



ISSN 1819-432X print / ISSN 1993-3495 online

**СУЧАСНЕ ПРОМИСЛОВЕ ТА ЦИВІЛЬНЕ БУДІВНИЦТВО**  
**СОВРЕМЕННОЕ ПРОМЫШЛЕННОЕ И ГРАЖДАНСКОЕ СТРОИТЕЛЬСТВО**  
**MODERN INDUSTRIAL AND CIVIL CONSTRUCTION**

2014, ТОМ 10, НОМЕР 2, 147–168

УДК 624.012.4:539.4

## **ВАРІАНТ ОПИСУ ЗАКОНОМІРНОСТЕЙ ПРУЖНО-ПЛАСТИЧНОГО І ПСЕВДОПЛАСТИЧНОГО ДЕФОРМУВАННЯ БЕТОНУ В УМОВАХ ОБ'ЄМНОГО НАПРУЖЕНОГО СТАНУ**

**В. І. Корсун, А. В. Недорезов**

*Донбаська національна академія будівництва і архітектури,  
2, вул. Державіна, м. Макіївка, Донецька область, Україна, 86123.*

*E-mail: nedorezov\_a\_v@mail.ru*

*Отримана 4 квітня 2014; прийнята 25 квітня 2014.*

**Анотація.** Представлені пропозиції щодо вдосконалення варіанта модифікованої деформаційної теорії пластичності бетону, що розвивається в ДонНАБА. Розроблено аналітичні вирази, що дозволяють з достатньою точністю для загального випадку об'ємного напруженого стану описувати основні складові деформацій бетону: пружно-пластичні, не пов'язані з руйнуванням його структури, і псевдопластичні деформації, обумовлені закономірностями руйнування його структури бетону. За вихідну прийнята зсувно-відривна модель руйнування структури бетону по типу просторово орієнтованих «зигзаг-тріщин». Розроблений модифікований варіант моделі деформування бетону побудований на поєднанні рішень, заснованих на співвідношеннях механіки твердого деформованого тіла і механіки руйнування. Тестування розрахункової моделі здійснено зіставленням розрахункових величин деформацій з дослідними даними А. В. Яшина, Н. Kurfer, М. Tasuji і S. Schröder в умовах неоднорічних напружених станів.

**Ключові слова:** бетон, об'ємний напружений стан, міцність, деформації, стисливість, дилатація, моделі деформування.

## **ВАРИАНТ ОПИСАНИЯ ЗАКОНОМЕРНОСТЕЙ УПРУГО- ПЛАСТИЧЕСКОГО И ПСЕВДОПЛАСТИЧЕСКОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ БЕТОНА В УСЛОВИЯХ ОБЪЕМНОГО НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ**

**В. И. Корсун, А. В. Недорезов**

*Донбасская национальная академия строительства и архитектуры,  
2, ул. Державина, г. Макеевка, Донецкая область, Украина, 86123.*

*E-mail: nedorezov\_a\_v@mail.ru*

*Получена 4 апреля 2014; принята 25 апреля 2014.*

**Аннотация.** Представлены предложения по усовершенствованию варианта модифицированной деформационной теории пластичности бетона, развиваемого в ДонНАСА. Разработаны аналитические выражения, позволяющие с достаточной точностью для общего случая объемного напряженного состояния описывать основные составляющие деформаций бетона: упругопластические, не связанные с разрушением его структуры, и псевдопластические деформации, обусловленные закономірностями разрушения структуры бетона. В качестве исходной принята сдвиго-отрывная модель разрушения структуры бетона по типу пространственно ориентированных «зигзаг-трещин». Разработанный модифицированный вариант модели деформирования бетона построен на соединении решений, основанных на

соотношениях механики твердого деформируемого тела и механики разрушения. Тестирование расчетной модели осуществлено сопоставлением расчетных величин деформаций с опытными данными А. В. Яшина, Н. Kupfer, М. Tasuji и S. Schröder в условиях не одноосных напряженных состояний.

**Ключевые слова:** бетон, объемное напряженное состояние, прочность, деформации, сжимаемость, дилатация, модели деформирования.

## VARIANT OF ELASTIC-PLASTIC AND PSEUDOPLASTIC CONCRETE DEFORMATIONS REGULARITIES SUBSCRIBE IN CONDITIONS OF VOLUME STRESS STATE

Volodymyr Korsun, Andrii Niedoriezov

Donbas National Academy of Civil Engineering and Architecture,  
2, Derzhavina Str., Makiyivka, Donetsk Region, Ukraine, 85123.

E-mail: nedorezov\_a\_v@mail.ru

Received 4 April 2014; accepted 25 April 2014.

**Abstract.** Propositions for improvement of modified strain theory variant developed in DonNACEA are presented. Analytical expressions, which allow to subscribe the basic components for general case of volume stress state as elastic-plastic strains, which don't relate with destruction of concrete structure and pseudo-plastic strains due to regularities of concrete structure destruction, are made. As initial shear-displacement model of concrete structure destruction by type of three-dimensional directed «zigzag crack» are adopted. Developed modified variant of concrete behavior model are formed up on the combination of solutions based on relations of solid mechanic and fracture mechanic. Verification of model are made by comparison of estimated values of A. V. Yashin, H. Kupfer, M. Tasuji and S. Schröder at conditions of uniaxial stress states.

**Keywords:** concrete, volume stress state, strength, strain, compressibility, dilatation, behavior models.

Известно, что процесс деформирования бетона при нагружении сопровождается процессом разрушения его структуры. Это проявляется в направленном в трехмерном пространстве напряжений развитии деформаций уплотнения (явление сжимаемости) и разуплотнения (явление дилатации) бетона. Именно процессами направленного уплотнения и направленного разуплотнения структуры при нагружении и объясняется, в основном, природа силовой (деформационной) анизотропии (ортотропии) деформирования бетона.

Важной задачей при разработке модели деформирования бетона для общего случая объемного напряженного состояния является количественная оценка составляющих полных деформаций бетона: упруго-пластических вследствие физической нелинейности деформирования и псевдопластических вследствие микро- и макротрещинообразования в структуре бетона.

Представлены результаты анализа данных экспериментальных исследований ряда авторов

[6, 10, 13–16] с целью дальнейшего развития варианта модифицированной деформационной теории пластичности бетона, разрабатываемого в ДонНАСА [5] на основе дилатационной модели Г. А. Гениева [1]. В работе [5] модель [1] получила развитие в части учета направленного развития микроразрушений в структуре бетона – эффектов сжимаемости и дилатации, а также в части учета влияния вида напряженного состояния на параметры трансформируемых диаграмм деформирования бетона.

В соответствии с моделью [5] компоненты  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$  линейных относительных деформаций в направлениях осей ортотропии при кратковременном нагружении при  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$  определяются соотношениями:

$$\varepsilon_i = \frac{\sigma_i}{E} - \frac{\mu_0}{E} \cdot (\sigma_j + \sigma_k) + b_i \cdot \theta_{pc} + a_i \cdot \theta_d; \quad (i, j, k = 1, 2, 3). \quad (1)$$

При этом относительное изменение объема определяется суммой составляющих:

$$\theta = \theta_{ep} + \theta_{pc} + \theta_d, \quad (2)$$

где  $\theta_{ep}$  – упруго-пластические деформации бетона, не связанные с разрушением его структуры, описываемые соотношениями механики твердого деформируемого тела;

$\theta_{pc}$  – объемная деформация уплотнения, обусловленная деформациями сдвига;

$\theta_d$  – объемная деформация разуплотнения, обусловленная эффектом дилатации;

$b_i, a_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) – коэффициенты разложения объемных деформаций  $\theta_{pc}$  и  $\theta_d$  на составляющие вдоль главных осей, значения которых определяются из предложенной в [5] сдвиго-отрывной модели разрушения структуры бетона по типу пространственно ориентированных «зигзаг-трещин».

Как следует из уравнений (1) и (2), суммы каждой из групп коэффициентов разложения объемных деформаций  $\theta_{pc}$  и  $\theta_d$ , равны единице:

$$a_1 + a_2 + a_3 = 1; b_1 + b_2 + b_3 = 1. \quad (3)$$

Методика вычислений коэффициентов  $a_i$  и  $b_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) представлена в работе [5]. Исключительно экспериментальными методами разделение полных деформаций бетона на составляющие согласно соотношениям (1) и (2) не возможно. Поэтому в данном исследовании принят экспериментально-теоретический метод, согласно которому составляющие полных деформаций определяются теоретически по специально разработанным расчетным методикам при обязательном условии близкого соответствия суммарных расчетных величин по условиям (1) и (2) опытным значениям  $\theta$  и  $\varepsilon_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ).

Составляющая упруго-пластических деформаций бетона  $\theta_{ep}$ , как условно сплошного тела, в формуле (2) описывается соотношением механики твердого деформируемого тела [9]:

$$\theta_{ep} = \frac{I_1(T_\sigma) \cdot (1 - 2 \cdot \mu_0)}{E_{ep}}, \quad (4)$$

где  $I_1(T_\sigma)$  – первый инвариант тензора напряжений;

$\mu_0$  – коэффициент поперечных деформаций бетона;

$E_{ep}$  – модуль упруго-пластических деформаций, определяемый по формуле (12).

На рис. 1 и 2 представлены графики изменения опытных величин деформаций относительного изменения объема  $\theta$  в зависимости от уровня

нагружения  $|\sigma_3|/R_b$ . Все построения выполнены при соотношении  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$  и при общепринятом правиле знаков: растягивающие напряжения и деформации удлинения – положительные.

Для выявления закономерностей связи между деформацией относительного изменения объема  $\theta$  и уровнем нагружения на рис. 3 и 4 представлены опытные соотношения преобразованной величины относительной объемной деформации от уровня нагружений в виде:

– для области сжатия и сжатия с растяжением при  $\sigma_3 < 0$

$$\frac{\theta \cdot \sigma_3}{I_1(T_\sigma)} = \frac{\theta \cdot \sigma_3}{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3} = \frac{\theta \cdot \sigma_3}{3 \cdot \sigma_0} = \frac{\varepsilon_0 \cdot \sigma_3}{\sigma_0} = \frac{\theta}{n + m + 1}, \quad (5)$$

$$\text{где } n = \frac{\sigma_1}{\sigma_3}; \quad m = \frac{\sigma_2}{\sigma_3};$$

– для области растяжения при  $\sigma_3 \geq 0$

$$\frac{\theta \cdot \sigma_1}{I_1(T_\sigma)} = \frac{\theta \cdot \sigma_1}{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3} = \frac{\theta \cdot \sigma_1}{3 \cdot \sigma_0} = \frac{\varepsilon_0 \cdot \sigma_1}{\sigma_0} = \frac{\theta}{n + m + 1}, \quad (6)$$

$$\text{где } n = \frac{\sigma_2}{\sigma_1}; \quad m = \frac{\sigma_3}{\sigma_1}.$$

Среднее напряжение  $\sigma_0$  и первый инвариант тензора напряжений  $I_1(T_\sigma)$  в формулах (4), (5) и (6) определяются по общепринятым выражениям [9]:

$$\sigma_0 = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}; \quad (7)$$

$$I_1(T_\sigma) = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 3 \cdot \sigma_0.$$

При преобразовании опытных данных авторов [8, 11, 13–16] путем трансформации откладываемых по оси деформаций величин их умножением на результат отношения  $\sigma_k / I_1(T_\sigma)$  ( $k = 1, 3$ ) различные кривые деформирования могут быть приведены к некоторой единообразной кривой, изменяющийся по подобному закону до уровня нагружения порядка 0,8 от разрушающего значения  $\bar{\sigma}_k$  (рис. 3, 4). При более высоких уровнях нагружения опытные кривые относительно изменения объема получают дополнительное искривление в сторону оси напряжений вследствие дилатационных процессов. Такой вид представления кривых деформирования позволяет применить для их описания единообразную зависимость. Приемлемыми являются соотношения в виде (11), описываемые квадратной параболой. Они дают наиболее близкие результаты к участкам опытных кривых до уровня  $0,8 \cdot \bar{\sigma}_k$ , т. е.,

