aligned}$$

где

$$A_1(x, y) = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2,$$

$$A_2(x, y) = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2,$$

$$A_3(x, y) = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2},$$

$$A_4(x, y) = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2,$$

$$A_q(x, y) = q(x, y)w(x, y),$$

$$A_{k_0}(x, y) = k_0 w^2(x, y).$$

Функцию $A_1(x, y)$ представляем в конечных разностях в узлах f, g, h основной сетки подобно выражению:

$$(A_1)_g = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_g^2 = \left[\frac{1}{h_x^2}(w_f - 2w_g + w_h)\right]^2.$$

Функцию $A_2(x, y)$ представляем в конечных разностях в узлах c, g, k основной сетки вида:

$$(A_2)_g = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)_g^2 = \left[\frac{1}{h_y^2}(w_c - 2w_g + w_k)\right]^2.$$

Функцию $A_3(x, y)$ представляем в конечных разностях в узлах c, f, g, h, k основной сетки

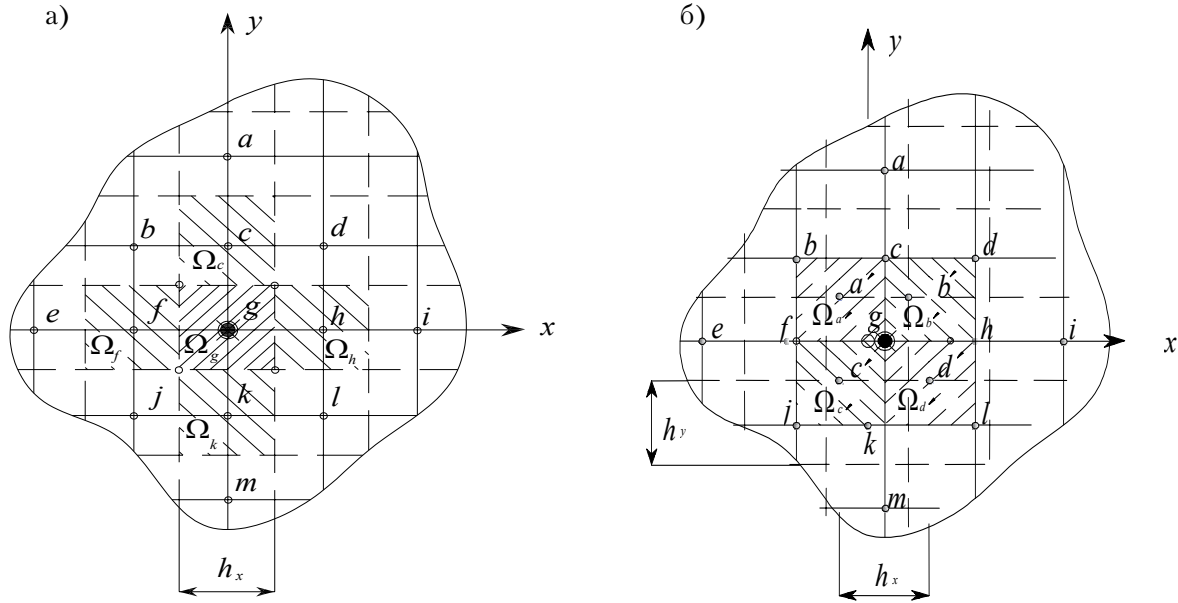


Рис. 4. Весовые функции для сеточной области пластинки Ω .

$$(A_3)_c = \frac{1}{h_x^2 h_y^2} (w_d - 2w_c + w_b)(w_a - 2w_c + w_g),$$

$$(A_3)_f = \frac{1}{h_x^2 h_y^2} (w_g - 2w_f + w_e)(w_b - 2w_f + w_j),$$

$$(A_3)_g = \frac{1}{h_x^2 h_y^2} (w_h - 2w_g + w_f)(w_c - 2w_g + w_k),$$

$$(A_3)_h = \frac{1}{h_x^2 h_y^2} (w_i - 2w_h + w_g)(w_d - 2w_h + w_l),$$

$$(A_3)_k = \frac{1}{h_x^2 h_y^2} (w_l - 2w_k + w_j)(w_g - 2w_k + w_m).$$

Функцию $A_4(x, y)$ представляем в конечных разностях в узлах a', b', c', d' , вспомогательной сетки:

