



## ЩОДО ВИЗНАЧЕННЯ ВИМУШЕНИХ КОЛИВАНЬ ГНУЧКОГО ПЛИТНОГО ФУНДАМЕНТУ НА ПРУЖНІЙ ОСНОВІ ВІНКЛЕРА-ФУССА ЗА УМОВИ РОЗТАШУВАННЯ НА НЬОМУ ТОЧКОВОЇ МАСИ

**В. Г. Шаповал<sup>1</sup>, С. Л. Прошин<sup>2</sup>**

*ДВНЗ «Національний гірничий університет»,  
19, пр. Карла Маркса, м. Дніпропетровськ, Україна, 49600.  
E-mail: <sup>1</sup>shap-ww@mail.ru, <sup>2</sup>stanislavproshyn@gmail.com.*

*Отримана 22 травня 2014; прийнята 21 листопада 2014.*

**Анотація.** При вирішенні практичних задач проектування будівель і споруд, зведених на суцільному плитному фундаменті, часто постає необхідність врахування динамічного впливу розташованого на ньому обладнання на несучі конструкції. В зв'язку з цим існує проблема визначення амплітуд та форм вимушених коливань плитних фундаментів машин та механізмів. Цій проблемі присвячені матеріали, викладені в даній роботі. Виконано аналіз рішень, що описують вимушені коливання плит під дією динамічного навантаження. За основу досліджень взята залежність переміщень гладкої плити у часі з урахуванням пружних властивостей основи, описуваних з використанням коефіцієнта постелі, а також з урахуванням маси, прикладеної у центрі плити. Вирішення диференціальних рівнянь і визначення прогину плити виконано з використанням спеціальних функцій, а саме дельта-функції Дірака і функції Беселя першого роду з нульовим індексом. В результаті отримано вираз для визначення амплітуд коливань і, відповідно, прогину плити у рамках задачі пружної основи Вінклера-Фуса і прикладеної до плити маси. Рішення представляє собою залежність прогину від координати та часу. При цьому видно, що форма коливань залежить від параметрів плити, а саме її товщини і щільності, частоти динамічного навантаження і характеристик основи.

**Ключові слова:** вимушені стаціонарні коливання, фундаменти під машини та обладнання, комбіновані масивно-плитні фундаменти, напружено-деформований стан нескінченної плити.

## К ВОПРОСУ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ ГИБКОГО ПЛИТНОГО ФУНДАМЕНТА НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ ВИНКЛЕРА-ФУССА С УЧЕТОМ РАСПОЛОЖЕННОЙ НА НЕМ ТОЧЕЧНОЙ МАССОЙ

**В. Г. Шаповал<sup>1</sup>, С. Л. Прошин<sup>2</sup>**

*ГВУЗ «Національний горний університет»,  
19, пр. Карла Маркса, г. Днепропетровск, Украина, 49600.  
E-mail: <sup>1</sup>shap-ww@mail.ru, <sup>2</sup>stanislavproshyn@gmail.com.*

*Получена 22 мая 2014; принята 21 ноября 2014.*

**Аннотация.** При решении практических задач проектирования зданий и сооружений, возведенных на сплошном плитном фундаменте, часто возникает необходимость учета динамического воздействия расположенного на нем оборудования на несущие конструкции. В связи с этим имеет место проблема определения амплитуд и форм вынужденных колебаний плитных фундаментов машин и механизмов. Этой проблеме посвящены материалы, изложенные в данной работе. Выполнен анализ решений, описывающих вынужденные колебания плит под действием динамической нагрузки. За основу

исследований была взята зависимость перемещений гладкой плиты от времени с учетом упругих свойств основания, описываемых с использованием коэффициента постели, а также с учетом массы, приложенной в центре плиты. Решение дифференциальных уравнений и определение прогиба плиты выполнено с использованием специальных функций, в частности дельта-функции Дирака и функции Бесселя первого рода с нулевым индексом. В результате получено выражение для определения амплитуд колебаний и, соответственно, прогиба плиты в рамках рассматриваемой задачи упругого основания Винклера-Фусса и приложенной к плите массы. Решение представляет собой зависимость прогиба от координаты и времени. При этом видно, что форма колебаний зависит от параметров плиты, а именно ее толщины и плотности, частоты динамической нагрузки и свойств основания.

**Ключевые слова:** вынужденные стационарные колебания, фундаменты под машины и оборудование, комбинированные массивно-плитные фундаменты, напряженно-деформированное состояние бесконечной плиты.

