



РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ МКЭ МЕТОДОМ НЬЮТОНА – ПВР

А. А. Петраков¹, Н. А. Петракова², М. Д. Панасюк³

ГОУ ВПО «Донбасская национальная академия строительства и архитектуры»,
2, ул. Державина, г. Макеевка, ДНР, 86123.

E-mail: ¹niisdon@rambler.ru, ²nata_petrakova@mail.ru, ³m.rabota89@mail.ru

Получена 20 апреля 2017; принята 05 мая 2017.

Аннотация. В настоящей работе излагаются новые методы решения нелинейных задач строительной механики с использованием расчетных моделей МКЭ. К этим методам относятся: уравнения пластического состояния, основанные на гипотезах теории пластического течения, представленные в замкнутой аналитической форме; метод решения систем нелинейных уравнений равновесия МКЭ в форме многошаговых итераций Ньютона – ПВР. Приведены результаты апробации ИПК «PANAMA» на примере расчета грунтового массива. Рассмотрены варианты загрузки грунтового массива через абсолютно гибкий и абсолютно жесткий штамп. Для абсолютно жесткого штампа нагружения осуществлялись в виде вынужденных перемещений. Для абсолютно гибкого штампа рассмотрены переменные нагружения с полной разгрузкой и повторным нагружением. Выполнено сопоставление осадок абсолютно гибкого и абсолютно жесткого фундаментов. Приведены сопоставительные результаты расчетов с использованием ИПК «PANAMA» и ПК «ЛИРА».

Ключевые слова: грунтовый массив, гипотеза пластического течения, осадки, траектория нагружения, гибкие фундаменты.

РОЗВ'ЯЗАННЯ НЕЛІНІЙНИХ ЗАДАЧ МЕТОДОМ НЬЮТОНА – ПВР

О. О. Петраков¹, Н. О. Петракова², М. Д. Панасюк³

ДОНУ ВПО «Донбаська національна академія будівництва і архітектури»,
2, вул. Державіна, м. Макіївка, ДНР, 86123.

E-mail: ¹niisdon@rambler.ru, ²nata_petrakova@mail.ru, ³m.rabota89@mail.ru

Отримана 20 квітня 2017; прийнята 05 травня 2017.

Анотація. Наведено нові методи розв'язання нелінійних задач будівельної механіки з використанням розрахункових моделей МГЕ. До цих методів належать: рівняння пластичного стану, засновані на гіпотезах теорії пластичної течії, представлені в замкнутій аналітичній формі; метод розв'язання систем нелінійних рівнянь рівноваги МГЕ у формі багатокрокових ітерацій Ньютона – ПВР. Наведено результати апробації ИПК «PANAMA» на прикладі розрахунків грунтового масиву. Розглянуті варіанти завантаження грунтового масиву через абсолютно гнучкий і абсолютно жорсткий штамп. Для абсолютно жорсткого штампавантаження здійснювалося у вигляді вимушених переміщень. Для абсолютно гнучкого штампавантаження розглянуті перемінні навантаження з повним розвантаженням і повторним завантаженням. Виконано зіставлення осадки абсолютно гнучкого і абсолютно жорсткого фундаментів. Наведено порівняльні результати розрахунків з використанням ИПК «PANAMA» і ПК «ЛИРА».

Ключові слова: грунтовий масив, гіпотеза пластичної течії, осідання, траекторія навантаження, гнучкі фундаменти.

SOLVING NON-LINEAR PROBLEMS OF THE FINITE OVER ELEMENTS BY NEWTON METHOD

Oleksandr Petrakov¹, Natalia Petrakova², Mark Panasiuk³

*Donbas National Academy of Civil Engineering and Architecture,
2, Derzhavina Str., Makeyevka, DPR, 86123.*

E-mail: ¹niisdon@rambler.ru, ²nata_petrakova@mail.ru, ³m.rabota89@mail.ru

Received 20 April 2017; accepted 05 May 2017.

Abstract. Given work suggests the new methods of solving non-linear problems of structural mechanics using the calculation model MFOE. These methods include: plastic state equations, based on hypotheses of the plastic flow theory, given in the closed analytical form, methods of solving non-linear equation system MFOE in the form of multi-steps Newton iterations. The results of approbation of engineering programme complex «PANAMA» on the example of soil mass calculation have been given. The variants of soil mass loading through absolutely flexible and absolutely rigid die have been considered. For absolutely rigid die loadings were done in the form of forced displacements. For absolutely flexible die variable loadings with full unloading and repeated loading have been applied. The comparison of settlements of absolutely flexible and absolutely rigid foundations has been carried out. The comparable results of calculations using EPC «PANAMA» and PC «Lira» have been represented.

Keywords: soil mass, the hypotheses of the plastic flow, settlements, loading path, flexible foundations.