$$(A_4)_{a'} = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)_{a'}^2 = \left[\frac{1}{h_x h_y} (w_c + w_f - w_b - w_g) \right]^2,$$

$$(A_4)_{b'} = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)_{b'}^2 = \left[\frac{1}{h_x h_y} (w_d + w_g - w_c - w_h) \right]^2,$$

$$(A_4)_{c'} = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)_{c'}^2 = \left[\frac{1}{h_x h_y} (w_g + w_j - w_f - w_k) \right]^2,$$

$$(A_4)_{d'} = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)_{d'}^2 = \left[\frac{1}{h_x h_y} (w_h + w_k - w_g - w_l) \right]^2.$$

Интегралы от функций $A_i(x, y)$ $i = 1, 2, 3$ заменяем суммой их дискретных значений в ячейках размером $h_x \times h_y$ с весовыми коэффициентами ω_g в узлах основной сетки (рис. 4). Весовые коэффициенты указывают, какая часть ячейки размером $h_x \times h_y$, занята пластинкой.

Где E, μ – модуль упругости и коэффициент Пуассона материала пластинки; h_x, h_y – шаги сетки по осям x и y , соответственно.

Интеграл от функции $A_4(x, y)$ заменяем суммой их дискретных значений в ячейках размером $h_x \times h_y$ с весовыми коэффициентами ω_a в узлах второстепенной сетки (рис. 8.4б). Интеграл от функции $A_q(x, y)$ заменяем суммой их дискретных значений в ячейках размером $h_x \times h_y$ с весовыми коэффициентами ω_q в узлах основной сетки. Весовые коэффициенты указывают, какая часть ячейки основной сетки размером $h_x \times h_y$, занята нагрузкой. Интеграл от функции $A_{k_0}(x, y)$ заменяем суммой их дискретных значений в ячейках размером $h_x \times h_y$ с весовыми коэффициентами ω_{k_0} в узлах основной сетки. Эти весовые коэффициенты указывают, какая часть ячейки основной сетки размером $h_x \times h_y$, опирается на упругое основание. Их значения совпадают с весовыми коэффициентами ω_g .

После подстановки значений производных в конечных разностях в функции $A_1(x, y), A_2(x, y), A_3(x, y), A_4(x, y), A_q(x, y)$ и $A_{k_0}(x, y)$ и варьирования по прогибу w_g в центральном узле g получим

конечно-разностное уравнение для этого узла с коэффициентами при дискретных значениях функции прогибов. Значения этих коэффициентов приведены в таблице 1. Этот конечно-разностный оператор путем обхода всех основных узлов сеточной области позволяет сформировать систему линейных алгебраических уравнений. Для этого нужно коэффициенты при прогибах в столбцах этой таблицы умножить на соответствующие весовые коэффициенты и результаты сложить. Например, чтобы получить коэффициент при прогибе w_g в узле g , нужно для колонки с прогибом w_g составить сумму таких произведений:

$$2B_1 \cdot (\Omega_f + 4\Omega_g + \Omega_h) + 2B_2 \cdot (\Omega_c + 4\Omega_g + \Omega_k) + 8B_3 \cdot \Omega_g + 2B_4 \cdot (\Omega_a + \Omega_b + \Omega_c + \Omega_d),$$

где

$$B_1 = \frac{h_y D_1}{2h_x^3}, B_2 = \frac{h_x D_1}{2h_y^3}, B_3 = \frac{D_1 \mu}{h_x h_y}, B_4 = \frac{D_1(1-\mu)}{h_x h_y}.$$

Аналогично можно определить коэффициенты конечно-разностного оператора при прогибах с другими индексами.

Решение сформированной системы уравнений дает возможность определить дискретные значения прогибов во всех основных узлах сеточной области. По этим значениям прогибов можем вычислить изгибающие и крутящие моменты. Подставляя значения вторых производных от функции прогибов в формулы (7, 10, 11), получаем:

$$M_x = -D_1 \left[\frac{1}{h_x^2} (w_f - 2w_g + w_h) + \frac{\mu}{h_y^2} (w_c - 2w_g + w_k) \right],$$

$$M_y = -D_1 \left[\frac{1}{h_y^2} (w_c - 2w_g + w_k) + \frac{\mu}{h_x^2} (w_f - 2w_g + w_h) \right],$$

$$M_{xy} = -\frac{D_1(1-\mu)}{h_x h_y} (w_d + w_j - w_b + w_l).$$

А по формулам (12) вычисляем нормальные σ_x , σ_y и касательные τ_{xy} напряжения.