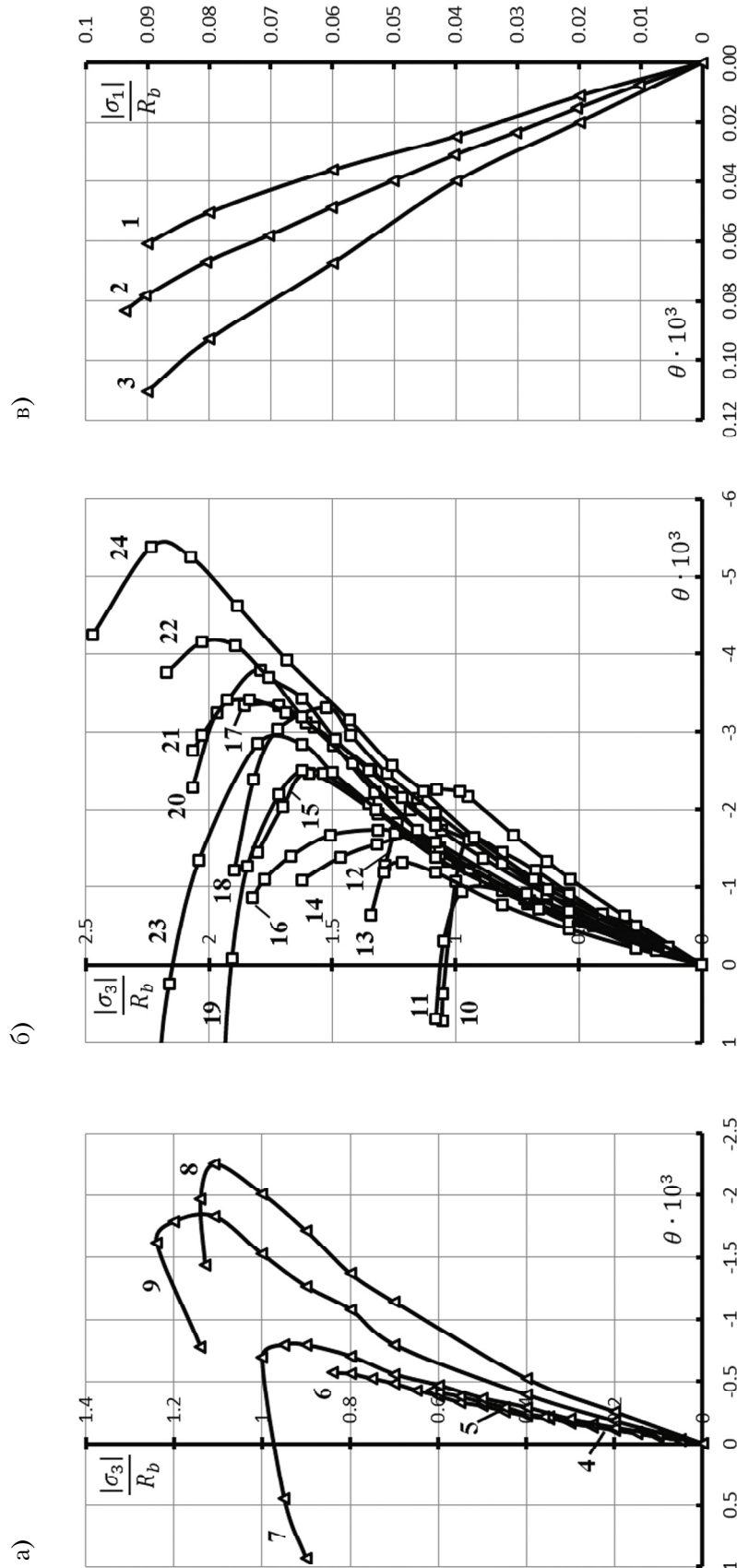
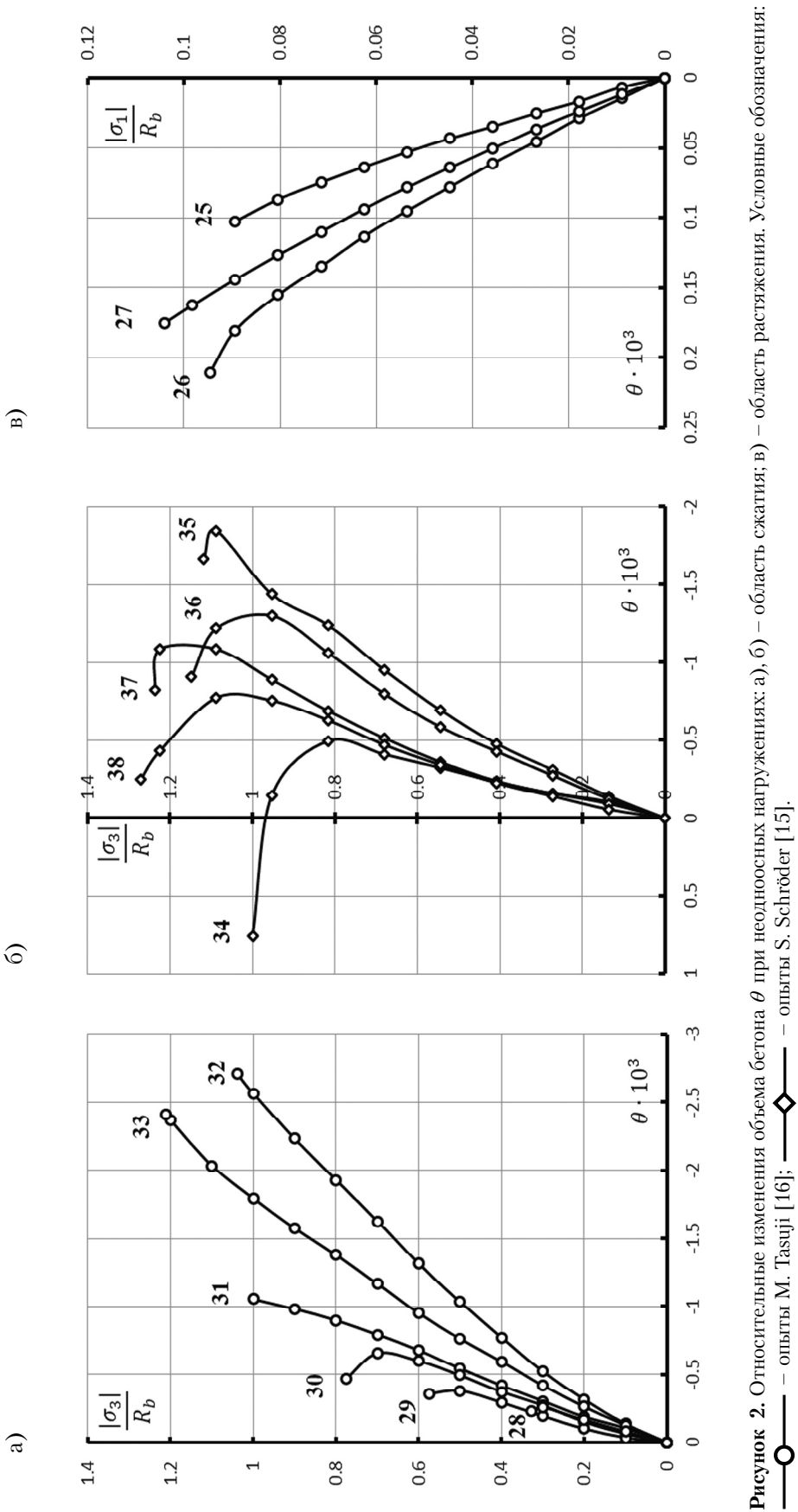


Рисунок 1. Относительные изменения объема бетона  $\theta$  при неоднородных нагружениях: а), б) – область сжатия; в) – область растяжения. Условные обозначения: —▲— — опыты Н. Курфег [13]; —□— — опыты А. В. Яшина [8, 11].

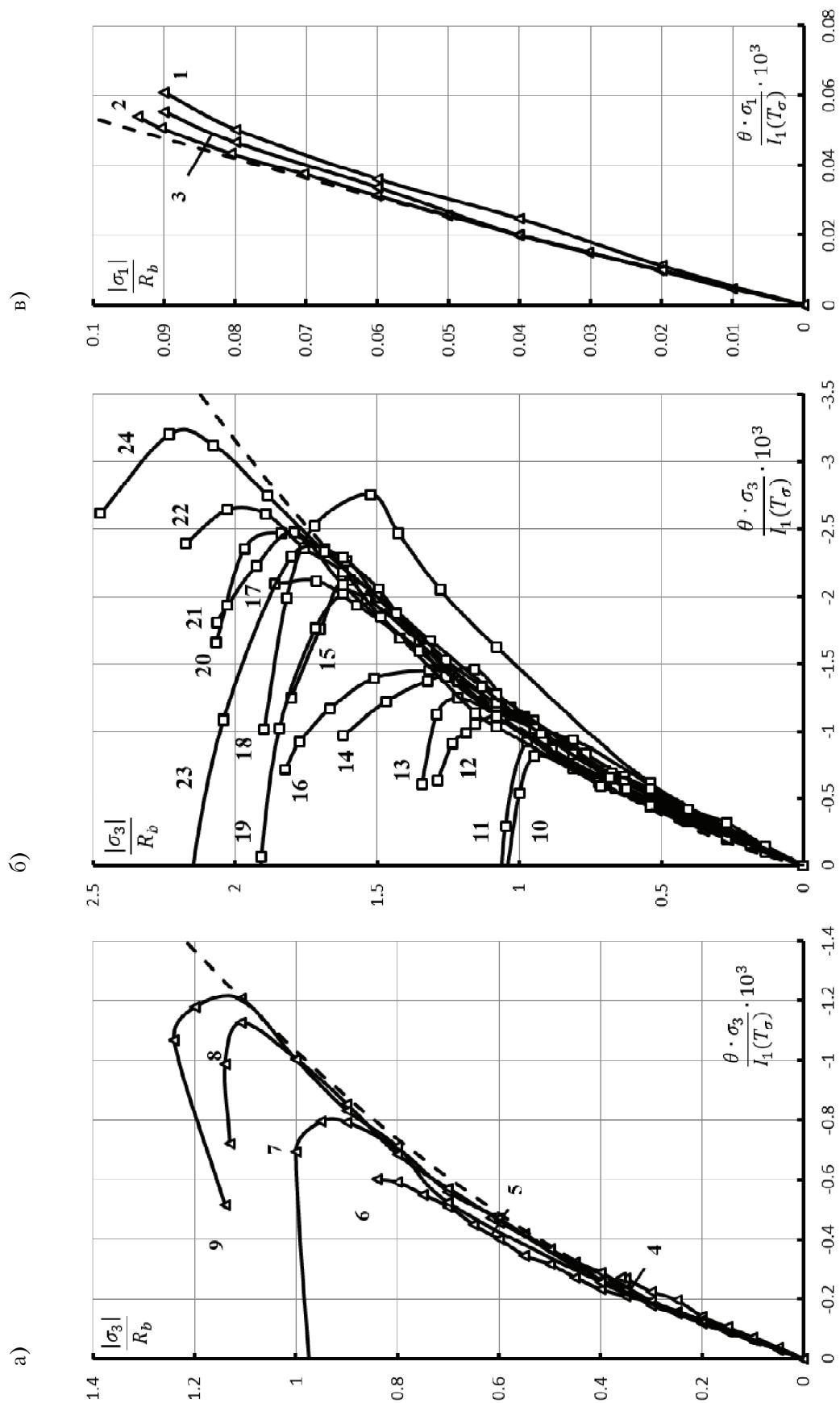
№	$\sigma_1; \sigma_2; \sigma_3$	Автор	№	$\sigma_1; \sigma_2; \sigma_3$	Автор	№	$\sigma_1; \sigma_2; \sigma_3$	Автор
1	1: 0: 0	Н. Курфег	6	0,052: 0: -1	Н. Курфег	11	-0,01: -0,01: -1	А. В. Яшин
2	1: 0,55: 0	Н. Курфег	7	0: 0: -1	Н. Курфег	12	-0,016: -1: -1	А. В. Яшин
3	1: 1: 0	Н. Курфег	8	0: -1: -1	Н. Курфег	13	-0,03: -0,03: -1	А. В. Яшин
4	0,204: 0: -1	Н. Курфег	9	0: -0,52: -1	Н. Курфег	14	-0,065: -0,065: -1	А. В. Яшин
5	0,103: 0: -1	Н. Курфег	10	0: -1: -1	А. В. Яшин	15	-0,08: -0,08: -1	А. В. Яшин
						16	-0,1: -0,1: -1	А. В. Яшин
						17	-0,065: -0,533: -1	А. В. Яшин
						18	-0,1: -0,1: -1	А. В. Яшин
						19	-0,09: -0,15: -1	А. В. Яшин
						20	-0,08: -0,3: -1	А. В. Яшин
						21	-0,08: -0,45: -1	А. В. Яшин
						22	-0,07: -0,5: -1	А. В. Яшин
						23	-0,12: -0,12: -1	А. В. Яшин
						24	-0,113: -0,508: -1	А. В. Яшин