В работах [1, 2] были предложены уравнения пластического состояния, основанные на гипотезах деформационной теории пластичности. Основным недостатком указанных уравнений является то, что для их реализации требуются специальные характеристики материалов конструкций и грунтов оснований. В работах [2, 4] предложены уравнения для анализа бетонных конструкций и грунтовых массивов в рамках смешанной задачи теории упругости и пластичности. К недостаткам этих уравнений следует отнести невозможность разделения форм разрушения материала по сдвиговым и объемным деформациям. В связи с этим течение материала по сдвиговым деформациям сопровождается течением по объемным деформациям, что не позволяет анализировать произвольные траектории нагружения расчетных моделей. Таким образом, деформационные свойства материала должны быть представлены минимум двумя независимыми характеристиками, например модулем сдвига и модулем объемной деформации. При этом прочностные свойства материалов могут быть представлены стандартными характеристиками (расчетными сопротивлениями растяжению и сжатию, удельным сцеплением и углом внутреннего трения), трансформированными применительно к напряжениям, действующим на октаэдрических площадках.

Уравнения состояния, основанные на гипотезах теории пластического течения, получены в замкнутой аналитической форме из анализа траекторий нагружения в шестимерных пространствах напряжений и деформаций и представлены в работе [5]. Для реализации указанных уравнений могут быть использованы характеристики материалов, определяемые по стандартным методикам.

Актуальность обсуждаемой проблемы подтверждается многочисленными исследованиями, выполненными в этом направлении в разное время другими авторами. К ним следует отнести: автоматизированную систему научных исследований (АСНИ) «VESNA», разработанную И. П. Бойко с соавторами [6]; программу «CONCORD», которую разработал С. Ф. Клованич [7]; широко используемый в настоящее время программный комплекс «PLAXIS» [8, 9]; исследования по теории пластичности В. В. Москвитина [10], Г. А. Гениева с соавторами [11] и др.

Метод Ньютона – ПВР для расчетных моделей МКЭ

Методической основой для выполнения исследований послужил исследовательский программный комплекс (ИПК) «PANAMA», который является авторской разработкой в среде Visual C++.

Расчетная модель конструкции базируется на методе конечных элементов [12]. Используются сингулярные конечные элементы в виде тетраэдров, треугольных пластин и стержней. По мнению авторов, для решения нелинейных задач корректно использовать именно сингулярные конечные элементы, которые позволяют однозначно связать НДС в точках модели с уравнениями пластического состояния и параметрами траекторий нагружения в этих точках. Уравнения пластического состояния базируются на гипотезах теории пластического течения [5] и используются для анализа материала с внутренним трением согласно октаэдрической теории прочности Мизеса–Шлейхера–Боткина. Указанные уравнения имеют замкнутое аналитическое решение, вытекающее из анализа траекторий нагружения в шестимерных векторных пространствах напряжений и деформаций. Диаграмма сдвига принята билинейной. Диаграмма уплотнения принята кусочно-линейной с площадкой текучести в области объемного растяжения. Диаграмма прочности принята кусочно-линейной.

Использование сингулярных конечных элементов сопряжено с большим объемом информации, необходимой для описания расчетной модели с достаточной степенью точности. В связи с этим разработан метод решения систем нелинейных уравнений равновесия, который для своей реализации не требует сборки матрицы жесткости всей системы. В этом методе используются матрицы жесткости отдельных конечных элементов. При этом объем оперативной информации пропорционален количеству конечных элементов в системе. При традиционном подходе, связанном со сборкой матрицы жесткости, этот объем пропорционален квадрату кинематической неопределенности системы. Таким образом, увеличенный объем оперативной информации, связанный с применением сингулярных конечных элементов, компенсируется компактной формой хранения и использования в вычислениях матрицы жесткости.

Для решения системы нелинейных уравнений равновесия использован метод Ньютона – ПВР [13]. Этот метод модифицирован применительно к расчетной схеме метода конечных элементов с использованием предложений, сделанных в работе [14]. Модифицированный метод Ньютона – ПВР реализуется в форме последователь-

ных решений итерационного уравнения ПВР-метода в циклах по узлам системы и перемещениям в этих узлах. Разрешающее уравнение представлено формулой (1).

В уравнении (1) приняты следующие обозначения: k – номер итерации Ньютона; p – номер ПВР-итерации; i – номер расчетного узла; q – номер расчетного направления; s – номер конечного элемента, сходящегося в i -узле; l – номер направления в строке матрицы жесткости; is, js, ms, ps – номера стандартных i - j - m - p -узлов в s -м конечном элементе; U – искомая матрица перемещений; r – реакция в расчетном узле; P – узловая нагрузка; ω – коэффициент релаксации, принимаемый в интервале $[0,1]$; δ – дискретная целочисленная функция, которая принимает значения 0 или 1. Значение 1 соответствует перемещениям, которые в процессе $(p+1)$ -ой ПВР-итерации подвергались корректировке по формуле (1), значение 0 соответствует перемещениям, которые еще не корректировались