## ON THE DETERMINATION OF THE FORCED VIBRATIONS OF FLEXIBLE SLAB FOUNDATION SUBJECTED TO A POINT MASS ON AN ELASTIC WINKLER-FUSS FOUNDATION

Volodymyr Shapoval<sup>1</sup>, Stanislav Proshyn<sup>2</sup>

*State Institution of Higher Education «National Mining University»,*

*19, Karl Marx Av., Dnipropetrovsk, Ukraine, 49600.*

*E-mail: <sup>1</sup>shap-wv@mail.ru, <sup>2</sup>stanislavproshyn@gmail.com.*

*Received 22 May 2014; accepted 21 November 2014.*

**Abstract.** While solving the practical problems of designing buildings and structures erected on a solid slab foundation, often there is necessity to consider the dynamic effects on the supporting structures of equipment located on the foundation. Therefore, there is a problem of determining the amplitudes and shapes of forced oscillations of slab foundation under machinery. Materials contained in this paper are dedicated to this issue. The analysis of the solutions describing forced oscillations of plates under dynamic loading is performed. As a base of studies dependence of the displacements of smooth plate on time is taken, considering elastic properties of the base described using the coefficient of the bed, as well as the weight applied at the center of the plate. Differential equations and determination of the deflection of the plate is realized using special functions, in particular, the Dirac delta function and the Bessel function of zero index. As a result, the expression for determining the vibration amplitudes and, thus, plate deflections in the framework of the problem of the elastic foundation of Winkler-Fuss and applied to the plate weight is obtained. The solution is described as the dependence of the deflections on coordinate and time. Thus, it is seen that the waveform of the plate depends on the parameters of the plate, namely, the thickness and density, as well as frequency of dynamic load and characteristics of a base.

**Keywords:** forced stationary vibrations, foundations for machinery and equipment, combined massive-slab foundations, an infinite plate stress-strain state.

### Введение

В промышленном строительстве широкое применение получили массивные фундаменты под машины с динамическими нагрузками из-за универсальности и простоты.

Вместе с тем такие фундаменты отличаются высокой материалоемкостью и далеко не лучшей способностью к восприятию динамических нагрузок.

Наиболее эффективными с точки зрения динамики являются плитные фундаменты под машины. Однако плиты обладают повышенной деформативностью. Это не удовлетворяет ряду технологических требований при монтаже машин, а ограничение размеров в плане не позволяет полностью реализовать их преимущества. Поэтому плитные фундаменты и не столько распространены.

В настоящее время появились новые конструкции фундаментов, а именно массивно-плитные фундаменты, конструктивное решение которых позволяет использовать все преимущества плитных фундаментов, в особенности как фундаментов под машины и оборудование [1]. Расчет таких конструкций требует определения амплитудно-частотных характеристик колебаний фундаментной плиты.

Анализ последних исследований и публикаций показал, что решение проблемы расчета фундаментной плиты сводится к решению задачи о вынужденных стационарных колебаниях бесконечной плиты. Решение данной задачи, полученное в работе [1], содержит в себе некоторые неточности, нашедшие частичное решение в работе [2]. Однако проблема расчета находящихся под динамической нагрузкой массивно-плитных фундаментов под машины и оборудование остается актуальной и требует своего решения.

**Основная часть.**

*Постановка задачи исследований*

Цель исследований – аналитическое решение задачи о вынужденных стационарных колебаниях и вывод формул для определения прогибов бесконечной плиты на упругом основании Винклера-Фусса с учетом расположенной на ней точечной массы.

Задача исследований была сформулирована следующим образом. Упругие свойства грунтового основания описываются с использованием коэффициента постели  $C$ . Плита неограниченных размеров имеет толщину  $h$ , а плотность ее материала равна  $\rho$ . В центре плиты приложена вертикальная сосредоточенная сила  $P$ , которая совершает гармонические колебания с частотой  $\omega$ , и масса  $M$ . Требуется определить зависимость амплитуды вынужденных колебаний плиты  $W$  в точке с координатой  $r$  от времени  $t$ .