Примеры расчета трехслойных пластинок на упругом основании

Пример № 1

Рассмотрим трехслойную жестко закрепленную по контуру пластинку размерами в плане $L_x=16$ м,

$L_y=14$ м (рис. 5). Толщины слоев $h_1=0,23$ м, $h_2=0,05$ м, $h_3=0,20$ м; модули упругости материалов слоев, соответственно, $E_1=2 \cdot 10^4$ МПа, $E_2=2 \cdot 10^3$ МПа, $E_3=2 \cdot 10^4$ МПа; коэффициент Пуассона $\mu=0,25$; коэффициент постели упругого основания $k=10$ МН/м³; нагрузка равномерно распределенная $q=1,0$ МПа; параметр, учитывающий сдвиг между слоями, $r=0,5$.

Расчет произведен с целью достоверности и сходимости получаемых результатов на $\frac{1}{4}$ части пластинки при разной густоте сеточной области. Результаты по прогибам w и изгибающим моментам M_x приведены в таблицах 2 и 3 и проиллюстрированы соответствующими графиками (рис. 6, 7). Так, для сеток 35×31 и 19×17 в узле $x=1$ м, $y=7$ м, расположенном ближе к жесткой заделке, отличие по прогибам составило 4,4 %, а в узле $x=8$ м, $y=7$ м, в центре пластинки при той же густоте сетки отличие составило 0,00175 %.

По наибольшим значениям изгибающих моментов M_x (табл. 3) для сеток 35×31 и 19×17 в узле $x=1$ м, $y=7$ м отличие составило 1,87 %, а по наименьшим значениям этих моментов – 0,79 %. Следовательно, дальнейшее сгущение сеточной области лишено смысла.

На рис. 8 показана эпюра нормальных напряжений σ_x по слоям пластинки в узле при $x=0$, $y=7$ м.

Пример № 2

Рассмотрим трехслойную пластинку, шарнирно закрепленную по контуру с размерами в плане $L_x=16$ м, $L_y=14$ м, без отверстия и ослабленную большим прямоугольным вырезом с размерами, $a=8$ м, $b=6$ м в её центре (рис. 9). Толщины слоев $h_1=0,23$ м, $h_2=0,05$ м, $h_3=0,20$ м; модули упругости материалов слоев, соответственно, $E_1=2 \cdot 10^4$ МПа, $E_2=2 \cdot 10^3$ МПа, $E_3=2 \cdot 10^4$ МПа; коэффициент Пуассона $\mu=0,25$; коэффициент постели упругого основания $k_0=10$ МН/м³; нагрузка равномерно распределенная $q=1,0$ МПа; параметр $r=0,5$.

Сходимость решения проведена при трех значениях густоты сеточной области для пластинки с вырезом и при двух значениях густоты сетки для пластинки без выреза на $\frac{1}{4}$ её части. В таблице 4 приведены значения изгибающих моментов M_x . По этим результатам на рис. 10 показаны эпюры изгибающих моментов по линии узлов при

Таблица 1. Коэффициенты.

$\frac{\partial (\quad)}{\partial w_g}$	w_a	w_b	w_c	w_d	w_e	w_f	w_g	w_h	w_i	w_j	w_k	w_l	w_m	Ω
$(A_1)_f$					$2B_1$	$-4B_1$	$2B_1$							f
$(A_1)_g$						$-4B_1$	$8B_1$	$-4B_1$						g
$(A_1)_h$							$2B_1$	$-4B_1$	$2B_1$					h
$(A_2)_c$	$2B_2$		$-4B_2$				$2B_2$							c
$(A_2)_g$			$-4B_2$				$8B_2$				$-4B_2$			g
$(A_2)_k$							$2B_2$				$-4B_2$		$2B_2$	k
$(A_3)_c$		B_3	$-2B_3$	B_3										c
$(A_3)_f$		B_3				$-2B_3$				B_3				f
$(A_3)_g$			$-2B_3$			$-2B_3$	$8B_3$	$-2B_3$			$-2B_3$			g
$(A_3)_h$				B_3				$-2B_3$				B_3		h
$(A_3)_k$										B_3	$-2B_3$	B_3		k
$(A_4)_a$		$2B_4$	$-2B_4$			$-2B_4$	$2B_4$							a
$(A_4)_b$			$-2B_4$	$2B_4$			$2B_4$	$-2B_4$						b
$(A_4)_c$						$-2B_4$	$2B_4$			$2B_4$	$-2B_4$			c
$(A_4)_d$							$2B_4$	$-2B_4$			$-2B_4$	$2B_4$		d