$$\begin{aligned}
 U_{i,q}^{k,p+1} = & U_{i,q}^{k,p} - \omega \cdot \left(\sum_{s \in S_i} \frac{\partial r_{is,q}(U^k)}{\partial U_{i,q}} \right)^{-1} \times \\
 & \times \left[\sum_{s \in S_i} \left[\sum_t \left[\frac{\partial r_{is,l}(U^k)}{\partial U_{i,q}} \cdot (U_{is,l}^{k,p+\delta} - U_{is,l}^k) + \right. \right. \right. \\
 & + \frac{\partial r_{js,l}(U^k)}{\partial U_{i,q}} \cdot (U_{js,l}^{k,p+\delta} - U_{js,l}^k) + \frac{\partial r_{ms,l}(U^k)}{\partial U_{i,q}} \times \\
 & \times (U_{ms,l}^{k,p+\delta} - U_{ms,l}^k) + \frac{\partial r_{ps,l}(U^k)}{\partial U_{i,q}} \times \\
 & \left. \left. \left. \times (U_{ps,l}^{k,p+\delta} - U_{ps,l}^k) + r_{is,q}(U^k) \right] - P_{i,q} \right] \right]. \quad (1)
 \end{aligned}$$

Матрицы жесткости конечных элементов, необходимые для реализации уравнения (1), первоначально вычисляются для стандартных i - j - m - p -узлов. В дальнейшем они преобразуются с учетом циклических перестановок этих узлов и в таком виде хранятся в оперативной памяти. Таким образом, производные, входящие в уравнение (1), являются элементами одной из строк матрицы жесткости конечного элемента. Элементы матриц перемещений также выбираются из оперативных массивов с учетом циклических перестановок узлов. Наличие в уравнении (1) поправок, связанных с учетом перемещений смежных узлов конечных элементов, сходящихся в i -узле, обеспечивает квадратичную сходимость

ПВР-итераций [13]. Мы также в этом убедились при выполнении численных исследований. Признаком сходимости итерационного процесса является достижение допустимого неравновесия в узле. Итерационный метод Ньютона – ПВР имеет локальную сходимость при достаточно малых ступенях нагружения [13].

Апробация ИПК «PANAMA» выполнена на примере расчета грунтового массива. Расчетная модель грунтового массива составлена на основании шаблона в виде куба размерами $1 \times 1 \times 1$ м, включающего 5 тетраэдров. Общие виды расчетной модели представлены на рисунках 1 и 2.

Рассмотрены варианты нагружения грунтового массива через абсолютно гибкий и абсолютно жесткий штамп. Для абсолютно жесткого штампа нагружения осуществлялись в перемещения. Для абсолютно гибкого штампа рассмотрены переменные нагружения с полной разгрузкой и повторным нагружением. Количество нагружений во всех задачах – 20. Размеры подошвы фундамента 4×4 м. Глубина заложения фундамента от поверхности массива 1,0 м. Размеры модели грунтового массива $30 \times 30 \times 16$ м. Граничные условия заданы в виде закреплений под основанием массива и горизонтальных закреплений по нормали к боковым поверхностям массива.

Грунт основания представлен суглинками со следующими характеристиками: модуль деформации 10 МПа; коэффициент Пуассона 0,35; удельное сцепление 20 кПа (18 кПа); угол внутреннего трения 22° (20°); удельный вес грунта 18 кН/м^3 ; удельный вес частиц грунта $27,8 \text{ кН/м}^3$; коэффициент пористости 0,7. Здесь в скобках указаны расчетные характеристики для первой группы предельных состояний.

Характеристики грунта определены в одометре и срезном приборе. Грунтовые воды отсутствуют. Поскольку в исходных данных заданы модуль деформации и коэффициент Пуассона, в

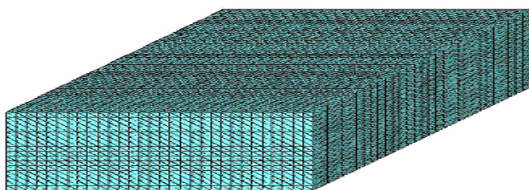


Рисунок 1. Конечно-элементная модель грунтового массива.

программе эти параметры автоматически интерпретируются как модуль сдвига и модуль объемной деформации. В программе используются инвариантные прочностные характеристики грунта, отнесенные к октаэдрической площадке, вычисленные по характеристикам, заданным в исходных данных [5]. Характеристиками грунта, используемыми в программе, являются: модуль сдвига 3,7 МПа; модуль объемной деформации 11,1 МПа; удельное октаэдрическое сцепление 32,1 кПа; октаэдрический угол внутреннего трения 33° .

Для указанного грунта и параметров фундамента контрольные параметры, вычисленные по нормам на проектирование оснований, составили: расчетное сопротивление грунта R 224,8 кПа; предельное давление P_{lim} 778,5 кПа.

Результаты апробации ИПК «PANAMA»

Для апробации ИПК «PANAMA» анализируются осадки фундаментов, траектории нагружения конечных элементов, уровни нагружения КЭ и глубины зон предельного равновесия в грунтовом массиве.

Осадки фундаментов представлены в виде графиков в функции от средних давлений под подошвой. Для гибкого штампа рассмотрены средние, максимальные и минимальные осадки. Выполнено сопоставление осадок абсолютно гибкого и абсолютно жесткого фундаментов. Для тестирования полученных результатов приводятся соответствующие графики упругих осадок, полученные в ПК Lira.

Анализ графиков на рисунках 3а и 3б позволяет сделать следующие выводы.