*Изложение основного материала исследования*

Согласно [3, 5, 6] зависимость перемещения гладкой плиты с расположенной в ее центре массой  $M$  от времени  $t$  в точке с координатой  $r$  в полярной системе координат имеет вид:

$$D\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1d}{rdr}\right)^2 W + CW + \rho h \frac{d^2 W}{dt^2} = P \frac{\delta(r)}{2\pi r} \cdot e^{i\omega t} - M \frac{\delta(r)}{2\pi r} \cdot \frac{d^2}{dt^2} W_0. \tag{1}$$

Здесь  $\delta(r)$  – дельта-функция Дирака [3]. Решение дифференциального уравнения (1) для нахождения прогиба плиты  $W$  ищем в виде:

$$W = e^{i\alpha r} \int_0^\infty A(\alpha) \cdot J_0(\alpha \cdot r) \cdot \alpha \cdot d\alpha, \tag{2}$$

где  $A(\alpha)$  – подлежащая определению функция параметра  $\alpha$ , а  $J_0(\alpha \cdot r)$  функция Бесселя первого рода с нулевым индексом [3].

Запишем выражение (1) в виде:

$$D\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1d}{rdr}\right)^2 W + CW - \omega^2 \rho h W = P \frac{\delta(r)}{2\pi r} + \omega^2 \cdot M \frac{\delta(r)}{2\pi r} W_0. \tag{3}$$

С учетом (2), рассмотрим составляющие правой части выражения (3):

$$\left. \begin{aligned} P \frac{\delta(r)}{2\pi r} &= \frac{P}{2\pi} \int_0^\infty \alpha \cdot J_0(\alpha \cdot r) d\alpha \\ \omega^2 M \frac{\delta(r)}{2\pi r} W_0 &= \omega^2 M \frac{W_0}{2\pi} \int_0^\infty \alpha \cdot J_0(\alpha \cdot r) d\alpha \end{aligned} \right\}. \tag{4}$$

Подставим (4) в (3) и получим:

$$\int_0^\infty \left\{ (D\alpha^4 + C - h\rho\omega^2) A(\alpha) - \frac{P - W_0 M \omega^2}{2\pi} \alpha \right\} \times J_0(\alpha \cdot r) d\alpha = 0. \tag{5}$$

Из (5) необходимо выразить искомую функцию  $A(\alpha)$ . Тогда получим:

$$A(\alpha) = \frac{P - W_0 M \omega^2}{2\pi} \alpha \cdot \frac{1}{D\alpha^4 + C - h\rho\omega^2}. \tag{6}$$

Подставив (6) в (2), получим выражение:

$$W(r) = \frac{P - W_0 M \omega^2}{2\pi} \int_0^\infty \frac{\alpha J_0(\alpha \cdot r) d\alpha}{D\alpha^4 + C - h\rho\omega^2}. \tag{7}$$

Найдем предел выражения (7) при  $r=0$ :

$$\lim_{r=0} W(r) = \frac{P - W_0 M \omega^2}{2\pi} \int_0^\infty \frac{\alpha d\alpha}{D\alpha^4 + C - h\rho\omega^2}. \tag{8}$$

Тогда выражение прогиба в точке  $r=0$  имеет вид:

$$W_0 = \frac{P - W_0 M \omega^2}{2\pi} \int_0^\infty \frac{\alpha J_0(\alpha \cdot r) d\alpha}{D \alpha^4 + C - h \rho \omega^2}. \quad (9)$$

Обозначим

$$\int_0^\infty \frac{\alpha J_0(\alpha \cdot r) d\alpha}{D \alpha^4 + C - h \rho \omega^2} = I, \quad (10)$$

при этом  $J_0(\alpha \cdot r) = 1$ .

Подставив (10) в (9), получим

$$W_0 = \frac{P - W_0 M \omega^2}{2\pi} \cdot I. \quad (11)$$

Приведем выражение (11) к виду

$$W_0 = \frac{P}{1 + \frac{M \omega^2}{2\pi} \cdot I}. \quad (12)$$

Далее найдем решение интеграла (10):

$$\begin{aligned} I &= \int_0^\infty \frac{\alpha d\alpha}{D \alpha^4 + C - h \rho \omega^2} = \\ &= \frac{1}{D} \int_0^\infty \frac{\alpha d\alpha}{\alpha^4 + \frac{C - h \rho \omega^2}{D}} = \\ &= \frac{1}{D} \int_0^\infty \frac{\alpha d\alpha}{\alpha^4 + a^4} = \frac{1}{D} \cdot \frac{\pi}{4a^2}, \end{aligned} \quad (13)$$

где

$$a = \sqrt[4]{\frac{C - h \rho \omega^2}{D}}. \quad (14)$$

Подставив (13) в (11), получим

$$W_0 = \frac{P - W_0 M \omega^2}{2\pi} \cdot \frac{\pi}{4Da^2}. \quad (15)$$

Преобразуя выражение (15) получим

$$W_0 = \frac{P}{2\pi \left(1 + \frac{M \omega^2}{8Da^2}\right)} = \frac{8PDa^2}{2\pi(8Da^2 + M \omega^2)}. \quad (16)$$

## Литература

1. Киричек, Ю. А. Комбинированные массивно-плитные фундаменты [Текст] / Ю. А. Киричек. – Днепропетровск : ПГАСА, 2001. – 207 с.

