



ЧИСЛЕННЫЕ ИСПЫТАНИЯ ОБРАЗЦОВ БЕТОНА

М. Д. Панасюк, А. А. Петраков, Н. А. Петракова

ГОУ ВПО «Донбасская национальная академия строительства и архитектуры»,

2, ул. Державина, г. Макеевка, ДНР, 86123.

E-mail: m.d.panasuk@donnasa.ru

Получена 01 марта 2021; принята 26 марта 2021.

Аннотация. Представлены результаты численных испытаний бетонных призм и кубов предельными нагрузками. Методика испытаний основана на новых расчетных моделях бетона как анизотропного материала, имеющего различную прочность при сжатии и растяжении. Используются уравнения пластического состояния, основанные на гипотезах теории пластического течения, унифицированные для разных материалов, таких как грунт основания, бетон, металл и т. п. Для всех материалов применяется теория прочности Мизеса-Шлейхера-Боткина. Характеристики прочности материалов, определенные по стандартным методикам, переопределяются для октаэдрических площадок, для которых они являются инвариантами. Задача решается методом конечных элементов (МКЭ). Расчетная модель МКЭ представлена сингулярными конечными элементами (тетраэдры, треугольные пластины, стержни). Это повышает точность описания траекторий нагружения в конечных элементах и обеспечивает однозначное соответствие уравнений состояния элементарным объемам конструкции. Использование сингулярных конечных элементов связано с большим объемом оперативной памяти для хранения матрицы жесткости системы, что существенно ограничивает круг практически разрешимых задач. Для устранения этого противоречия использован итерационный метод Ньютона – ПВР для решения уравнений равновесия при расчете конструкций методом конечных элементов. Применен итерационный алгоритм, не требующий для своей реализации сборку матрицы жесткости системы. При этом объем оперативной информации пропорционален количеству конечных элементов в системе. При традиционном подходе, требующем сборки матрицы жесткости системы, объем оперативной информации пропорционален квадрату степени кинематической неопределенности системы. При использовании итерационного алгоритма достигается уменьшение размеров матрицы жесткости и существенное сокращение времени решения задачи. Приведены результаты нелинейного анализа бетонных конструкций. Показано, что работа бетона по нисходящей ветви является свойством конструкции образца, а не свойством материала. Нисходящая ветвь работы бетона является следствием разрушения материала за счет объемного растяжения и может быть получена вне рамок дилатансионных моделей.

Ключевые слова: анизотропная модель бетона, теория пластического течения, нисходящая ветвь работы бетона.

ЧИСЕЛЬНІ ВИПРОБУВАННЯ ЗРАЗКІВ БЕТОНУ

М. Д. Панасюк, О. О. Петраков, Н. О. Петракова

ДОНУ ВПО «Донбаська національна академія будівництва і архітектури»,

2, вул. Державіна, м. Макіївка, ДНР, 86123.

E-mail: m.d.panasuk@donnasa.ru

Отримана 01 березня 2021; прийнята 26 березня 2021.

Анотація. Наведені результати чисельних випробувань бетонних призм та кубів граничними навантаженнями. Методика випробувань заснована на нових розрахункових моделях бетону як анізотропного матеріалу, що має різну міцність при стиску та розтягу. Використані рівняння пластичного стану, що засновані на гіпотезі теорії пластичної течії, уніфіковані для різних матеріалів, таких як грунт основи, бетон, метал та ін. Для усіх матеріалів використовується теорія міцності Мізеса-Шлейхера-Боткіна. Характеристики міцності матеріалів, визначені за стандартними методами, перераховуються для октаедричних площин, для яких вони з'являються інваріантами. Задача розв'язується методом скінченних

елементів (МСЕ). Розрахункова модель МСЕ представлена сингулярними скінченними елементами (тетраедри, трикутні пластини, стержні). Це підвищує точність опису траєкторій навантаження у скінченних елементах і забезпечує однозначну відповідність рівнянь стану елементарним об'ємам конструкції. Використання сингулярних скінченних елементів пов'язано з великим обсягом оперативної пам'яті для збереження матриці жорсткості системи, що суттєво обмежує коло задач, що практично розв'язуються. Для уникнення цього протиріччя використано ітераційний метод Ньютона – ПВР для розв'язування рівнянь рівноваги при розрахунку конструкції методом скінченних елементів. Використано ітераційний алгоритм, що не потребує для своєї реалізації складання матриці жорсткості системи в цілому. При цьому обсяг оперативної інформації пропорційний кількості скінченних елементів у системі. При традиційному підході, що потребує складання матриці жорсткості систем, обсяг оперативної інформації пропорційний квадрату ступеню кінематичної невизначеності системи. При використанні ітераційного алгоритму досягається зменшення розмірів матриці жорсткості і суттєве зменшення часу, потрібного для розв'язання задачі. Наведено результати нелінійного аналізу бетонних конструкцій. Показано, що робота бетону по похилій гілці є властивістю конструкції зразка, а не властивістю матеріалу. Похила гілка роботи бетону є наслідком руйнування матеріалу за рахунок об'ємного розтягу і може бути отримана без використання дилатансійних моделей.