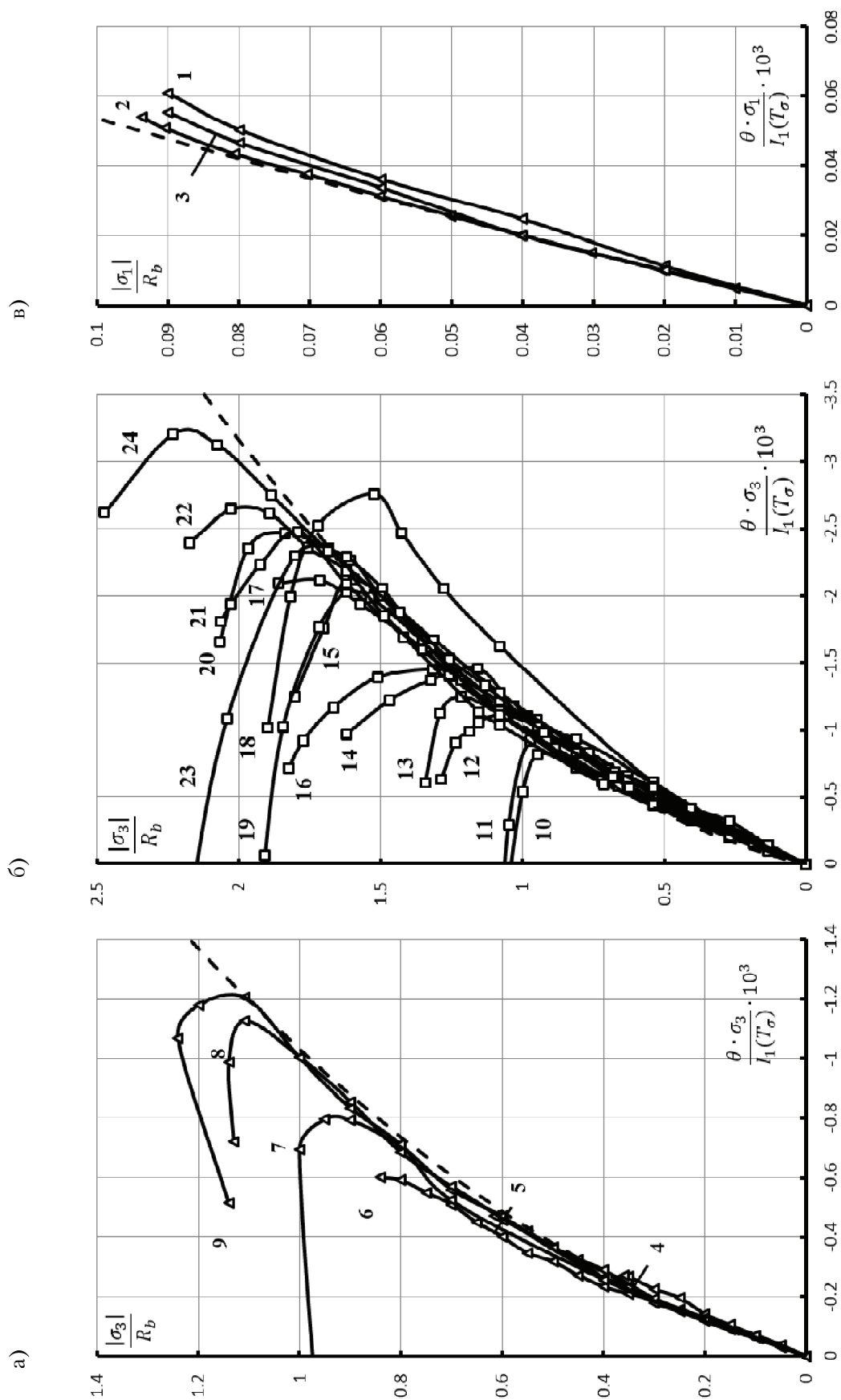
№	$\sigma_1 : \sigma_2 : \sigma_3$	Автор
25	1: 0: 0	М. Тасуџи
26	1: 0,55: 0	М. Тасуџи
27	1: 1: 0	М. Тасуџи
28	0,25: 0: -1	М. Тасуџи
29	0: 1: 0: -1	М. Тасуџи

№	$\sigma_1 : \sigma_2 : \sigma_3$	Автор
30	0,05: 0: -1	М. Тасуџи
31	0: 0: -1	М. Тасуџи
32	0: -1: -1	М. Тасуџи
33	0: -0,5: -1	М. Тасуџи
34	0: 0: -1	S. Schröder

№	$\sigma_1 : \sigma_2 : \sigma_3$	Автор
35	0: -1: -1	S. Schröder
36	0: -0,7: -1	S. Schröder
37	0: -0,4: -1	S. Schröder
38	0: -0,2: -1	S. Schröder



**Рисунок 3.** Графики относительного изменения объема бетона при трансформировании шкалы деформаций: а), б) – область сжатия; в) – область растяжения. Условные обозначения см. рис. 1. Теоретические значения: — — — по формуле (10) с учетом коэффициентов по формуле (15).



**Рисунок 4.** Графики относительного изменения объема бетона при трансформировании шкалы деформаций: а), б) – область сжатия; в) – область растяжения. Условные обозначения смотреть рис. 2. Теоретические значения: — — — — — по формуле (10) с учетом коэффициентов значения: — — — — —

до начала процесса макротрещинообразования в структуре бетона.

Выражения для определения упруго-пластических деформаций  $\theta_{ep}$ , как для условно сплошного тела, разработано, исходя из следующих основных предпосылок:

1. Полагается, что полные упруго-пластические деформации бетона  $\theta_{ep}$ , как условно сплошного тела, не связаны с процессами разрушения структуры бетона и определяются как сумма упругих  $\theta_{ep}$  и пластических деформаций  $\theta_{pl}$ .

$$\theta_{ep} = \theta_{el} + \theta_{pl}. \quad (8)$$

2. При использовании соотношений в форме закона Гука и постоянной величине коэффициента поперечных деформаций  $\mu_0$  составляющие объемных деформаций могут быть определены из выражений:

$$\begin{aligned} \theta_{el} &= \frac{I_1(T_\sigma) \cdot (1 - 2 \cdot \mu_0)}{E_0}; \\ \theta_{ep} &= \frac{I_1(T_\sigma) \cdot (1 - 2 \cdot \mu_0)}{E_{ep}}. \end{aligned} \quad (9)$$

3. Аналитические выражения для определения упруго-пластических деформаций бетона  $\theta_{ep}$  получены аппроксимацией выявленной закономерности их изменения, представленной на рис. 3, 4:

при  $\sigma_3 < 0$

$$\theta_{ep} = \frac{I_1(T_\sigma)}{\sigma_3} \cdot \left( c_1 \cdot \left( \frac{\sigma_3}{R_b} \right)^2 + d_1 \cdot \frac{\sigma_3}{R_b} \right) = \frac{I_1(T_\sigma)}{\sigma_3} \cdot F(\sigma_3);$$

при  $\sigma_3 \geq 0$  (область растяжения)

$$\theta_{ep} = \frac{I_1(T_\sigma)}{\sigma_1} \cdot \left( c_2 \cdot \left( \frac{\sigma_1}{R_b} \right)^2 + d_2 \cdot \frac{\sigma_1}{R_b} \right) = \frac{I_1(T_\sigma)}{\sigma_1} \cdot F(\sigma_1); \quad (10)$$

где  $c_1 = -c_2$ ;  $d_1 = d_2$ .

$$F(\sigma_l) = \left( c_k \cdot \left( \frac{\sigma_l}{R_b} \right)^2 + d_k \cdot \frac{\sigma_l}{R_b} \right); \quad (k=1, 2; \quad l=3, 1). \quad (11)$$

Модуль упруго-пластических деформаций  $E_{ep}$  может быть определен в предположении равенства упруго-пластических деформаций  $\theta_{ep}$  по выражениям (9) и (10):

$$E_{ep} = \frac{(1 - 2 \cdot \mu_0) \cdot \sigma_l}{F(\sigma_l)}. \quad (12)$$

Выразим модуль упруго-пластических деформаций в общепринятой форме записи:

$$\begin{aligned} E_{ep} &= E_0 \cdot (1 - \omega) \\ \omega &= 1 - \frac{E_{ep}}{E_0} = \frac{E_0 - E_{ep}}{E_0} = \\ &= 1 - \frac{(1 - 2 \cdot \mu_0) \cdot \sigma_l}{F(\sigma_l) \cdot E_0} = 1 - \frac{\sigma_l}{F(\sigma_l) \cdot K_\sigma}, \end{aligned} \quad (13)$$

где  $\omega$  – коэффициент пластичности условно сплошного тела;

$K_\sigma$  – модуль объемного сжатия.