До давлений под подошвой гибкого (ГШ) и жесткого (ЖШ) фундамента, равных расчетному сопротивлению грунта R , осадки, вычисленные по упругой и упруго-пластической модели,

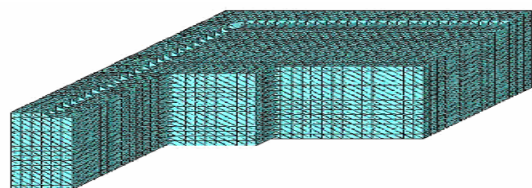


Рисунок 2. Вертикальный разрез по центру фундамента.

практически совпадают. Совпадают также средние осадки гибкого фундамента с осадками жесткого фундамента при одних и тех же средних давлениях.

Траектории нагружения в конечных элементах представлены графиками изменения коэффициентов вида напряженного и деформированного состояния (коэффициенты Лоде–Надаи) этих КЭ в процессе нагружения.

При простом нагружении (рис. 4а) напряженное состояние в центральной точке под фундаментом тяготеет к сжатию, а в угловой точке – к сдвигу. При этом коэффициенты вида напряженного (M_{us}) и деформированного (M_{ue}) состояния в процессе нагружения совпадают. Это подтверждает гипотезу о коллинеарности векторов полных сдвиговых напряжений и деформаций при простом нагружении, используемую в деформационной теории пластичности Ильюшина [15].

Уровни нагружения конечных элементов исследованы в центральных и угловых точках фундаментов. Результаты исследований представлены в виде графиков зависимости уровней нагружения от средних давлений под подошвой фундаментов. Под уровнем нагружения здесь понимается отношение интенсивности напряжений к максимальному значению интенсивности напряжений, характеризующему прочность материала.

Конечный элемент в угловой точке под гибким штампом (рис. 5а) переходит в стадию пластического течения при средних давлениях под подошвой $0,9 R$. Конечный элемент в центральной точке переходит в стадию пластического течения при средних давлениях под подошвой $2,7 R$ или $0,8 P_{lim}$.

Повышенная прочность основания в центре гибкого фундамента объясняется более высоким

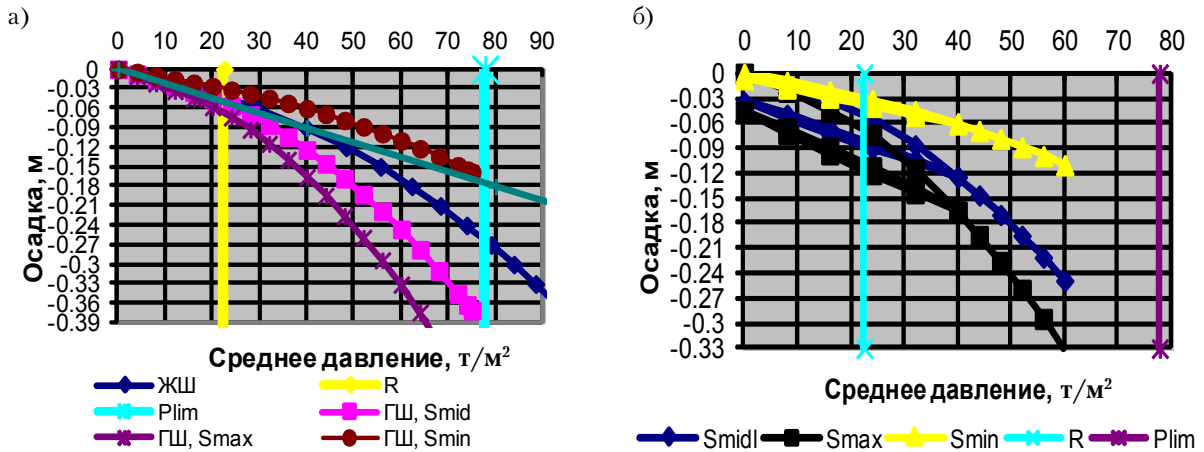


Рисунок 3. Осадки основания: а) при простом нагружении; б) при переменном нагружении.

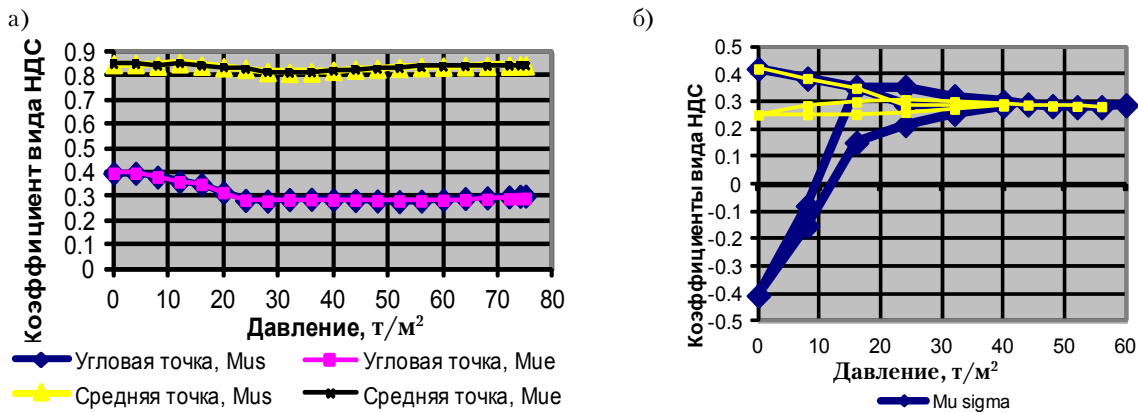


Рисунок 4. Нагружение гибкого штампа: а) простое; б) переменное.