Ключові слова: анізотропна модель бетону, теорія пластичної течії, похила гілка роботи бетону.

NUMERICAL TESTS OF CONCRETE SAMPLES

Mark Panasiuk, Oleksandr Petrakov, Natalia Petrakova

Donbas National Academy of Civil Engineering and Architecture,

2, Derzhavin Str., Makeevka, DPR, 83123.

E-mail: m.d.panasuk@donnasa.ru

Received 01 March 2021; accepted 26 March 2021.

Abstract. The results of numerical testing of concrete prisms and cubes by limit loads are presented. Strategy of testing is based on new calculation models of concrete as anisotropic material that have different strength under press and tension. The equations of the plastic state based on the hypotheses of the Flow Theory of Plasticity, unified for different materials, such as soil ground, concrete, metal, etc. are used. For all materials, the strength theory of Mises-Schleicher-Botkin is used. The strength characteristics of materials, determined by standard methods, are redefined for octahedral sites, for which they are invariants. The problem is solved by the finite element method (FEM). The computational model of the FEM is represented by singular finite elements (tetrahedral, triangular plates, rods). This increases the accuracy of the description of loading paths in finite elements and ensures a unique correspondence of the state equations to elementary volumes of the construction. The use of singular finite elements is associated with a large amount of RAM for storing the stiffness matrix of the system, which significantly limits the range of practically solvable problems. To eliminate this contradiction, an iterative Newton – SUR method has been accepted for solving equilibrium equations in the design of finite element structures. An iterative algorithm was used, which does not require an assembly of the system stiffness matrix for its implementation. The volume of operational information is proportional to the number of finite elements in the system. With the traditional approach, which requires the assembly of the system's stiffness matrix, the amount of operational information is proportional to the square of the degree of kinematic indeterminacy of the system. When using the iterative algorithm, the size of the stiffness matrix is reduced and the time of solving the problem is significantly reduced. The results of a nonlinear analysis of concrete structures are presented. It is shown that the work of concrete on the descending branch is a property of the design of the sample, and not a property of the material. The downward branch of the concrete work is a consequence of the destruction of the material due to volumetric stretching and can be obtained outside the framework of dilatancy models.

Keywords: anisotropic model of concrete, theory of plastic flow, descending branch of concrete work.

Введение

Статья посвящена совершенствованию расчетных моделей бетона с учетом его анизотропных свойств. Известны модели, основанные на уравнениях деформационной теории пластичности [1], пластического течения [2], смешанной задачи теории упругости и пластичности [3]. Предлагаемая модель основана на гипотезах теории пластического течения. Апробация модели выполнена в форме численных испытаний образцов бетона.

В исследованиях бетон рассматривается как анизотропный материал, имеющий различную прочность при сжатии и растяжении. Предполагается независимое деформирование при девиаторном и объемном нагружении. При этом диаграмма прочности является функцией средних напряжений при объемном деформировании. Дилатансионные явления не учитываются. Уровень нагружения ограничивается предельной сжимаемостью бетона. Уравнения состояния основаны на гипотезах теории пластического течения и приняты в соответствии с работой [4]. Расчетная модель представлена ансамблем сингулярных конечных элементов (тетраэдров). Решение задачи выполняется итерационным методом Ньютона – ПВР, адаптированным к расчетной схеме МКЭ [5]. Численная реализация выполнена с применением исследовательского программного комплекса Rapana [5].