Деформационные параметры  $c_l$  и  $d_l$  определяются из равенств (10) для двух характерных точек на кривых деформирования:

$$\begin{aligned} c_1 &= - \frac{R_b^2 \cdot (I_1^{T,1} \cdot \theta^{T,2} - I_1^{T,2} \cdot \theta^{T,1})}{I_1^{T,1} \cdot I_1^{T,2} \cdot (\sigma_3^{T,1} - \sigma_3^{T,2})}; \\ d_1 &= \frac{R_b \cdot (I_1^{T,1} \cdot \theta^{T,2} \cdot \sigma_3^{T,1} - I_1^{T,2} \cdot \theta^{T,1} \cdot \sigma_3^{T,2})}{I_1^{T,1} \cdot I_1^{T,2} \cdot (\sigma_3^{T,1} - \sigma_3^{T,2})}. \end{aligned} \quad (14)$$

В качестве исходных приняты следующие параметры для каждой из точек: напряжения  $\sigma_3^{T,i}$ , объемные деформации  $\theta^{T,i}$  и первый инвариант тензора напряжений  $I_1(T_\sigma)^{T,i}$ . При анализе опытных данных Н. Купфер [13] в качестве характерных выбраны точки на кривых деформирования из опытов на одноосное сжатие при уровне напряжений  $0,3 \cdot R_b$  и при неравномерном двухосном сжатии уровня  $1,1 \cdot R_b$ . Значения коэффициентов  $c_l, d_l$ , подобранных для опытных данных Н. Купфер, достаточно хорошо соответствуют и опытным данным А. В. Яшина [8, 11]. Для опытных данных М. Тасуџи [16] были выбраны точки из опытов на одноосное сжатие в уровне  $0,3 \cdot R_b$  и на равномерное двухосное сжатие в уровне  $0,9 \cdot R_b$ . Для опытных данных S. Schröder [15] были выбраны точки из опыта на равномерное двухосное сжатие в уровнях  $0,2 \cdot R_b$  и  $0,8 \cdot R_b$ . Значения коэффициентов  $c_l$  и  $d_l$ , наиболее точно соответствующих опытным данным, составили:

$$\left. \begin{aligned} c_1 &= -5,44 \cdot 10^{-4}, \\ d_1 &= 4,83 \cdot 10^{-4}, \text{ — Н. Купфер;} \\ c_1 &= -5,44 \cdot 10^{-4}, \\ d_1 &= 4,83 \cdot 10^{-4}, \text{ — А. В. Яшин;} \\ c_1 &= -4,79 \cdot 10^{-4}, \\ d_1 &= 8,07 \cdot 10^{-4}, \text{ — М. Тасуџи;} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \eta_1 &= 0,3 \\ \eta_2 &= 1,1 \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} c_1 &= -3,46 \cdot 10^{-4}, \\ d_1 &= 4,74 \cdot 10^{-4}, \text{ — S. Schröder.} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \eta_1 &= 0,2; \eta_2 = 0,8. \end{aligned} \quad (15)$$



Упруго-пластический модуль объемного сжатия бетона  $K_{ep}$  может быть определен с учетом формулы (10) из следующего выражения:

$$K_{ep} = \frac{\sigma_0}{\theta_{ep}} = \frac{\sigma_i}{F(\sigma_i)} = \frac{\sigma_i}{c_k \cdot \left(\frac{\sigma_i}{R_b}\right)^2 + d_k \cdot \frac{\sigma_i}{R_b}} = \frac{1}{\frac{c_k}{R_b^2} \cdot \sigma_i + \frac{d_k}{R_b}} \quad (16)$$

Выполнена оценка соответствия расчетных значений модуля упруго-пластических деформаций  $E_{ep}$ , определяемого по выражению (12), опытным значениям модуля линейных деформаций  $E$ , величины которых определялись двумя способами. В первом случае – по формуле (17), используя опытные значения модуля объемного сжатия. Во втором случае – по формуле (18) путем определения модуля линейных деформаций для главенствующего направления сжатия (растяжения). В обоих случаях коэффициент поперечных деформаций  $\mu_0$  принимается величиной постоянной и равной начальному значению. Сравнение расчетных по формуле (12) и опытных значений модуля линейных деформаций, а также расчетных по формуле (10) и опытных значений объемных деформаций представлено на рис. 5 и 6.

Определение значений модуля деформаций  $E$  по результатам экспериментальных исследований для рассмотренных случаев осуществлялось по формулам:

а) для случая № 1:

$$E = K \cdot (1 - 2 \cdot \mu_0), \quad (17)$$

а) для случая № 2:

– при главенствующем сжатии ( $\sigma_3 < 0$ )

$$E = E_3 = \frac{\sigma_3 - \mu_0 \cdot (\sigma_1 + \sigma_2)}{\varepsilon_3},$$

– при главенствующем растяжении ( $\sigma_3 \geq 0$ )

$$E = E_1 = \frac{\sigma_1 - \mu_0 \cdot (\sigma_3 + \sigma_2)}{\varepsilon_1}. \quad (18)$$

Данные на рис. 5 и 6 до уровня  $0.8 \cdot \bar{\sigma}_i$  демонстрируют достаточно близкое соответствие опытных величин модуля линейных деформаций  $E$ , определяемых для двух выше описанных случаев. Это свидетельствует о том, что искривление диаграмм деформирования до уровня нагружения  $0.8 \cdot \bar{\sigma}_i$  может быть учтено соответствующим

изменением модуля деформаций. Выражение (12), предложенное для описания модуля упруго-пластических деформаций, обеспечивает близкое соответствие опытным значениям модуля линейных деформаций  $E$  до уровня  $0.8 \cdot \bar{\sigma}_i$  (рис. 5 и 6).

Величины объемной деформации уплотнения  $\theta_{pc}$  и объемной деформации дилатации  $\theta_d$  определяются из опытных данных при использовании конкретных теоретических предпосылок. Выполняется следующая последовательность действий:

– определяются расчетные величины упруго-пластических деформаций  $\varepsilon_i^{ep}$  при значениях модуля упруго-пластических деформаций  $E_{ep}$  согласно уравнению (12):

$$\varepsilon_i^{ep} = \frac{\sigma_i}{E_{ep}} - \frac{\mu_0}{E_{ep}} \cdot (\sigma_j + \sigma_k); \quad (i, j, k = 1, 2, 3), \quad (19)$$

– определяются величины деформаций уплотнения  $\varepsilon_i^{pc}$  и дилатации  $\varepsilon_i^d$  вычитанием упруго-пластических деформаций  $\varepsilon_i^{ep}$  из опытных величин компонент полных главных деформаций  $\varepsilon_i$ .

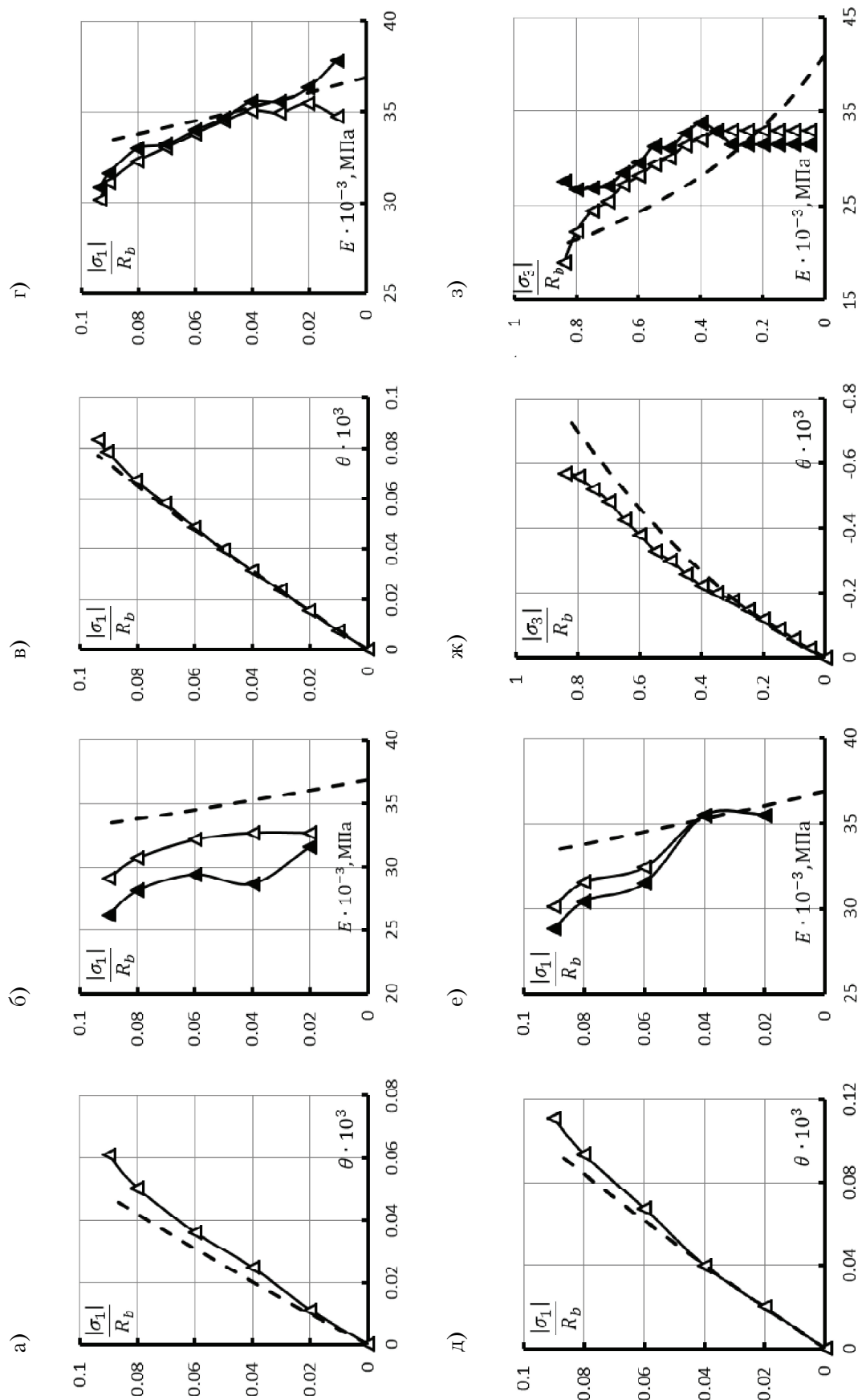
$$\begin{aligned} \varepsilon_i^{pc(d)} &= \varepsilon_i - \varepsilon_i^{ep}; \quad (i, j, k = 1, 2, 3); \\ \varepsilon_1^d &= \varepsilon_1 - \varepsilon_1^{ep}; \quad \varepsilon_2^{pc(d)} = \varepsilon_2 - \varepsilon_2^{ep}; \\ \varepsilon_3^{pc} &= \varepsilon_3 - \varepsilon_3^{ep}. \end{aligned} \quad (20)$$

Запись выражений в форме (20) отражает основные закономерности развития деформаций бетона вследствие разрушения его структуры по типу пространственно ориентированной «зигзаг-трещины»: деформации сдвигового уплотнения развиваются в направлениях больших сжимающих напряжений, а сдвигового разуплотнения – преимущественно в направлениях меньших сжимающих (больших растягивающих) напряжений.

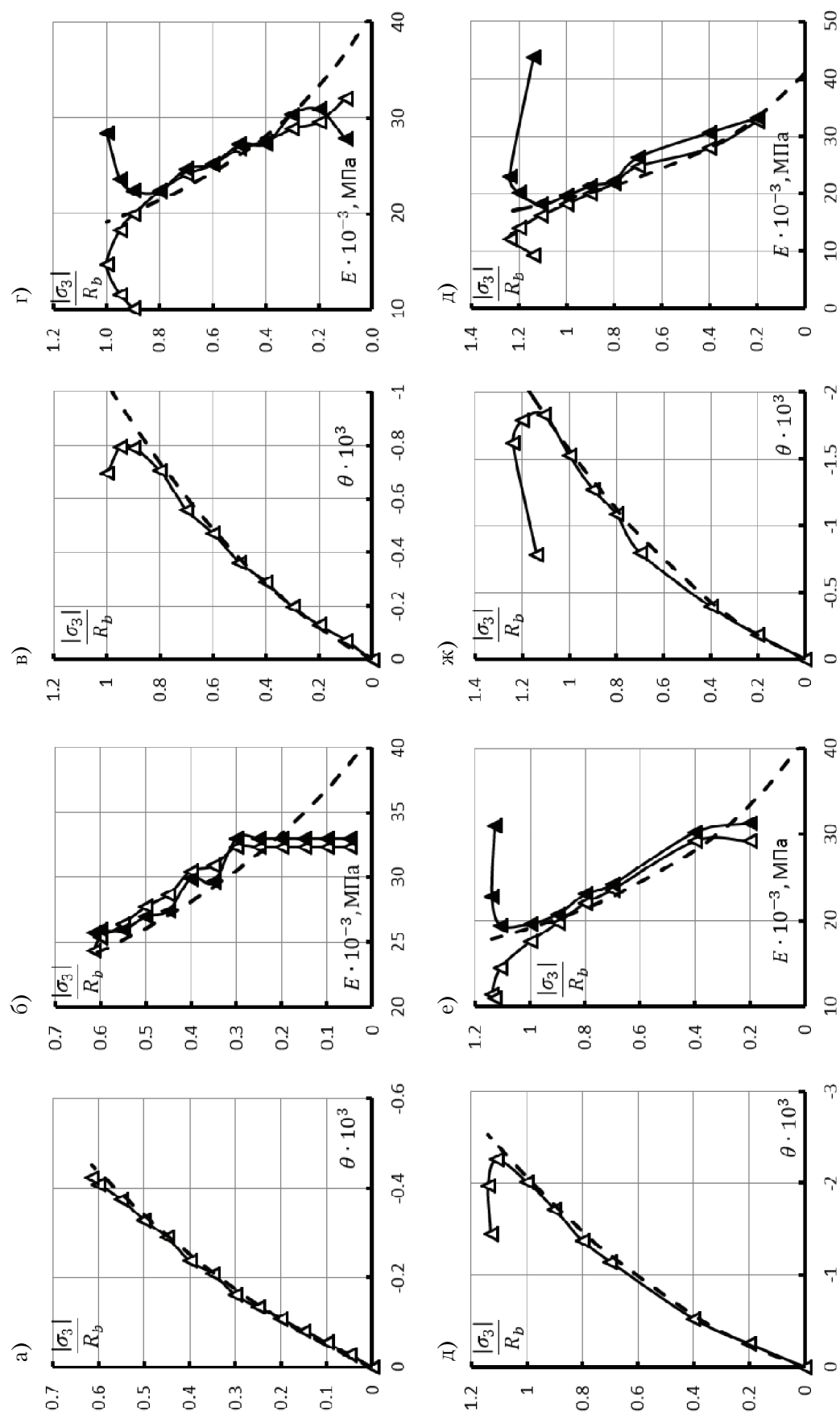
– определяются составляющие деформации относительного изменения объема – величины объемной деформации уплотнения  $\theta_{pc}$  и дилатации  $\theta_d$  делением величин  $\varepsilon_i^{pc(d)}$  из уравнения (20) на соответствующие коэффициенты  $b_i$  и  $a_i$  из формул (1), (3) с их знаком:

$$\theta_d = \frac{\varepsilon_1^d}{a_1}; \quad \theta_{pc} = \frac{\varepsilon_3^{pc}}{b_3}. \quad (21)$$

Для определения объемной деформации дилатации  $\theta_d$  в качестве исходного использовано выражение Г. А. Гениева [1] в сочетании с



**Рисунок 5.** Изменения расчетных значений объемных деформаций а), в), д), ж) и модулей деформаций б), г), е), з) бетона при соотношениях напряжений 1 : 0 : 0 а), б); 1 : 0.55 : 0 в), г); 1 : 1 : 0 д), е); 0.052 : 0 : -1 ж), з) в опытах Н. Курфег [13]. Теоретические значения: - - - - по формулам (10; 12);  $\blacktriangle$  — для случая № 1 по формулам (17);  $\blacktriangleleft$  — для случая № 2 по формулам (18).



**Рисунок 6.** Изменения расчетных значений объемных деформаций а), в), д), ж) и модулей деформаций б), г), е), з) бетона при соотношениях напряжений 0.1 : 0 : 1 а), б); 0 : 0 : -1 в), г); 0 : -1 : -1 д), е); 0 : -0.52 : -1 ж), з) в опытах Н. Курфег [13].  
Теоретические значения: - - - - по формулам (10; 12); — — — — для случая № 1 по формулам (17); — — — — для случая № 2 по формулам (18).

модифицированным выражением для модуля дилатации на базе предложенной Е. С. Лейтесом [7] формулы:

$$\begin{aligned}\theta_d &= q(\gamma_i) \cdot \gamma_i^2 = \\ &= \gamma_i^2 \cdot \frac{1}{\bar{\gamma}_i} \cdot \frac{G}{K} \cdot \frac{1 - \exp(-\eta_\gamma^3)}{\eta_\gamma + \exp(-\eta_\gamma^3)} \cdot k_1,\end{aligned}\quad (22)$$

где  $G$  – модуль деформаций сдвига:

$$G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \mu_0)}; \quad (23)$$

$\tau_i$  – интенсивность касательных напряжений:

$$\tau_i = \sqrt{1/6} \cdot \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}; \quad (24)$$

$\gamma_i$  – интенсивность деформаций сдвига:

$$\gamma_i = \sqrt{2/3} \cdot \sqrt{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2}; \quad (25)$$

$\eta_\gamma = \gamma_i / \bar{\gamma}$  – уровень приобретенных деформаций сдвига;

$\bar{\gamma}_i$  – значение интенсивности деформаций сдвига в вершине диаграммы « $\tau_i - \gamma_i$ ».

Модифицирование аналитического выражения для модуля дилатации, предложенного Е. С. Лейтесом [7], заключается в замене  $|\sigma_0|/\tau_i$  отношения функцией  $k_{i(2)}$ .

Величины деформаций сдвигового уплотнения  $\theta_{pc}$  с ростом уровня нагружения пропорциональны деформациям сдвигового разуплотнения  $\theta_d$ . Это вытекает из единого механизма разрушения структуры бетона по типу «зигзаг-трещин» [5]. Поэтому для аналитического описания деформации  $\theta_{pc}$  использовано выражение, аналогичное формуле (22).

$$\begin{aligned}\theta_{pc} &= q(\gamma_i) \cdot \gamma_i^2 = \\ &= \gamma_i^2 \cdot \frac{1}{\bar{\gamma}_i} \cdot \frac{G}{K} \cdot \frac{1 - \exp(-\eta_\gamma^3)}{\eta_\gamma + \exp(-\eta_\gamma^3)} \cdot k_2.\end{aligned}\quad (26)$$

Из анализа опытных данных выражения для корректирующих функций  $k_{i(2)}$  рекомендованы в следующем виде:

$$\begin{aligned}k_1 &= m_1 \cdot \bar{\gamma}_i + k_1^t; \\ k_2 &= m_2 \cdot \bar{\gamma}_i + k_2^t.\end{aligned}\quad (27)$$

Входящие в формулы (26) параметры определяются из выражений:

$$m_1 = \frac{k_1^c - k_1^t}{\bar{\gamma}_i^c}; \quad m_2 = \frac{k_2^c - k_2^t}{\bar{\gamma}_i^c}, \quad (28)$$

где  $k_1^t = 1,134$ ;  $k_2^t = -0,158$ ;  $k_1^c = 2,133$ ;  $k_2^c = -1,302$  – значения коэффициентов из опытов на одноосное растяжения и сжатие (рис. 7);

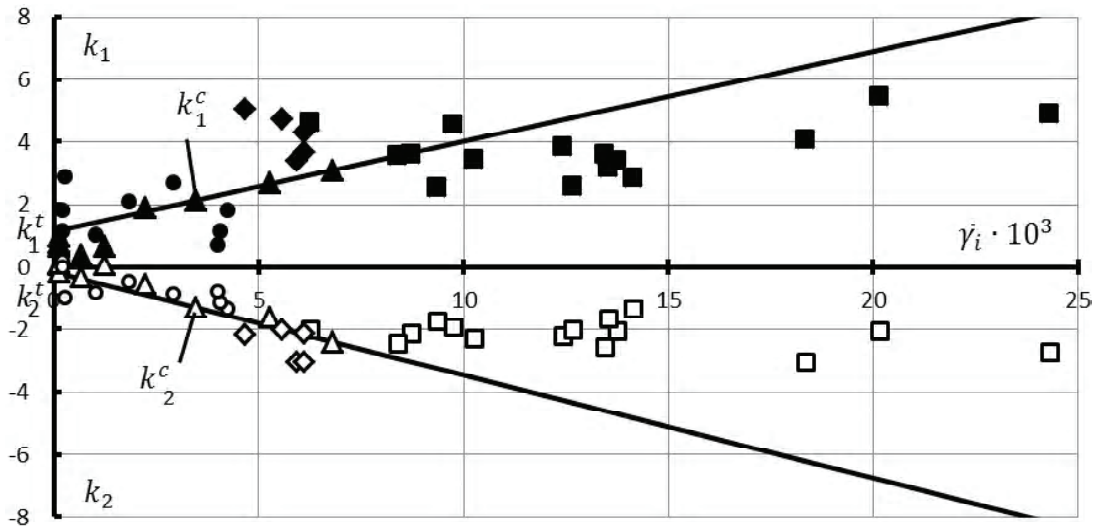
$\bar{\gamma}_i^c = 3,467 \cdot 10^{-3}$  – значение интенсивности деформаций сдвига, соответствующее вершине диаграммы в опытах на одноосное сжатие.

Численные значения функций  $k_1, k_2$  определены делением значений  $\theta_d$  и  $\theta_{pc}$  в вершинах диаграмм деформирования, полученных из опытов по выражениям (21), на расчетные величины по выражениям (22) и (26). Расчетные значения функций  $k_1, k_2$  представлены на рис. 7.

Выражения (27) являются общими и применимы для всех рассмотренных опытных данных. Расчетные параметры корректируются соответственно исходным характеристикам, принимаемым из испытаний на одноосное сжатие и растяжение. Значения коэффициентов по опытным данным А. В. Яшина [8, 11] требуют осторожного применения в связи с тем, что в испытаниях образцы не доведены до разрушения. Расчетные значения прочности приняты согласно критерию С. Ф. Клованича – Д. И. Безушко [2]. В опытных данных М. Tasuji [16] нет явного проявления деформаций дилатации и сжимаемости (рис. 2). Это выражается в отсутствии искривлений кривых объемных деформаций, что может быть следствием либо хрупкого разрушения, либо неточностей в измерениях деформаций при испытаниях образцов. Опытные данные М. Tasuji [16] демонстрируют меньшие величины модуля деформаций бетона по сравнению с бетонными образцами Н. Kupfer [13, 14], что должно обуславливать и большие по величине деформации дилатации и сдвигового уплотнения. Указанные несоответствия в опытных данных М. Tasuji [16] требуют осторожного их использования для тестирования деформационных моделей. Опытные данные S. Schröder [15] показали значительный разброс опытных кривых на рис. 4, что существенно затрудняет оценку составляющих деформаций сдвигового уплотнения и разуплотнения.

Для описания зависимости « $\tau_i - \gamma_i$ » в качестве исходного используется аналитическое выражение для описания диаграммы деформирования бетона, представленное в нормах [3, 12], которое в преобразованном виде может быть записано следующим образом:

$$\eta_\tau = \frac{\tau_i}{\bar{\tau}_i} = \frac{k \cdot \eta_\gamma - \eta_\gamma^2}{1 + (k - 2) \cdot \eta_\gamma}, \quad (29)$$



**Рисунок 7.** Значения функций  $k_1$  и  $k_2$  в вершинах диаграмм деформирования. Условные обозначения смотреть рис. 1 и 2.

где  $\tau_i$  и  $\bar{\tau}_i$  – соответственно, интенсивность касательных напряжений и ее предельное значение, определяемое из принятого условия прочности;  $\gamma_i$  и  $\bar{\gamma}_i$  – соответственно интенсивность деформаций сдвига и ее предельное значение, соответствующее деформациям в вершине диаграммы « $\tau_i - \gamma_i$ »;

Значение коэффициента  $k$  определяется из соотношения:

$$k = \frac{G_0}{\bar{G}} = G_0 \cdot \frac{\bar{\gamma}_i}{\bar{\tau}_i}, \quad (30)$$

где  $G_0$  и  $\bar{G}$  – соответственно значения начального модуля сдвига бетона и модуля его деформаций сдвига, соответствующего вершине диаграммы.

Уравнение (29) в преобразованном виде относительно уровня деформаций сдвига  $\eta_\gamma$  может быть записано следующим образом:

$$\eta_\gamma^2 + \eta_\gamma \cdot (\eta_\tau \cdot (k-2) - k) + \eta_\tau = 0. \quad (31)$$

Первый корень данного уравнения соответствует восходящей ветви, второй – нисходящей:

$$\bar{\gamma}_{n,2} = \frac{-((k-2)\eta_\tau - k) \pm \sqrt{((k-2)\eta_\tau - k)^2 - 4 \cdot \eta_\tau}}{2}. \quad (32)$$

Закономерности связи между предельными значениями интенсивности касательных напряжений  $\bar{\tau}_i$  и интенсивности деформаций сдвига  $\bar{\gamma}_i$  установлены с использованием опытных данных, представленных на рис. 8.