уровнем средних сжимающих напряжений в грунте в этой зоне. Таким образом, разрушение основания под гибким фундаментом начинается с угловых точек при средних давлениях под подошвой, близких к R . Последнее согласуется с соответствующими аналитическими решениями задачи о нагружении основания гибким штампом. Уровень нагружения в центре гибкого фундамента несколько уменьшается при разгрузке и при повторном нагружении возрастает до значений, соответствующих простому нагружению (рис. 5б). В угловой точке разгрузка начинается из стадии пластического течения. При этом уровень нагружения КЭ убывает до минимального значения, а затем начинает возрастать еще до полной разгрузки.

При повторном нагружении уровень нагружения КЭ возрастает практически по траектории разгрузки. Таким образом, разгрузка из зоны пластического течения приводит к смещению начала вторичного пластического течения КЭ в область больших средних давлений под подошвой фундамента.

Глубины зон пластического течения иллюстрируются в форме наиболее характерных этапов развития зон пластического течения в грунтовом массиве при разных типах фундаментов. На рисунках отображается мозаика уровней нагружения в интенсивностях красного цвета. Мозаики построены на вертикальном разрезе по рисунку 2.

После полной разгрузки гибкого фундамента в его основании присутствуют зоны остаточных напряжений и деформаций (рис. 6а). При этом образуются зоны предельного равновесия за счет сложных траекторий нагружения КЭ при разгрузке. Уровень остаточных деформаций близок к предельному.

Выводы

1. Численные исследования подтвердили эффективность использования исследовательского программного комплекса (ИПК) «PANAMA» для решения нелинейных задач строительной механики. Применение сингулярных конечных элементов позволяет более точно описывать траектории нагружения в точках расчетной модели при сложных нагружениях. Вторичные ПВР-итерации по формуле (1) обладают квадратичной сходимостью. Сходимость итераций Ньютона всегда может быть достигнута при задании достаточно малых ступеней нагружения. Компактная форма хранения в оперативной памяти матриц жесткости отдельных конечных элементов обеспечивает возможность решения достаточно сложных инженерных задач.
2. ИПК «PANAMA» протестирован с ПК «ЛИРА», о чем свидетельствуют равные осадки фундаментов в упругой стадии работы основания. ИПК «PANAMA» по своим возмож-

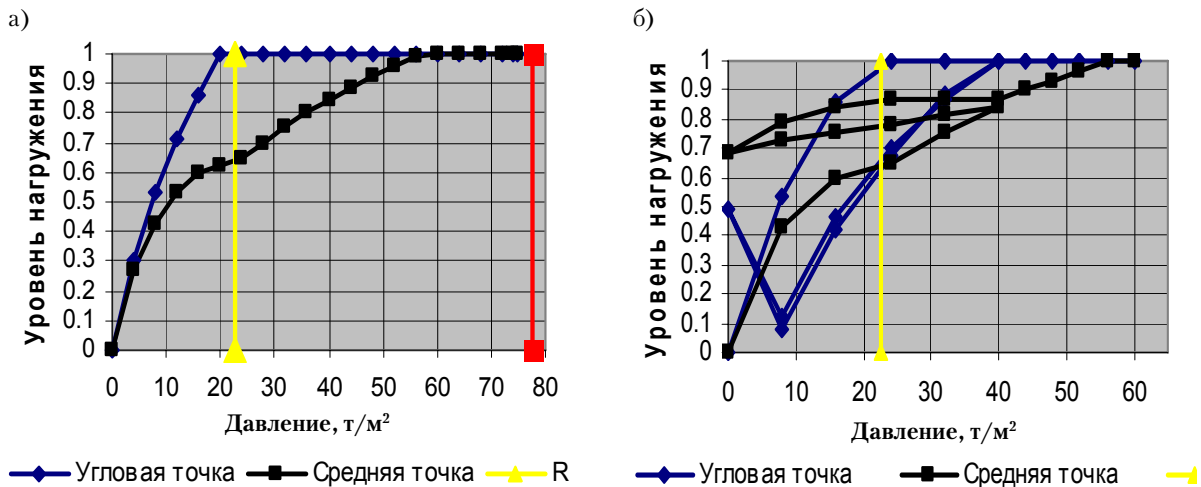


Рисунок 5. Нагружение гибкого фундамента: а) простое; б) переменное.