1. Методика исследований

Прочностные характеристики бетона определяются на основании стандартных испытаний на одноосное сжатие и растяжение. По результатам этих испытаний строится диаграмма прочности

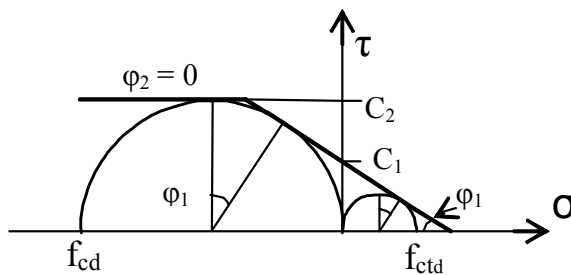


Рисунок 1. Диаграмма прочности при испытании бетона на сжатие-растяжения для определения параметров прочности в уравнении Кулона-Мора.

бетона с параметрами в уравнении прочности Кулона-Мора (рис. 1).

Параметры прочности бетона в уравнении Кулона-Мора определяются по формулам, вытекающим из чертежа на рисунке 1:

$$\sin(\varphi_1) = \frac{f_{cd} + f_{ctd}}{f_{cd} - f_{ctd}}; \quad C_1 = \frac{f_{ctd}}{2} \cdot \frac{1 + \sin(\varphi_1)}{\cos(\varphi_1)}; \quad (1)$$

$$\varphi_2 = 0; \quad C_2 = -\frac{f_{cd}}{2}.$$

В численных исследованиях используются инвариантные характеристики прочности бетона, отнесенные к октаэдрической площадке, которые являются параметрами в уравнении прочности Мизесе-Шлейхера-Боткина (рис. 2).

Параметры прочности бетона, отнесенные к октаэдрической площадке, вычисляются по формулам, полученным в работе [4]:

$$c_{oct} = 2 \cdot c \cdot \cos(\varphi); \quad (2)$$

$$\varphi_{oct} = \arctg(3 \cdot \sin(\varphi)).$$

Примечание: формулы (2) применяются для каждой ветви билинейной диаграммы прочности по рисунку 2.

Диаграмма сдвига бетона принимается в виде билинейной диаграммы Прандтля, в которой величина интенсивности напряжений при текучести определяется по диаграмме прочности (рис. 2). При этом линейная зависимость между интенсивностями деформаций и напряжений принимается с коэффициентом $3G$, где G – модуль сдвига бетона. Девиаторное нагружение рассматривается как сложное.

Диаграмма объемного деформирования бетона приведена на рисунке 3. При этом в области сжатия принимается линейная зависимость между средними деформациями и напряжениями с коэффициентом $3K$, где K – модуль объемной

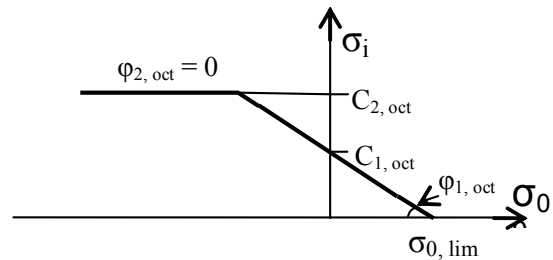


Рисунок 2. Диаграмма прочности бетона для определения параметров в уравнении прочности Мизеса-Шлейхера-Боткина.

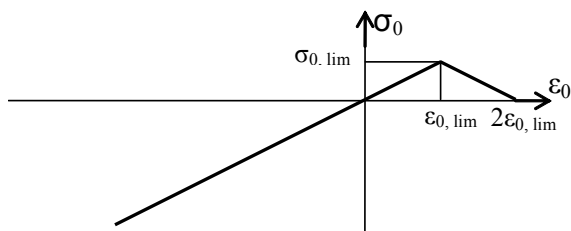


Рисунок 3. Диаграмма объемного деформирования бетона.

деформации бетона. В области объемного растяжения фиксируется прочность материала при объемном растяжении и соответствующая ей величина средней объемной деформации растяжения. Диаграмма объемного деформирования бетона ассоциирована с диаграммой прочности (рис. 2). Параметры диаграммы объемного деформирования бетона (рис. 3) определяются по формулам:

$$\sigma_{0, \text{lim}} = \frac{c_{1, \text{oct}}}{\text{tg} \varphi_{1, \text{oct}}}; \quad \varepsilon_{0, \text{lim}} = \frac{\sigma_{0, \text{lim}}}{3 \cdot K}. \quad (3)$$

В диапазоне изменения объемных деформаций от $\varepsilon_{0, \text{lim}}$ до $2\varepsilon_{0, \text{lim}}$ объемные напряжения σ_0 уменьшаются от $\sigma_{0, \text{lim}}$ до нуля и при больших объемных деформациях остаются нулевыми. Переменное нагружение по объемным деформациям считается условно простым (квазиупругим).