Опытные данные, представленные в виде значений  $\bar{\gamma}_i$  и  $\bar{\tau}_i$ , при одно-, двух- и трехосных растяжениях и сжатии с растяжением, находятся в диапазоне  $0 \leq \bar{\tau}_i / \bar{\tau}_c \leq 1$  и наложены на кривую изменения  $\bar{\gamma}_i$  и  $\bar{\tau}_i$  из эксперимента на одноосное сжатие (рис. 8б, 8в).

Используя уравнение (31), решенное относительно одноосного сжатия, и подставив уровень  $\bar{\tau}_i / \bar{\tau}_c$  соответственно искомому напряженному состоянию, можно определить предельные значения  $\bar{\gamma}_i$  в диапазоне  $0 \leq \bar{\tau}_i / \bar{\tau}_c \leq 1$ .

Параметры уравнения (31) в диапазоне  $0 \leq \bar{\tau}_i / \bar{\tau}_c \leq 1$  для нахождения  $\bar{\gamma}_i$  приобретут следующий вид:

$$k = G_0 \cdot \frac{\bar{\gamma}_c}{\bar{\tau}_c}; \quad \bar{\eta}_\tau = \frac{\bar{\tau}_i}{\bar{\tau}_c}, \quad (33)$$

где  $\bar{\gamma}_c$  и  $\bar{\tau}_c$  – соответственно предельная интенсивность деформаций сдвига и интенсивность касательных напряжений при одноосном сжатии.

В условиях двух- и трехосного сжатия при  $1 < \bar{\tau}_i / \bar{\tau}_c \leq \infty$  предельные значения  $\bar{\gamma}_i$  относительно  $\bar{\tau}_i$  определяется из следующих соотношений:

$$\bar{\gamma}_i = \tan(\alpha) \cdot (\bar{\tau}_i - \bar{\tau}_c) + \bar{\gamma}_c. \quad (34)$$

Значения параметра  $\tan(\alpha)$  в диапазоне  $1 < \bar{\tau}_i / \bar{\tau}_c \leq \infty$  определяется из соотношения:

$$\tan(\alpha) = \frac{\bar{\gamma}_{2c} - \bar{\gamma}_c}{\bar{\tau}_{2c} - \bar{\tau}_c}, \quad (35)$$

где  $\bar{\gamma}_{2c}$  и  $\bar{\tau}_{2c}$  – соответственно предельная интенсивность деформаций сдвига и интенсивность касательных напряжений при двухосном сжатии.

Значение параметра  $\tan(\alpha)$  для опытных данных Н. Купфер [13] составило 1,258.

Расчетные величины деформаций сдвига  $\gamma_i$ , определенные по выражениям (29) ÷ (35), сопоставлялись с опытными данными Н. Купфер [13] (рис. 9). Результаты сопоставления показали хорошее соответствие расчетных величин опытным данным для всех представленных видов напряженного состояния.

Сопоставление объемных деформаций дилатации  $\theta_d$  и уплотнения  $\theta_{pc}$ , рассчитанных по формулам (21) и (22, 26), представлено на рис. 10. При этом в формулы (22, 26) подставлены значения интенсивности деформаций сдвига  $\gamma_i$ , определенные по формулам (29) ÷ (35) с использованием в качестве исходных параметров экспериментальных данных из опытов на одноосное сжатие.

Разработанные предложения по усовершенствованию модифицированного варианта деформационной теории пластичности бетона [5] с помощью выражений (1) ÷ (18) позволили с достаточной точностью описать упруго-пластические деформации бетона, не связанные с разрушением его структуры. На базе уточняемой модели выполнен анализ закономерностей изменения интенсивности деформаций сдвига. Предложена методика ее описания с помощью выражений (29) ÷ (35) с корректировкой соответственно характеристикам деформирования при одноосном сжатии. Предложенная методика требует уточнения в части выражении (34) в области двух- и трехосного сжатия. За основу для количественной оценки деформаций уплотнения и разуплотнения приняты соотношения Г. А. Гениева [1] и Е. С. Лейтеса [7]. Модификация заключается в корректировке предложенного Е. С. Лейтесом [7] выражения для модуля дилатации (22) и в его применении для описания деформаций сдвигового уплотнения (26). Предложены корректирующие функции (27) к исходным вы-

ражениям с обеспечением их более близкого соответствия опытным кривым для всех видов напряженного состояния.

Предложенные выражения (1) ÷ (35) являются вариантом дальнейшего развития расчетной модели деформирования бетона [5]. Тестирование выполнено сопоставлением с опытными данными Н. Купфер [13] и представлено на рис. 11 ÷ 13. Получено хорошее соответствие расчетных величин опытным данным.

## Выводы

1. Разработана методика экспериментально-теоретического определения составляющих упруго-пластических и псевдопластических деформаций бетона для общего случая объемного напряженного состояния.
2. Предложены аналитические выражения для описания составляющих полных деформаций бетона: упруго-пластических деформаций, не связанных с разрушением его структуры, и псевдопластических деформаций, обусловленных процессами микро- и макротрещинообразования в структуре бетона.
3. Разработанный модифицированный вариант модели деформирования бетона построен на основе соединения решений, основанных на соотношениях механики твердого деформируемого тела и механики разрушения, реализуемой в приложении к бетону в виде модели сдвигоотрывного механизма разрушения его структуры по типу пространственно ориентированных «зигзаг-трещин».
4. Сопоставление расчетных величин деформаций бетона с опытными свидетельствует об их хорошем соответствии во всех областях плоского напряженного состояния.
5. Уточнение параметров расчетной модели обуславливает необходимость проведения дополнительных экспериментальных исследований деформаций бетона при одно-, двух- и трехосных напряженных состояниях по единообразной методике на сопоставимых по форме опытных образцах, на близких по структуре и прочности бетонах.



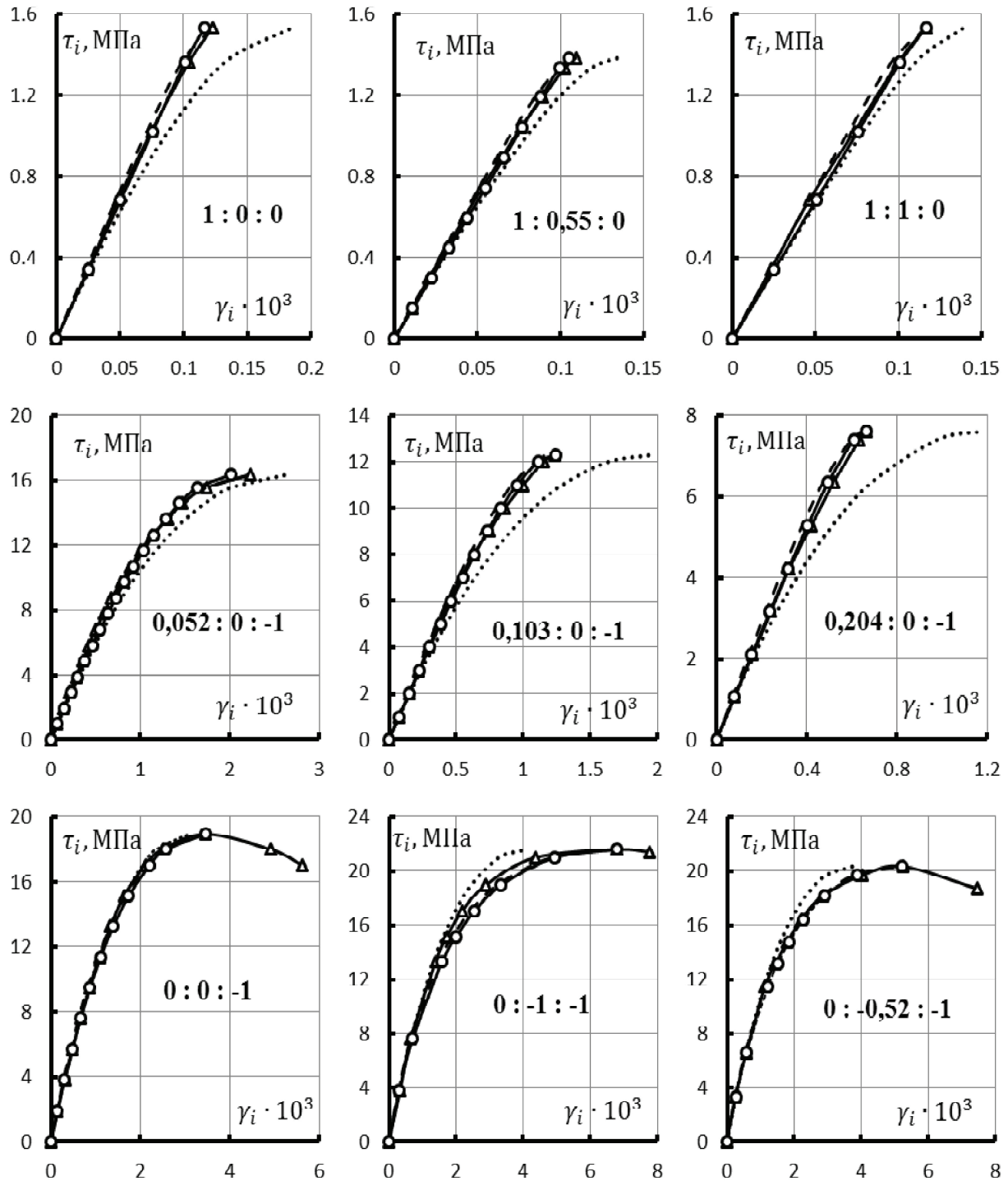


Рисунок 9. Зависимости « $\tau_i - \gamma_i$ » для различных областей плоского напряженного состояния.