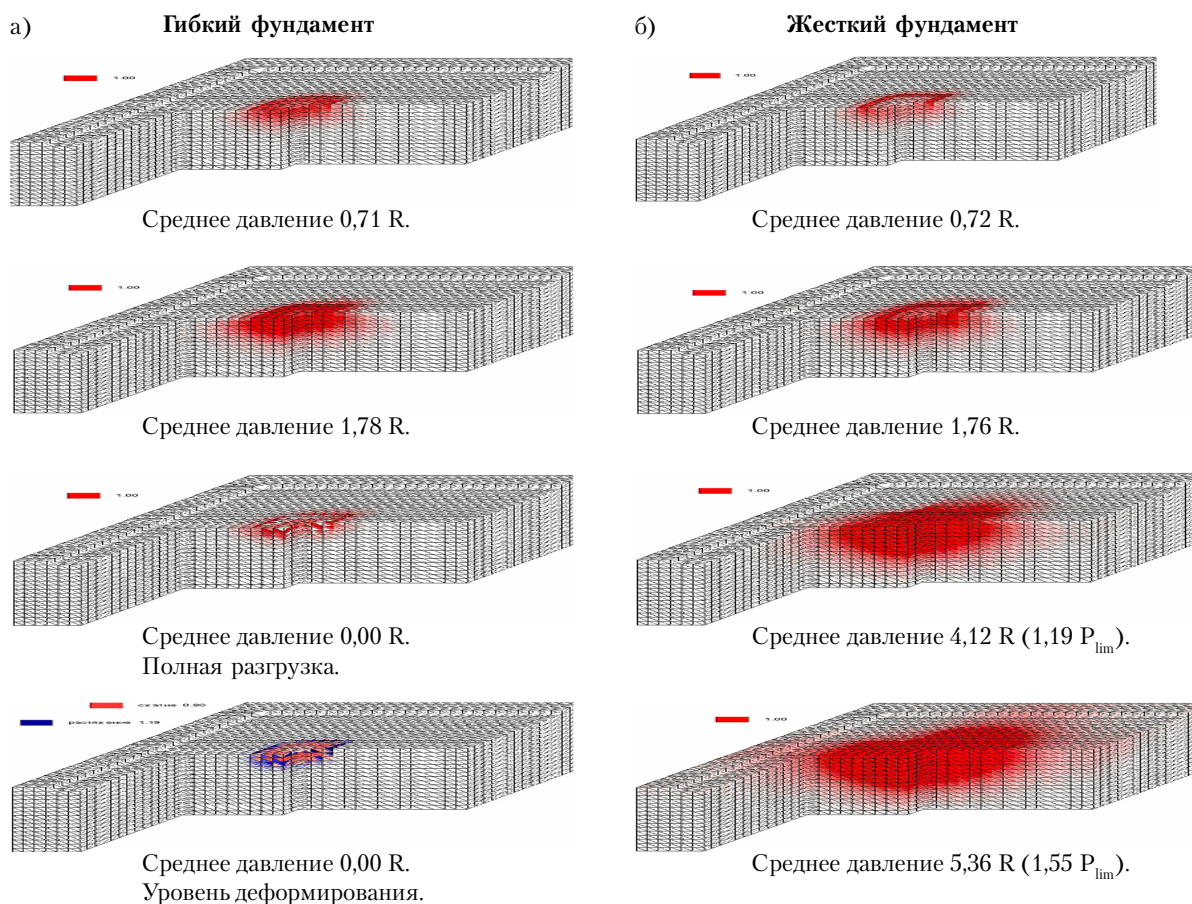


Рисунок 6. Зоны пластического течения в грунтовом массиве при: а) гибком фундаменте; б) жестком фундаменте.

ностям сопоставим с зарубежными аналогами, например с ПК «PLAXIS». Кроме этого, он имеет неоспоримые преимущества, так как позволяет рассчитывать не только грунтовые массивы, но и бетонные, железобетонные, каменные и металлические конструкции. При этом для всех материалов используется единая теория прочности, основанная на уравнении Мизеса–Шлейхера–Боткина.

- Переменное нагружение оказывает негативное влияние на работу оснований, фундаментов и строительных конструкций. При таких нагружениях в конструкциях развиваются зоны остаточных напряжений и деформаций, которые при повторном нагружении способствуют увеличению зон пластического течения. Траектории нагружения при переменных нагрузках характеризуются существенным расхождением векторов полных сдвиговых напряжений и деформаций. По этой при-

чине применение для анализа переменных нагружений строительных конструкций методов упругих решений является концептуально некорректным.

- Результаты нелинейных расчетов строительных конструкций и оснований рекомендуется анализировать с использованием обобщенных безразмерных параметров, таких как уровень нагружения, уровень деформирования и др., которые характеризуют степень приближения конструктивных элементов к предельным состояниям. Это позволяет отказаться от анализа громоздких и трудно воспринимаемых эпюр простых напряжений и деформаций. Особенно это может оказаться продуктивным для анализа работы железобетонных конструкций, например, по критериям приближения к предельной сжимаемости бетона или предельной растяжимости стали.