Подставим полученное выражение (16) в (7). Тогда

$$W(r) = \frac{P}{2\pi D} \left(1 - \frac{8Da^2}{8Da^2 + M \omega^2}\right) \int_0^\infty \frac{\alpha J_0(\alpha \cdot r) d\alpha}{\alpha^4 + a^4}. \quad (17)$$

Положим

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \frac{\zeta}{r}; & \zeta &= \alpha r \\ d\alpha &= \frac{d\zeta}{dr} \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

и подставим (18) в (17)

$$W(r) = \frac{P \cdot r^4}{2\pi D} \left(1 - \frac{8Da^2}{8Da^2 + M \omega^2}\right) \int_0^\infty \frac{\zeta J_0(\zeta)}{\zeta^4 + a^4 r^4} d\zeta. \quad (19)$$

Обозначим

$$a_1 = a \cdot r^4, \quad (20)$$

тогда

$$W^* = \frac{2\pi DW}{\left(1 - \frac{8Da^2}{8Da^2 + M \omega^2}\right)} = \int_0^\infty \frac{\zeta J_0(\zeta)}{\zeta^4 + a_1^4} d\zeta. \quad (21)$$

Выражение (19) представляет собой искомую зависимость прогиба плиты от координаты и времени, тогда как выражение (21) есть зависимость относительного прогиба от параметра  $a$ , где  $a$  определяется выражением (14).

## Выводы

Таким образом, в ходе исследований, проведенных в настоящей работе, было получено аналитическое решение о вынужденных стационарных колебаниях гладкой бесконечной плиты с расположенной на ней точечной массой, представляющее собой зависимость амплитуды данных колебаний  $W$  в точке с координатой  $r$  от времени  $t$ .