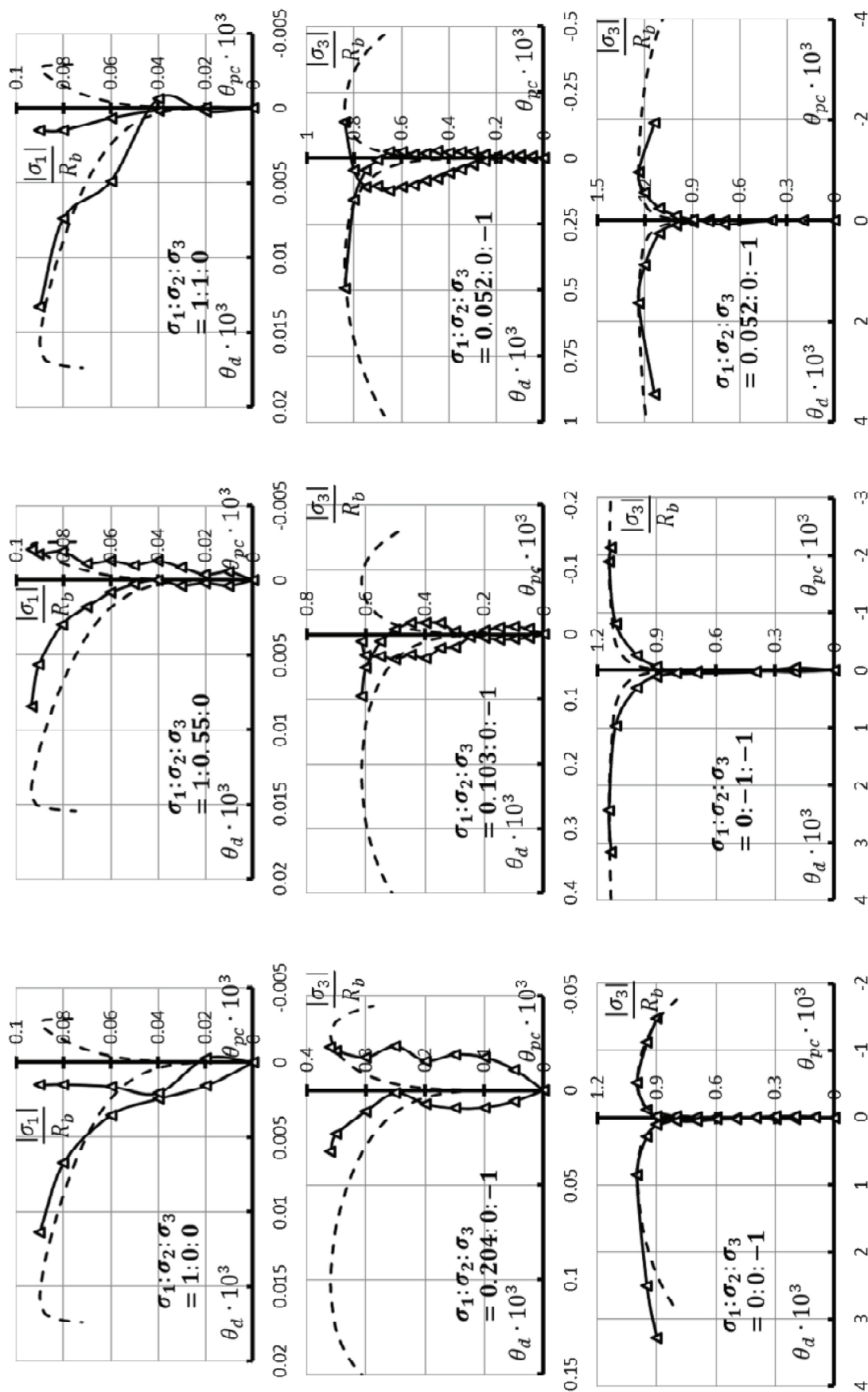
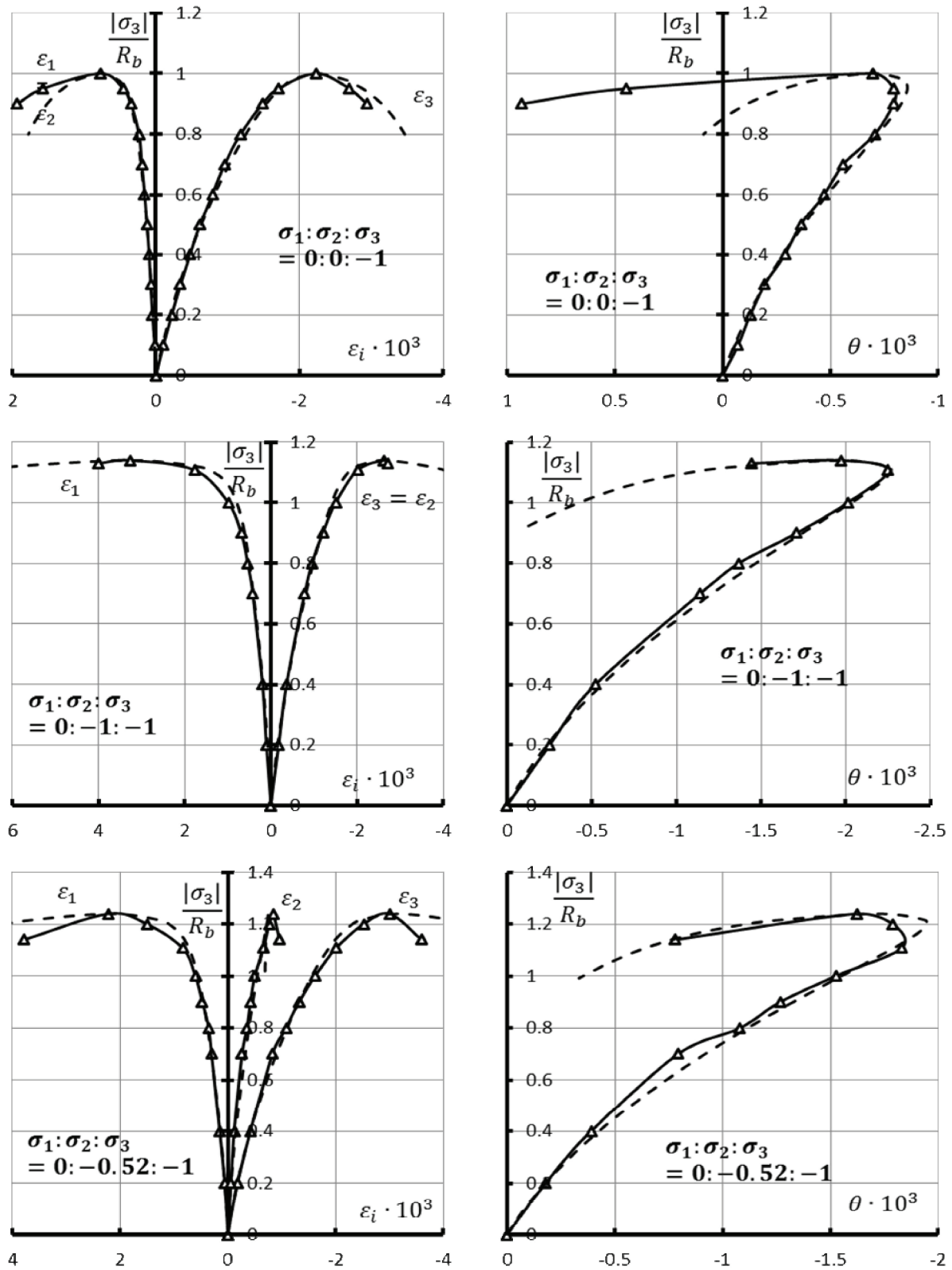
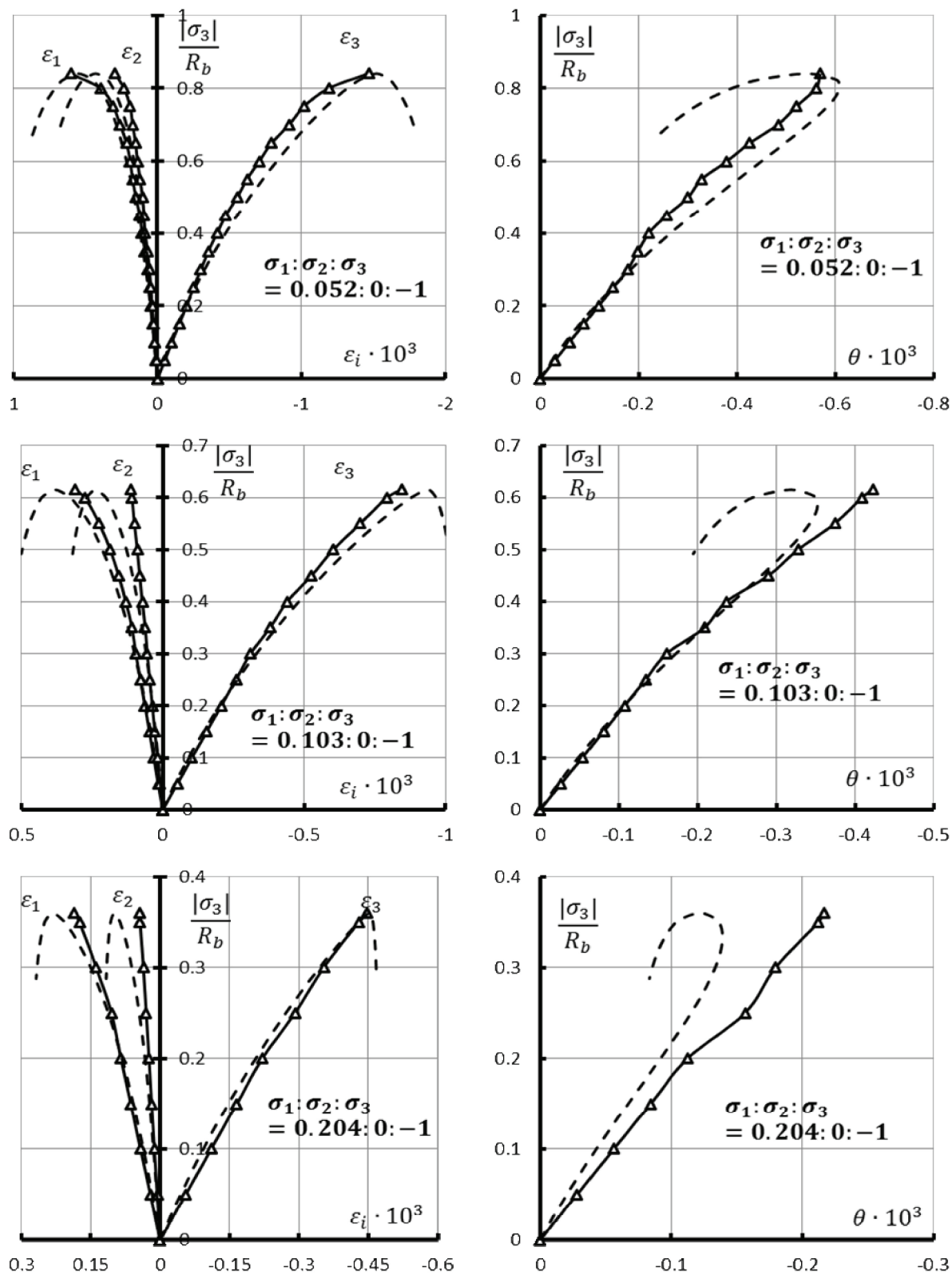


Рисунок 10. Сопоставления расчетных по формулам (22) и (26) величин объемных деформаций уплотнения  $\theta_{pc}$  и дилатации  $\theta_d$  с экспериментально-теоретическими значениями по формулам (21) из опытов Н. Курфег [13].



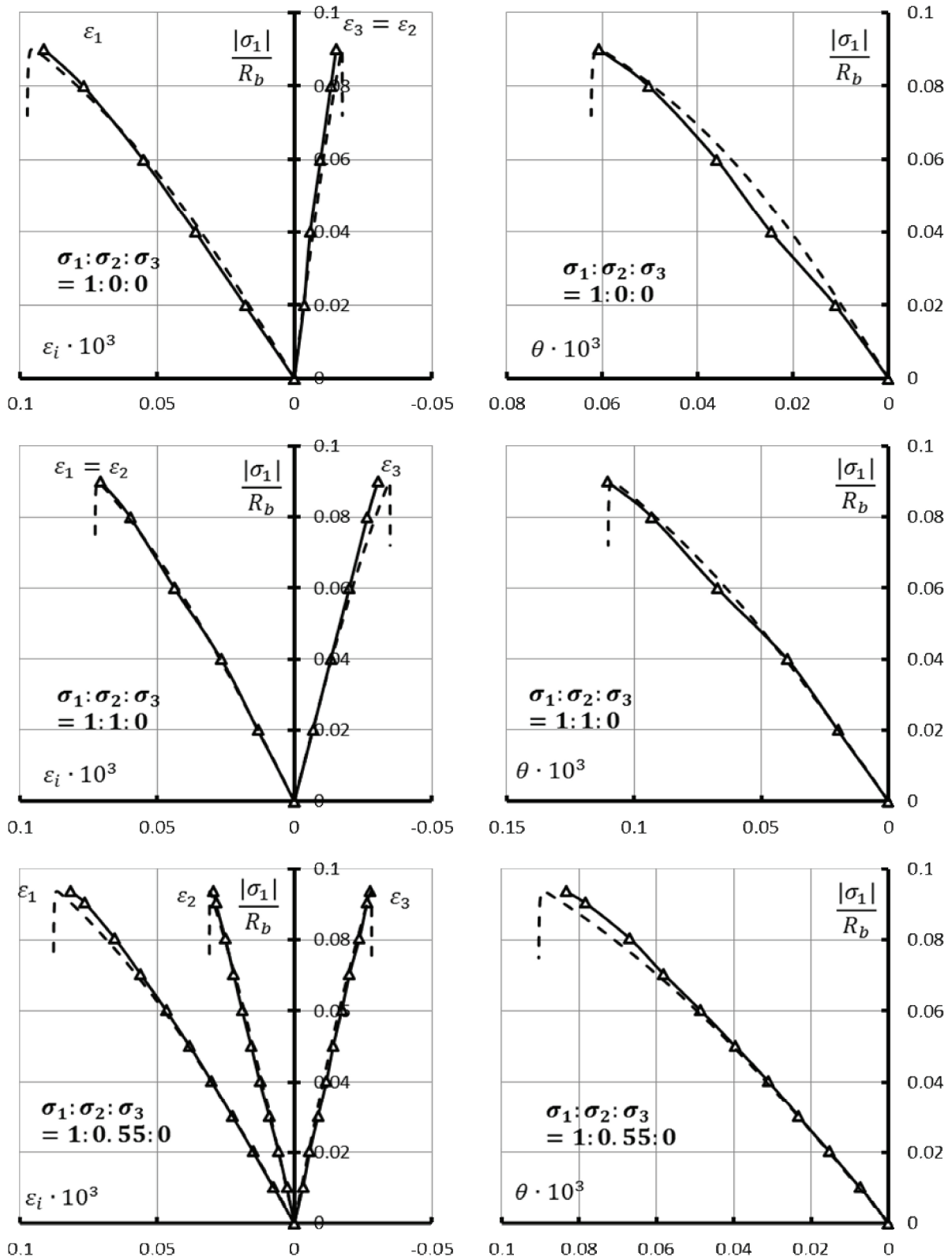
**Рисунок 11.** Опытные и расчетные диаграммы деформирования бетона в условиях одно- и двухосного сжатия. Опытные данные Н. Курфер [13].