Литература

1. Петраков, А. А. Применение деформационной теории пластичности для анализа сложных нагружений [Текст] / А. А. Петраков // Строительная механика и расчет сооружений. 1984. № 2. С. 13–18.
2. Петраков, А. А. Исследование некоторых гипотез сложного нагружения [Текст] / А. А. Петраков // Строительная механика и расчет сооружений. 1992. № 3. С. 30–36.
3. Петраков, А. А. Практические методы решения упругопластических задач при сложном нагружении бетонных конструкций [Текст] / А. А. Петраков // Современные проблемы строительства : Ежегод. науч.-техн. сб. / ред.: В. А. Жигарев ; Донец. ПромстройНИИпроект. – Донецк : Лебедь, 1999. – С. 65–69.
4. Петраков, А. А. Практические методы анализа предельных состояний оснований и фундаментов [Текст] / А. А. Петраков // Будівельні конструкції. 2004. Вип. 61. С. 447–453.
5. Петраков, А. А. Исследование уравнений состояния теории пластического течения [Текст] / А. А. Петраков // Будівельні конструкції. 2008. Вип. 71. С. 77–87.
6. Бойко, И. П. Взаємодія конструкцій багатоповерхових будівель з урахуванням в'язко-пластичної роботи ґрунтового масиву при сейсмічних навантаженнях [Текст] / И. П. Бойко, О. С. Сахаров, В. О. Сахаров // Світ геотехніки. 2014. № 1. С. 17–21.
7. Клованич, С. Ф. Программа «CONCORD» для решения геотехнических задач методом конечных элементов [Текст] / С. Ф. Клованич // Вестник Одесского национального морского университета. 2003. Вып. 10. С. 39–46.
8. Першина, С. В. PLAXIS – программный комплекс для расчета деформаций и устойчивости геотехнических сооружений методом конечных элементов [Текст] / С. В. Першина, А. В. Слободяник // Збірник наукових праць. Серія: галузеве машинобудування, будівництво. 2003. Вип. 12. С. 158–163.
9. Schanz, T. The hardening soil model-Formulation and verification [Текст] / T. Schanz, P. A. Vermeer, P. G. Bonnier // Beyond 2000 in Computational Geotechnics. 10 Years of Plaxis International / Edited by Ronald B. J. Brinkgreve. – Rotterdam, Netherlands : A. A. Balkema, 1999. – P. 281–296.
10. Москвитин, В. В. Пластичность при переменных нагружениях [Текст] / В. В. Москвитин. – М. : МГУ, 1981. – 104 с.
11. Гениев, Г. А. Теория пластичности бетона и железобетона [Текст] / Г. А. Гениев, В. Н. Кисюк, В. А. Тюпин. – М. : Стройиздат, 1974. – 216 с.
12. Zienkiewicz, O. C. The Finite Element Method [Текст]. Volume 2: Solid Mechanics / O. C. Zienkiewicz, R. L. Taylor. – Fifth Edition. – Oxford : Butterworth-Heinemann, 2000. – 459 p.

References

1. Petrakov, A. A. Application of deformation plasticity theory to analyze complex loadings. In: *Building mechanics and calculation of constructions*, 1984, No. 2, pp. 13–18. (in Russian)
2. Petrakov, A. A. Investigation of some complex loading hypotheses. In: *Building mechanics and calculation of constructions*, 1999, No. 3, pp. 30–36. (in Russian)
3. Petrakov, A. A. Practical methods for the solution of problems under complex loading of concrete structures. In: *Zhigarev, V. A. (Ed.). Modern problems of building*. Donetsk: Lebed, 1999, pp. 65–69. (in Russian)
4. Petrakov, A. A. Practical methods for the analysis of limit states of the soils and foundations. In: *Building constructions*, 2004, Issue 61, pp. 447–453. (in Russian)
5. Petrakov, A. A. Study of state equations of plastic flow theory. In: *Building constructions*, 2008, Issue 71, pp. 77–87. (in Russian)
6. Bojko, I. P.; Saharov, O. S.; Saharov, V. O. Interaction designs of the multi-storey buildings on the basis of visco-plastic soil mass with seismic loads. In: *Geotechnics World*, 2014, No. 1, pp. 17–21. (in Ukrainian)
7. Klovaniich, S. F. The program «CONCORD» for the solution of geotechnical problems by the finite elements. In: *Bulletin of the Odessa National Maritime University*, 2003, Issue 10, pp. 39–46. (in Russian)
8. Pershina, S. V.; Slobodyanik, A. V. PLAXIS – software package for the calculation of the deformations and stability of the geotechnical structures by finite element method. In: *Academic journal. Industrial Machine Building, Civil Engineering*, 2003, Vol. 12, pp. 158–163. (in Russian)
9. Schanz, T.; Vermeer, P. A.; Bonnier, P. G. The hardening soil model-Formulation and verification. In: *Beyond 2000 in Computational Geotechnics. 10 Years of Plaxis International / Edited by Ronald B. J. Brinkgreve*. Rotterdam, Netherlands: A. A. Balkema, 1999. – P. 281–296.
10. Moskvitin, V. V. Plasticity under variable loadings. Moscow: MSU, 1981. 104 p. (in Russian)
11. Geniyev, G. A.; Kisyuk, V. N.; Tyupin, V. A. Theory of plasticity of concrete and reinforced concrete. Moscow: Stroyizdat, 1974. 216 p. (in Russian)
12. Zienkiewicz, O. C.; Taylor, R. L. The Finite Element Method. Volume 2: Solid Mechanics. Fifth Edition. Oxford: Butterworth-Heinemann, 2000. 459 p.
13. Ortega, D. Zh.; Reybold, V. Iterative methods for solving systems of nonlinear equations with many unknowns. Moscow: Mir, 1975. 558 p. (in Russian)
14. Petrakov, A. A. The solution of nonlinear problems in the method of distribution of forces and displacements. In: *Building mechanics and calculation of constructions*, 1982, No. 4, pp. 16–20. (in Russian)
15. Pyushin, A. A. Plastichnost. Moscow: GITL, 1948. 376 p. (in Russian)