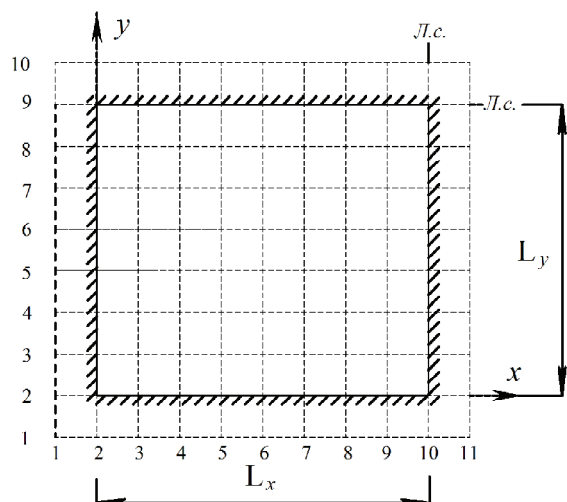


Рис. 5. Жестко заземленная пластинка на упругом основании.

Таблица 2. Прогибы.

Прогибы w, мм сетка			
x, м	11×10	19×17	35×31
0	0	0	0
1	9,816	8,4625	8,0898
2	24,7949	23,4227	23,0145
3	37,9476	37,0927	36,7916
4	47,0726	46,7861	46,6118
5	52,4065	52,5394	52,4591
6	55,056	55,4327	55,4053
7	56,141	56,6306	56,626
8	56,416	56,9366	56,9376

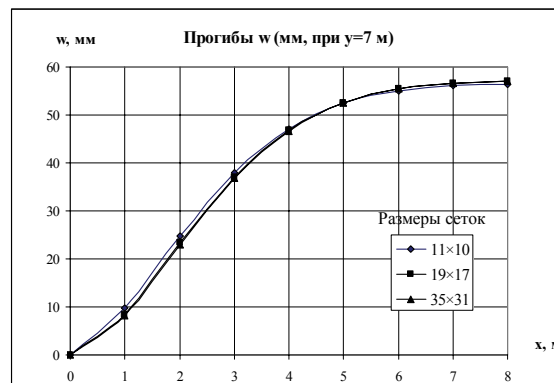


Рис. 6. Эпюры прогибов при сгущении сеточной области для трехслойной пластинки с жестко закрепленными краями.

Таблица 3. Изгибающие моменты.

x, м	Изгибающие моменты M_x при $y = 7$ м		
	Сетка		
	11×10	19×17	35×31
0	-2277,1	-2468,9	-2515,9
1	-595,64	-694,55	-719,37
2	224,38	198,81	192,16
3	491,01	504,58	507,79
4	473,29	498,9	505,12
5	351,76	374,62	380,08
6	225,84	241,15	244,62
7	140,26	149,19	150,94
8	110,63	117,17	118,09

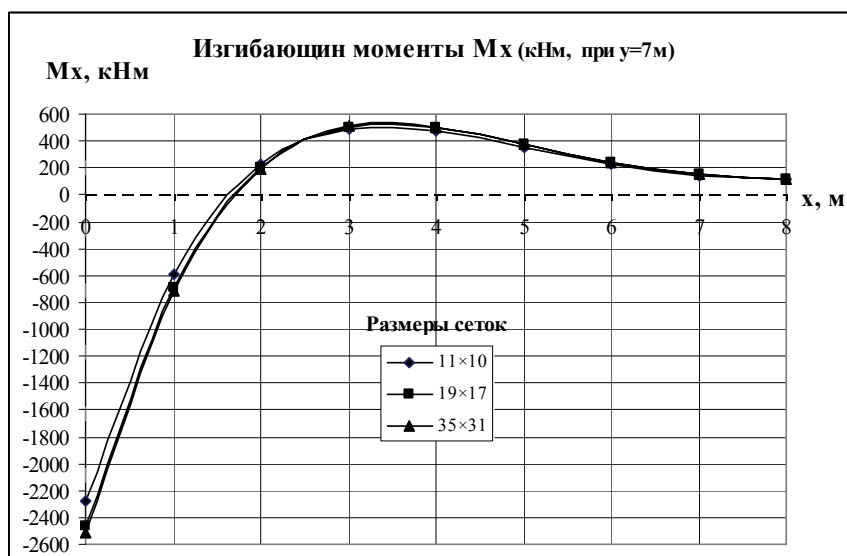


Рис. 7. Эпюры изгибающих моментов при сгущении сеточной области для трехслойной пластинки с жестко закрепленными краями.