----- – теоретические значения по выражениям (1)÷(35).



**Рисунок 12.** Опытные и расчетные диаграммы деформирования бетона в условиях сжатия с растяжением. Опытные данные Н. Курфер [13].

----- — теоретические значения по выражениям (1)÷(35).



**Рисунок 13.** Опытные и расчетные диаграммы деформирования бетона в условиях одно- и двухосного растяжения. Опытные данные Н. Купфер [13].

----- – теоретические значения по выражениям (1)÷(35).

## Литература

1. Гениев, Г. А. Теория пластичности бетона и железобетона [Текст] / Г. А. Гениев, В. Н. Киссюк, Г. А. Тюпин. – М. : Стройиздат, 1974. – 316 с.
2. Клованич, С. Ф. Численный эксперимент по исследованию деформационных теорий пластичности бетона [Текст] / С. Ф. Клованич, Д. И. Безушко // Вестник Одесской государственной академии строительства и архитектуры. – 2006. – Вып. 22. – С. 122–130.
3. Кодекс-образец ЕКБ-ФИП для норм по железобетонным конструкциям [Текст]. Т. II. Международная система объединенных технических норм по строительным конструкциям [Текст] / Евро международный комитет по бетону. – М. : НИИЖБ Госстроя СССР, 1984. – 284 с.
4. Корсун, В. И. Влияние температур от  $-50$  до  $+150$  °C на прочность и деформации тяжелого бетона при плоском напряженном состоянии [Текст] / В. И. Корсун, А. М. Баев // Новые технологические решения для строительной промышленности Донбасса : сборник научных трудов / Редакционная коллегия: Е. В. Горохов (отв. ред.) и др. – К. : УМВ ВО, 1989. – С. 129–136.
5. Корсун, В. И. К учету направленного развития микроразрушений в ортотропной модели бетона [Текст] / В. И. Корсун // Будівельні конструкції. – К. : НДІБК, 1999. – № 50. – С. 119–124.
6. Корсун, В. И. Напряженно-деформированное состояние железобетонных конструкций в условиях температурных воздействий [Текст] / В. И. Корсун. – Макеевка : ДонГАСА, 2004. – 153 с. – ISBN 966-7477-38-X.
7. Лейтес, Е. С. К построению теории деформирования бетона, учитывающей нисходящую ветвь диаграммы деформаций материала [Текст] / Е. С. Лейтес // Новые исследования элементов железобетонных конструкций при различных предельных состояниях / Научно-исследовательский институт бетона и железобетона. – М. : НИИЖБ Госстроя СССР, 1982. – С. 24–32.
8. Яшин, А. В. Рекомендации по определению прочностных и деформационных характеристик бетона при одноосных напряженных состояниях [Текст] / А. В. Яшин. – М. : НИИЖБ Госстроя СССР, 1985. – 72 с.
9. Филин, А. П. Прикладная механика твердого деформируемого тела [Текст]. Том 1 / А. П. Филин. – М. : Наука, 1975. – 832 с.
10. Яшин, А. В. Влияние сложного (непропорционального) нагружения на деформации и прочность бетона при трехосном сжатии [Текст] / А. В. Яшин, А. К. Кулманов // Поведение бетонов и элементов железобетонных конструкций при воздействиях различной длительности: сборник научных трудов / Под ред. А. А. Гвоздева и С. М. Крылова. – М. : НИИЖБ Госстроя СССР, 1980. – С. 4–17.
11. Яшин, А. В. Теория деформирования бетона при простом и сложном нагружениях [Текст] /

## References

1. Geniev, G. A.; Kissiuk, V. N.; Tiupin, G. A. Plasticity theory of concrete and reinforced concrete. Moscow: Stroizdat, 1974. 316 p. (in Russian)
2. Klovaniich, S. F.; Bezushko, D. I. Numerical experiment based on investigation of deformation plasticity theory of concrete. In: *Bulletin of the Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture*, 2006, Issue 22, p. 122–130. (in Russian)
3. Euro international committee according to concrete. Code-example FIB for reinforced concrete constructions standards. International System of combined engineering standards according to building constructions. Moscow: NIIZhB State Committee USSR, 1984. 284 p. (in Russian)
4. Korsun, V. I.; Baev, A. M. The influence of temperature from  $-50$  to  $+150$  °C on strength and deformation of heavy concrete under plane stress. In: *Innovation for construction engineering sector of Donbass: Edited Volume / Edited by Gorokhov, Ye. V. et al.* Kyiv: UMV VO, 1989, p. 129–136. (in Russian)
5. Korsun, V. I. To accounting of directed development of microlysis into orthotropic model of concrete. In: *Engineering constructions*, Kyiv: NDIBK, 1999, Number 50, p. 119–124. (in Russian)
6. Korsun, V. I. Stressed-Strained State of Reinforced Concrete Structures in Conditions of Temperature Effects. Makeyevka: DonSACEA, 2004. 153 p. ISBN 966-7477-38-X. (in Russian)
7. Leites, E. S. To the development of theory of concrete straining, taking into account downleg of strain diagram of material. In: *Advanced researches of units of reinforced concrete constructions in the process of different extreme limit state / Research Studies Institute of concrete and reinforced concrete*. Moscow: NIIZhB State Committee USSR, 1982, p. 24–32. (in Russian)
8. Yashin, A. V. Guidelines for determination of strength and strain characteristic of concrete in the process of stress state. Moscow: NIIZhB State Committee USSR, 1985. 72 p. (in Russian)
9. Filin, A. P. Applied mechanics of hard and deformable body. Volume 1. Moscow: Science, 1975. 832 p. (in Russian)
10. Yashin, A. V.; Kulmanov, A. K. The influence of complex (disproportionate) loading on deformation and strength concrete in the process of triaxial compression. In: *Concrete behavior on exposure to different period: Edited Volume / Edited by Gvozdev, A. A.; Krylov, S. M.* Moscow: NIIZhB State Committee USSR, 1980. p. 4–17. (in Russian)
11. Yashin, A. V. The theory of concrete deformation in the process of simple and complex loading. In: *Concrete and reinforced concrete*, 1986, Number 8, p. 39–42. (in Russian)
12. EN 1992-1:2001 (Final Draft, April, 2002) Eurocode-2: Design of Concrete Structures – Part 1: General Rules for Building. Brussels: [CEN], 2002. 230 p.
13. Kupfer, H. Das Verhalten des Betons unter zweiachsiger Beanspruchung. In: *Wissenschaftliche Zeitsch-*

- А. В. Яшин // Бетон и железобетон. – 1986. – № 8. – С. 39–42.
12. EN 1992-1:2001 (Final Draft, April, 2002) Eurocode-2: Design of Concrete Structures – Part 1: General Rules for Building [Текст]. – Brussels : [CEN], 2002. – 230 p.
  13. Kupfer, H. Das Verhalten des Betons unter zweiachsiger Beanspruchung [Текст] / H. Kupfer // Wissenschaftliche Zeitschrift der Technischen Universität. – Dresden, 1968. – № H.6. – P. 1515–1518.
  14. Kupfer, H. Behavior of Concrete Under Biaxial Stress [Текст] / H. Kupfer // ACI Journal. – 1969. – Vol. 66, № 8. – P. 656–666.
  15. Schröder, S. Festigkeit und Verformungseigenschaften des Betons bei zweiachsiger Druckbeanspruchung [Текст] / S. Schröder, H. Opitz // Bauplanung Bautechnik. – 1968. – 22, Jg. Heft 4. – S. 190–196.
  16. Tasuji, M. E. Stress-strain response and fracture of concrete in biaxial loading [Текст] / M. E. Tasuji, F. O. Slate, A. H. Nilson // ACI Journal. – 1978. – V. 75, № 7. – P. 306–312.
- rift der Technischen Universität, Dresden, 1968, № H.6, p. 1515–1518.
14. Kupfer, H. Behavior of Concrete Under Biaxial Stress. In: *ACI Journal*, 1969, Vol. 66, № 8, p. 656–666.
  15. Schröder, S.; Opitz, H. Festigkeit und Verformungseigenschaften des Betons bei zweiachsiger Druckbeanspruchung. In: *Bauplanung Bautechnik*, 1968, 22, Jg. Heft 4, s. 190–196.
  16. Tasuji, M. E.; Slate, F. O.; Nilson, A. H. Stress-strain response and fracture of concrete in biaxial loading. In: *ACI Journal*, 1978, V. 75, № 7, p. 306–312.

**Корсун Володимир Іванович** – доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри залізобетонних конструкцій Донбаської національної академії будівництва і архітектури. Наукові інтереси: розробка методів розрахунку залізобетонних конструкцій для загального випадку об'ємного напруженого стану з урахуванням силових і температурно-вологісних впливів різної тривалості.

**Недорезов Андрій Володимирович** – асистент кафедри залізобетонних конструкцій Донбаської національної академії будівництва і архітектури. Наукові інтереси: експериментальні дослідження процесів деформування і руйнування бетону в умовах складних напружених станів.

**Корсун Владимир Иванович** – доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой железобетонных конструкций Донбасской национальной академии строительства и архитектуры. Научные интересы: разработка методов расчета железобетонных конструкций для общего случая объемного напряженного состояния с учетом силовых и температурно-влажностных воздействий различной длительности.

**Недорезов Андрей Владимирович** – ассистент кафедры железобетонных конструкций Донбасской национальной академии строительства и архитектуры. Научные интересы: экспериментальные исследования процессов деформирования и разрушения бетона при сложных напряженных состояниях.

**Korsun Volodymyr** – Dr.Sc., Professor, Head of the Reinforced Concrete Structures Department of Donbas National Academy of Civil Engineering and Architecture. Research interests: development of analysis for general case of three dimensional stress reinforced concrete structures taking into account the temperature and moisture effects of different duration.

**Niedoriezov Andrii** – assistant of the Reinforced Concrete Structures Department of Donbas National Academy of Civil Engineering and Architecture. Research interests: experimental studies of concrete deformation and fracture under complex stress states.