13. Ортега, Д. Ж. Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными [Текст] / Д. Ж. Ортега, В. Рейболд. – М. : Мир, 1975. – 558 с.
14. Петраков, А. А. Решение нелинейных задач методом распределения усилий и перемещений [Текст] / А. А. Петраков // Строительная механика и расчет сооружений. 1982. № 4. С. 16–20.
15. Ильюшин, А. А. Пластичность [Текст] / А. А. Ильюшин. – М. : ГИТЛ, 1948. – 376 с.

Петраков Александр Александрович – доктор технических наук, профессор; заведующий кафедрой оснований, фундаментов и подземных сооружений ГОУ ВПО «Донбасской национальной академии строительства и архитектуры». Научные интересы: теория взаимодействия сооружений с деформирующимся основанием, в том числе на подрабатываемых территориях и на просадочных грунтах; разработка и исследование фундаментов повышенной несущей способности и методов их расчета на основе гипотез нелинейной геомеханики и теории строительных конструкций.

Петракова Наталья Александровна – кандидат технических наук, доцент; кафедра оснований, фундаментов, подземных сооружений ГОУ ВПО «Донбасской национальной академии строительства и архитектуры». Научные интересы: теория взаимодействия сооружений с деформирующимся основанием, в том числе на подрабатываемых территориях и на просадочных грунтах; разработка и исследование фундаментов повышенной несущей способности и методов их расчета на основе гипотез нелинейной геомеханики и теории строительных конструкций.

Панасюк Марк Дмитриевич – магистр строительства; инженер I-ой категории Научно-исследовательского института строительных конструкций. Научные интересы: теория взаимодействия сооружений с деформирующимся основанием, в том числе на подрабатываемых территориях и на просадочных грунтах; разработка и исследование фундаментов повышенной несущей способности и методов их расчета на основе гипотез нелинейной геомеханики и теории строительных конструкций.

Петраков Олександр Олександрович – доктор технічних наук, професор; завідувач кафедри основ, фундаментів і підземних споруд ДОУ ВПО «Донбаська національна академія будівництва і архітектури». Наукові інтереси: теорія взаємодії споруд з деформованою основою, у тому числі на підроблюваних територіях і просадних грунтах; розроблення і дослідження фундаментів підвищеної несучої здатності і методів їх розрахунку на основі гіпотез нелінійної геомеханіки та теорії будівельних конструкцій.

Петракова Наталя Олександрівна – кандидат технічних наук, доцент кафедри основ, фундаментів та підземних споруд ДОУ ВПО «Донбаська національна академія будівництва і архітектури». Наукові інтереси: теорія взаємодії споруд з деформованою основою, у тому числі на підроблюваних територіях і просадних грунтах; розроблення і дослідження фундаментів підвищеної несучої здатності і методів їх розрахунку на основі гіпотез нелінійної геомеханіки та теорії будівельних конструкцій.

Панасюк Марк Дмитрович – магістр будівництва, інженер I-ої категорії Науково-дослідного інституту будівельних конструкцій. Наукові інтереси: теорія взаємодії споруд з деформованою основою, у тому числі на підроблюваних територіях і просадних грунтах; розроблення і дослідження фундаментів підвищеної несучої здатності і методів їх розрахунку на основі гіпотез нелінійної геомеханіки та теорії будівельних конструкцій.

Petrakov Oleksandr – D.Sc. (Engineering), Professor; the Head of Grounds, Foundations and Underground Structures Department, Donbas National Academy of Civil Engineering and Architecture. Scientific interests: theory of inter action with deformable structures base, including undermined territories and subsiding soils; development and research foundations increased carrying capacity and methods of their calculation on the basis of hypotheses and theories of nonlinear geomechanics constructions.

Petrakova Natalia – Ph.D. (Engineering); Associate Professor; Grounds, Foundations and Underground Structures Department, Donbas National Academy of Civil Engineering and Architecture. Scientific interests: theory of inter action with deformable structures base, including undermined territories and subsiding soils; development and research foundations increased carrying capacity and methods of their calculation on the basis of hypotheses and theories of nonlinear geomechanics constructions.

Panasiuk Mark – Master's Degree Student (Civil Engineering); Engineer of the first category of Research Institute of Building Constructions. Scientific interests: theory of interaction with deformable structures base, including undermined territories and subsiding soils; development and research foundations increased carrying capacity and methods of their calculation on the basis of hypotheses and theories of nonlinear geomechanics constructions.