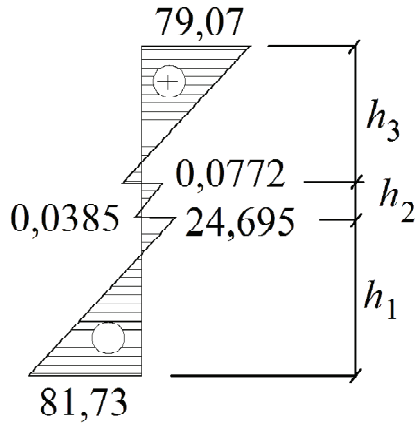


Рис. 8. Эпюры нормальных σ_x напряжений по слоям пластинки.

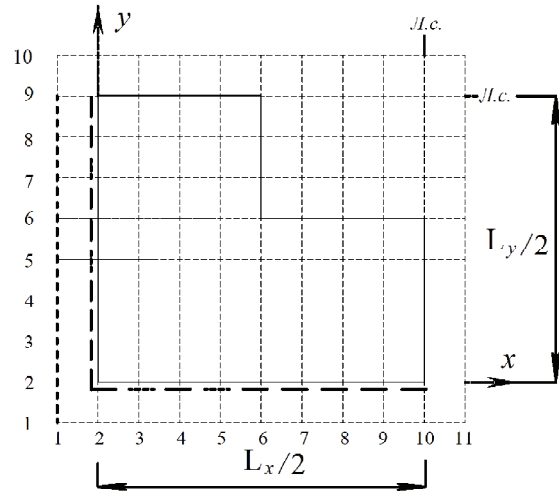


Рис. 9. Трехслойная пластинка с большим прямоугольным вырезом.

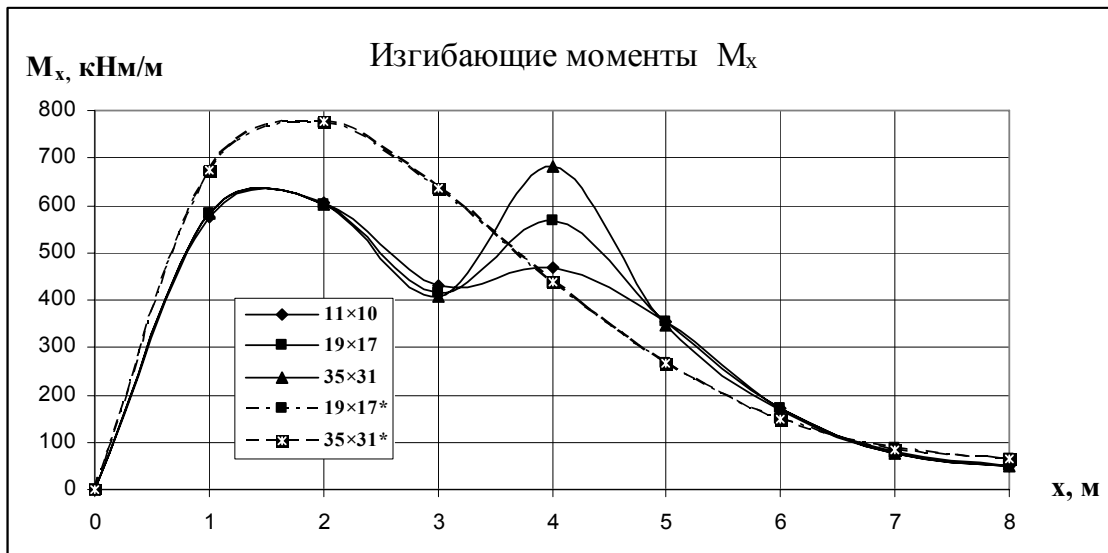


Рис. 10. Эпюры изгибающих моментов M_x для трехслойной пластинки с вырезом (сплошные линии) и без выреза (штриховые линии).