## References

1. Kirichek, Yu. A. Combined massively foundation slab. Dnepropetrovsk: PSASEA, 2001. 207 p. (in Russian)

2. Шаповал, В. Г. Вынужденные колебания бесконечной плиты на основании Винклера-Фусса [Текст] / В. Г. Шаповал, Е. В. Нестерова, Н. Н. Рубан // Збірник наукових праць [Полтавського національного технічного університету ім. Ю. Кондратюка]. Сер. : Галузеве машинобудування, будівництво. – 2012. – Вип. 4(1). – С. 302–307.
3. Корн, Г. Справочник по математике [Текст] / Г. Корн, Т. Корн. – М. : Наука, 1974. – 840 с.
4. Владимиров, В. С. Обобщенные функции в математической физике [Текст] / В. С. Владимиров. – М. : Наука, 1979. – 320 с.
5. Власов, В. З. Балки, плиты и оболочки на упругом основании [Текст] / В. З. Власов, Н. Н. Леонтьев. – М. : Физматгиз, 1960. – 491 с.
6. Тимошенко, С. П. Пластины и оболочки [Текст] / С. П. Тимошенко, С. Войновский-Кригер. – М. : Наука, 1966. – 636 с.
7. ДБН В.2.1-10-2009. Основи та фундаменти споруд. Основні положення проектування [Текст]. – Введено вперше зі скасуванням на території України СНиП 2.02.01-83 ; чинні від 2009–07–01. – Київ : Мінрегіонбуд України, 2009. – 104 с.
8. ДБН В.1.2-2:2006. Система забезпечення надійності та безпеки будівельних об'єктів. Навантаження і впливи. Норми проектування [Текст]. – Замість СНиП 2.01.07-85 ; надано чинності 2007–01–01. – К. : Мінбуд України, 2006. – 61 с. – (Державні будівельні норми).
9. Гольдштейн, М. Н. Механика грунтов, основания и фундаменты [Текст] : Учебник для вузов ж.-д. трансп. / М. Н. Гольдштейн, А. А. Царьков, И. И. Черкасов. – М. : Транспорт, 1981. – 320 с.
10. Механика грунтов [Текст] : Учебник / В. Г. Шаповал, В. Л. Седин, А. В. Шаповал [и др.]. – Днепропетровск : Пороги, 2010. – 168 с.
11. Механика грунтов, основания и фундаменты [Текст] : учеб. пособие для студентов вузов, обучающихся по специальности «Промышленное и гражданское строительство» / С. Б. Ухов, В. В. Семенов, В. В. Знаменский [и др.] ; ред. С. Б. Ухов. – М. : Изд. АСВ, 1994. – 527 с. – ISBN 5-87829-003-0.
2. Shapoval, V. G.; Nesterova, E. V.; Ruban, N. N. Forced vibration of infinite plate on the Winkler-Fuss base. In: *Edited Volume (Yury Kondratyuk Poltava National Technical University). Series: Machine industry, civil engineering*, 2012, Issue 4(1), p. 302–307. (in Russian)
3. Korn, G.; Korn, T. Reference book on Mathematics. Moscow: Science, 1974. 840 p. (in Russian)
4. Vladimirov, V. S. Generalized functions at mathematical physics. Moscow: Science, 1979. 320 p. (in Russian)
5. Vlasov, V. Z.; Leontev, N. N. Beams, slabs and shells with elastic foundations. Moscow: Fizmatgiz, 1960. 491 p. (in Russian)
6. Timoshenko, S. P.; Voinovskii-Kruger, S. Slabs and shells. Moscow: Science, 1966. 636 p. (in Russian)
7. ДБН В.2.1-10-2009. Basis and foundations of constructions. General principles of designing. Kyiv: Ministry of Regional Development of Ukraine, 2009. 104 p. (in Ukrainian)
8. ДБН В.1.2-2:2006. National Structural Rules and Regulations. The system of reliability and safety provision of constructional projects. Loads and effects. Kyiv: Ministry of Regional Development of Ukraine, 2006. 61 p. (in Ukrainian)
9. Goldshtein, M. N.; Tsarkov, A. A.; Cherkasov, I. I. Soil engineering, basis and foundations. Textbook for Institutes of Railway Service. Moscow: Transport, 1981. 320 p. (in Russian)
10. Shapoval, V. G.; Sedin, V. L.; Shapoval, A. V.; Morklianiuk B. V.; Andreev, V. S. Soil engineering. Textbook. Dnepropetrovsk: Thresholds, 2010. 168 p. (in Russian)
11. Uhov, S. B. (Ed.); Semenov, V. V.; Znamenskii, V. V. et al. Soil engineering, basis and foundations. Textbook for students of Institutes, studying the speciality «Industrial and civil construction». Moscow: ASV, 1994. 527 p. ISBN 5-87829-003-0. (in Russian)

**Шаповал Володимир Григорович** – доктор технічних наук, професор кафедри будівництва та геомеханіки Національного гірничого університету, дійсний член Академії будівництва України, член президії Українського товариства геомеханіки, іноземний член Російського товариства з механіки ґрунтів, геотехніки і фундаментобудування. Наукові інтереси: реологія та нелінійна механіка ґрунтів.

**Прошин Станіслав Леонідович** – аспірант кафедри будівництва та геомеханіки Національного гірничого університету. Наукові інтереси: дослідження поведінки основ і фундаментів при динамічному навантаженні.

**Шаповал Владимир Григорьевич** – доктор технических наук, профессор кафедры строительства и геомеханики Национального горного университета, действительный член Академии строительства Украины, член президиума Украинского общества геомеханики, иностранный член Российского общества по механике грунтов, геотехнике и фундаментостроению. Научные интересы: реология и нелинейная механика грунтов.

**Прошин Станислав Леонидович** – аспирант кафедры строительства и геомеханики Национального горного университета. Научные интересы: исследование поведения оснований и фундаментов при динамической нагрузке.

**Shapoval Vladimir** – D.Sc. in Engineering Sciences, professor; Construction and Geomechanics Department, National Mining University, member of the Academy of Construction of Ukraine, member of the Presidium of the Ukrainian Society of geomechanics, a foreign member of the Russian Society for Soil Mechanics, Geotechnics and Foundation. Research interests: rheology and nonlinear soil mechanics.

**Proshyn Stanislav** – postgraduate student; Department of Construction and Geomechanics, National Mining University. Scientific research: the study of the behavior of footings and foundations under dynamic load.