Модуль сдвига и модуль объемной деформации бетона вычисляются по заданным в исходных данных модулю деформации (E) и коэффициенту Пуассона (ν) бетона по известным формулам:

$$G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)}; \quad K = \frac{E}{3 \cdot (1 - 2\nu)}. \quad (4)$$

2. Результаты численных исследований

Численные испытания выполнены на призмах $100 \times 100 \times 300$ мм и на кубиках $100 \times 100 \times 100$ мм.

Таблица 1. Исходные данные для бетона класса по прочности С20/25 (В25)

Деформационные		Прочностные характеристики (МПа, град.)					
E , ГПа	23 (9,2)	f_{cd}	14,5	φ_1	59,9	$\varphi_{1, \text{oct}}$	68,93
ν	0,25	f_{ctd}	1,05	c_1	1,99	$c_{1, \text{oct}}$	1,996
G , ГПа	9,2 (3,7)	$\sigma_{0, \text{lim}}$	0,769	φ_2	0	$\varphi_{2, \text{oct}}$	0
K , ГПа	15,3(6,1)	$\varepsilon_{0, \text{lim}}$	$1,67 \cdot 10^{-5}$	c_2	7,25	$c_{2, \text{oct}}$	14,5

Примечание: в скобках указаны деформационные характеристики бетона при длительном нагружении.

Исследовались разрушающие нагрузки в зависимости от формы образца. Для призм исследовано влияние граничных условий на торцах. Материал – бетон класса по прочности С20/25 (В25). Коэффициент Пуассона 0,25. При кратковременных испытаниях $E = E_0$, при длительных испытаниях $E = 0,4E_0$, где E_0 – начальный модуль деформации бетона. Нагружения осуществляются в перемещениях торца образца.

Исходные данные для бетона класса по прочности С20/25 (В25) и вычисленные по ним производные характеристики приведены в таблице 1.

По результатам численных исследований построены диаграммы деформирования образцов бетона в осях «осевая деформация–среднее напряжение» (рис. 4–6).

При разрушении призмы среднее напряжение в бетоне равно расчетному сопротивлению бетона сжатию f_{cd} , заданному в исходных данных (таб. 1). Таким образом, расчетная модель адекватно описывает работу бетонной конструкции, каковой является призма. При разрушении кубика среднее напряжение в бетоне превышает расчетное сопротивление бетона сжатию на 17%. По справочным данным [6] это превышение должно составлять 25... 33,3%. Объяснением этого может являться заниженная прочность бетона при одноосном растяжении f_{ctd} , заданная в исходных данных (таб. 1). Осевая деформация, соответствующая достижению в бетоне максимальных напряжений, составляет при длительных испытаниях призм и при кратковременных испытаниях кубиков 1,7‰. Это согласуется с данными норм на проектирование железобетонных конструкций [7].

При кратковременных испытаниях призм максимальные напряжения в бетоне возникают при осевой деформации 0,65‰ (рис. 5). Дальнейшее нагружение призмы сопровождается уменьшением сжимающих напряжений в бетоне.

В технической литературе это явление называют «работой бетона по нисходящей ветви». При достижении предельной сжимаемости бетона, которой соответствует осевая деформация 3,44 ‰, уменьшение сжимающих напряжений составляет 8,2 % для призмы и 12,7 % для кубиков. В нормативных документах эта величина не нормируется. В соответствии с исследованиями [8] уменьшение расчетного сопротивления сжатию бетона по нисходящей ветви может составлять от 7 до 47 %. При длительных нагружениях призм нисходящая ветвь работы бетона в наших исследованиях не зафиксирована.

Численные испытания призм при различных граничных условиях на торцах (рис. 6) свидетельствуют о том, что условия закрепления торцов не влияют на результаты испытаний образцов.

Графики изменения в процессе нагружения призм и кубиков коэффициентов поперечной деформации представлены на рисунке 7.