$y=4$ м, $0 \leq x \leq 8$ м. По мере сгущения сетки результаты расчета для пластинки без отверстия для сеток $19 \times 17^*$ и $35 \times 31^*$ практически одинаковы.

Для пластинки с вырезом имеет место особая точка (внутренний угол $x=4$ м, $y=4$ м). По мере сгущения сетки изгибающие моменты M_x , а следовательно и максимальные нормальные напряжения σ_x неограниченно возрастают. Наблюдается концентрация напряжений. Рекомендуется для её снижения делать скругление прямого угла и определять концентрацию усилий, используя соответствующие руководства по расчету

концентрации напряжений. По мере которого от этого узла результаты счета практически совпадают для сеток 19×17 и 35×31 .

Аналогичная картина наблюдается и с изгибающими моментами M_y . Это видно из таблицы 5 и рис. 10. В таблице 6 и на рис. 12 показаны значения прогибов по ряду $y=4$ м = const, $0 \leq x \leq 8$ м. По мере сгущения сетки результаты расчета для пластинки с отверстием для сеток 19×17 и 35×31 практически совпадают. На рис. 13 представлена эпюра нормальных напряжений σ_x по толщине каждого слоя пластинки.

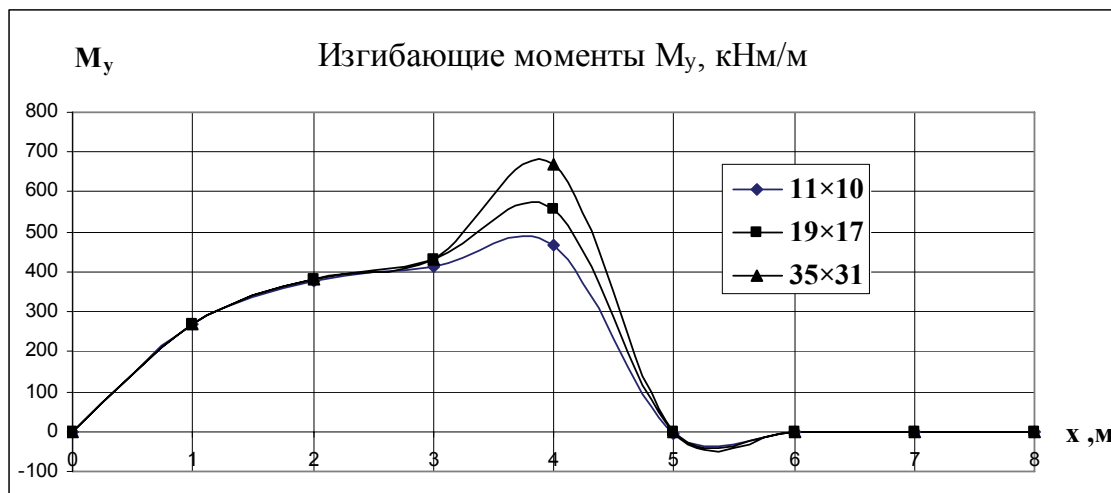


Рис. 11. Эпюры изгибающих моментов M_y для трехслойной пластинки с вырезом.

Таблица 4. Изгибающие моменты.

x, м	Изгибающие моменты M_x , кНм/м				
	Сетка с отверстием			Сетка без отверстия	
	11 × 10	19 × 17	35 × 31	19 × 17*	35 × 31*
0	0	0	0	0	0
1	576,34	581,36	581,92	669,46	672,54
2	603,98	603,41	602,35	773,53	777,26
3	430,09	415,47	409,13	633,16	635,74
4	470,4	567,56	681,14	435,43	436,37
5	354,55	352,41	346,81	265,83	265,41
6	172,53	170,6	169,27	149,88	148,65
7	79,68	77,97	77,07	85,9	84,19
8	51	49,13	48,12	65,82	63,83

Таблица 5. Изгибающие моменты.

x, м	Изгибающие моменты M_y , кНм		
	Сетка с отверстием		
	11×10	19×17	35×31
0	0	0	0
1	267,2	268,45	268,37
2	377,61	380,87	380,76
3	413,73	429,98	431,31
4	464,97	559,15	669,9
5	-5,56	0	-0,01
6	0	0	-0,03
7	0	-0,01	-0,01
8	0	-0,01	0

Таблица 6. Прогибы.

x, м	Прогибы w , мм		
	Сетка с отверстием		
	11×10	19×17	35×31
0	0	0	0
1	21,4607	21,5519	21,5332
2	38,2354	38,6698	38,7032
3	50,3237	51,2232	51,348
4	59,408	60,884	61,1654
5	65,2354	66,8712	67,1428
6	67,7893	69,4844	69,7547
7	68,7566	70,48	70,7504
8	68,9911	70,7223	70,9923

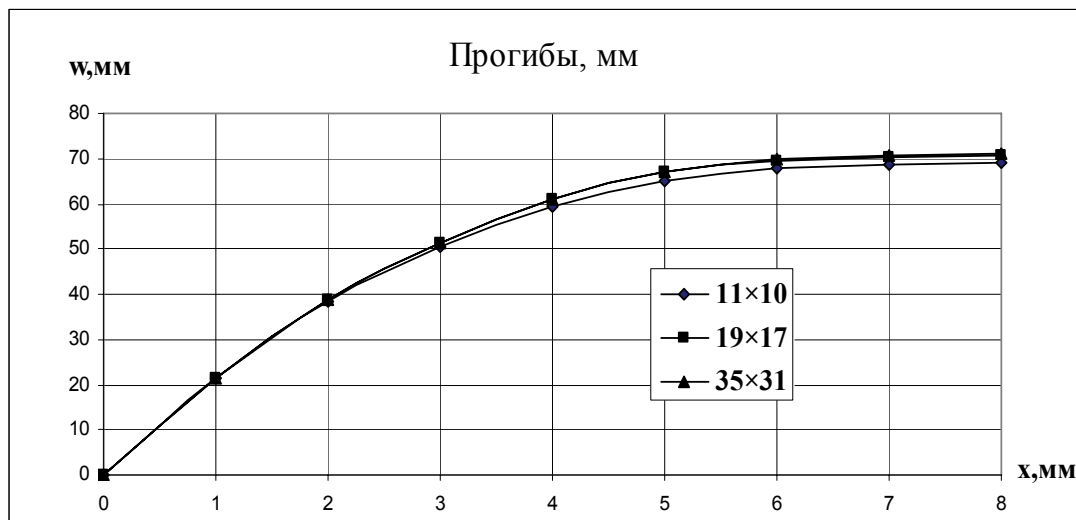


Рис. 12. Эпюры прогибов w для трехслойной пластинки вырезом.

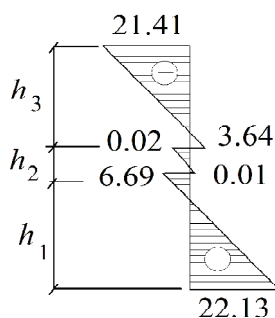


Рис. 13. Эпюра нормальных напряжений σ_x в угловой точке отверстия при сетке 35×31 узлов.

Таким образом, представленные результаты численного расчета трехслойной пластинки, лежащей на сплошном упругом основании, можно считать окончательными и достоверными уже для сетки 19×17 узлов.

Предложенная методика позволяет также успешно вести расчет трехслойных пластин применительно к дорожным покрытиям. Эти материалы полезны при изучении спецкурса по строительной механике студентами соответствующей специальности.

Литература

1. Федоров Ю. П. Программы для расчета трехслойных пластин на микрокалькуляторе «Электроника БЗ-34» // Исследования по строительной механике конструкций : сб. науч. трудов ордена Трудового Красного Знамени Воронежского инженерно-строительного института / Федоров Ю. П. – Воронеж, 1984. – С. 134–146.
2. Избранные методы строительной механики в расчетах пространственных конструкций / под общ. ред. д.т.н., проф. В. Ф. Муцанова. – Макеевка : ДонНАСА, 2006. – С. 55–136.
3. Муцанов В.Ф. Линейные и нелинейные задачи теории упругости в расчетах тонкостенных конструкций / Муцанов В. Ф., Демидов А. И. – Макеевка : ДонГАСА, 2000. – 182 с.
4. Муцанов В. Ф. Упруго-пластическое состояние круговой тороидальной оболочки с прямоугольным отверстием / Муцанов В. Ф., Демидов А. И. // Сучасне промислове та цивільне будівництво. – 2007. – Т. 3, № 2. – С. 67-77.
5. Вайнберг Д. В. Справочник по прочности, устойчивости и колебаниям пластин / Вайнберг Д. В. – К. : Будівельник, 1973. – 488 с.
6. Исследование пластин с прямоугольными вырезами / Вайнберг Д. В., Герасченко В. М., Кислюк В. Н. [и др.] // Сопротивление материалов и теория сооружений. – 1970. – Вып. XI. – С. 31–41.
7. Тимошенко С. П. Пластинки и оболочки / Тимошенко С. П., Войновский–Кригер С. – М. : Физматгиз, 1963. – 636 с.
8. Горшков А. С. Напряженно-деформированное состояние пола промышленного здания, расположенного на грунтовой основе: дис. канд. техн. наук : 05.23.01 / Горшков Антон Сергеевич. – Белгород, 2005. – 158 с.
9. Матвеев С. А. Моделирование и расчет армированных многослойных плит на упругом основании : автореф. дис. на соискание ученой степени доктора техн. наук : спец. 05.23.01 «Строительные конструкции, здания и сооружения» / С. А. Матвеев. – Томск, 2006. – 20 с.
10. Щербаков А. Г. Напряженно-деформированное состояние многослойной конструкции при

совместном действии нагрузки и внешней среды. Применительно к расчету дорожной одежды на мостовых сооружениях: дис. канд. техн. наук : 05.23.17, 05.23.11 / Щербаков А. Г. – Волгоград, 2005. – 328 с.

11. Паймушин В. Н. Уравнения теории многослойных оболочек со слоями переменной толщины и их применение к задачам теории упругости в не-

канонических областях / Паймушин В. Н., Демидов В. Г. // Исследования по теории пластин и оболочек. – 1985. – Т. 18, № 2. – С. 54–65.

12. Kotova L. B. Bending round multilayered plates / Kotova L. B., Rasskazov A. O., and Sokolovskaya I. I. // Kiev Transported from Problemy Prochnosti. – 1981. – № 2. – P. 97-99.

Мушанов Володимир Пилипович – д.т.н., професор, завідувач кафедри «Теоретична і прикладна механіка», проректор з наукової роботи Донбаської національної академії будівництва і архітектури. Член Міжнародної організації «Інститут цивільних інженерів» та Міжнародної асоціації «Просторові конструкції», аудитор системи сертифікації УкрСЕПРО. Академік Академії будівництва України. Наукові інтереси: теорія надійності, розрахунок, проектування та технічна діагностика просторових металевих конструкцій.

Демидов Олександр Іванович – к.т.н., доцент кафедри «Теоретична і прикладна механіка» Донбаської національної академії будівництва і архітектури. Наукові інтереси: фізичні лінійні і нелінійні задачі теорії тонких оболонок постійної і змінної товщини.

Мушанов Владимир Филиппович – д.т.н., профессор, заведующий кафедрой «Теоретическая и прикладная механика», проректор по научной работе Донбасской национальной академии строительства и архитектуры. Член международной организации «Институт гражданских инженеров» и международной организации «Пространственные конструкции», аудитор системы сертификации УкрСЕПРО. Академик Академии строительства Украины. Научные интересы: теория надежности, расчет, проектирование и техническая диагностика пространственных металлических конструкций.

Демидов Александр Иванович – к.т.н., доцент кафедры «Теоретическая и прикладная механика» Донбасской национальной академии строительства и архитектуры. Научные интересы: физические линейные и нелинейные задачи теории тонких оболочек постоянной и переменной толщины.

Mushchanov Volodymyr Pylypovych – doctor of engineering sciences, professor, the Head of «Theoretical and Applied Mechanics» Chair, vice-principal on the scientific work of Donbas National Academy of Civil Engineering and Architecture. A member of the international organization «Institute of Civil Engineer» and international organization of «Spatial Structures», an auditor of certification UKRSEPRO system. The academician of the Engineering Academy in Ukraine. His research interests include the reliability theory, calculation, designing and engineering diagnostics of spatial metal structures.

Demidov Aleksander Ivanovich – candidate of engineering sciences, an assistant professor of «Theoretical and Applied Mechanics» Chair of Donbas National Academy of Civil Engineering and Architecture. Scientific interests: physical linear and nonlinear tasks of theory of thin shells of permanent and variable thickness.