Обозначим уровень нагружения образца бетона по деформациям (УД) как отношение осевой деформации к предельной сжимаемости бе-

тона. До уровня нагружения 0,17 (осевая деформация 0,6‰) коэффициент поперечной деформации равен коэффициенту Пуассона, заданному в исходных данных (таб. 1). При уровне нагружения 0,29 для призмы и 0,44 для кубика коэффициент поперечной деформации равен 0,5, что соответствует переходу материала в стадию пластического течения. Максимальное значение коэффициента поперечной деформации для призмы составляет 0,6 и соответствует уровню нагружения 0,52. При дальнейшем нагружении призмы коэффициент поперечной деформации уменьшается до 0,55. При нагружении кубика коэффициент поперечной деформации монотонно возрастает до величины 0,64. Из приведенного анализа следует, что предложенная модель бетона позволяет учитывать в рамках теории пластического течения дилатансионные явления, связанные с объемным растяжением (разуплотнением) материала. В частности, начало работы бетона по нисходящей ветви (рис. 4) соответствует уровням нагружения бетонных образцов, при которых коэффициент поперечной деформации достигает значения 0,5.

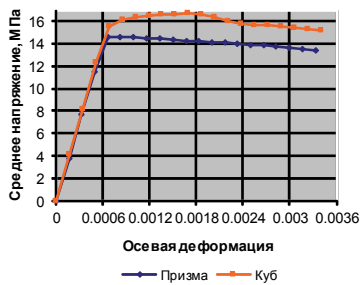


Рисунок 4. Сравнительные диаграммы деформирования призмы и кубика.

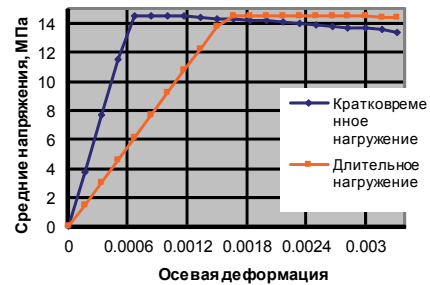


Рисунок 5. Диаграммы деформирования призм при кратковременных и длительных испытаниях.

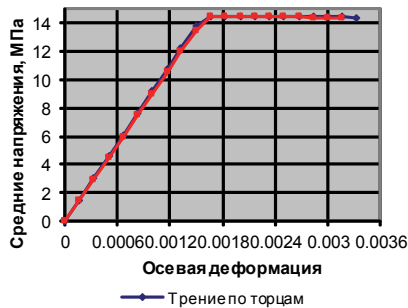


Рисунок 6. Диаграммы деформирования призм при различных граничных условиях на торцах.

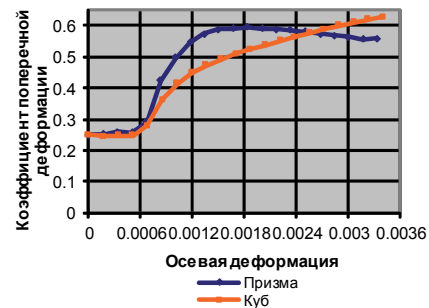


Рисунок 7. Изменение коэффициентов поперечной деформации при нагружении бетонных образцов.

Исследованы траектории нагружения характерных конечных элементов, расположенных в торце и посередине бетонных образцов. Соответствующие графики представлены на рисунках 8 и 9. Из приведенных графиков можно сделать следующие заключения. До начала пластического деформирования траектории нагружения КЭ в торце и посередине призмы практически линейны (рис. 8).

При пластическом деформировании в торце призмы происходит разгрузка как по сдвиговым, так и по объемным напряжениям. При этом в конце нагружения в КЭ возникает объемное растяжение. При пластическом деформировании в середине призмы возникает разгрузка только по объемным напряжениям. При этом сдвиговые напряжения остаются постоянными.

Аналогичные закономерности характерны и для траекторий нагружения КЭ в кубике (рис. 9). Отличие заключается в том, что в середине образца имеет место линейная траектория, переходящая в горизонтальный участок текучести. Разгрузка здесь отсутствует. В торце кубика на-

чалное пластическое течение переходит в разгрузку, сначала только по объемным напряжениям, а затем и по сдвиговым напряжениям. Объемное растяжение в КЭ не достигнуто.

Различие в несущей способности (прочности) призмы и кубика объясняется тем, что в кубике торцы находятся в состоянии компрессионного сжатия, в то время как торцы призмы разрушаются в результате объемного растяжения (расширения).

На рисунках 10 и 11 представлены результаты исследования уровней нагружения характерных КЭ в призмах и кубиках. Здесь под уровнем нагружения следует понимать отношение интенсивности напряжений в КЭ к прочности материала при заданном значении среднего напряжения (диаграмма прочности на рис. 2). Таким образом, максимальный уровень нагружения 1,0 соответствует текучести по сдвиговым напряжениям.

Предельные состояния по торцам и в середине призмы (рис. 10) достигаются в процессе нагружения одновременно. В кубике (рис. 11)

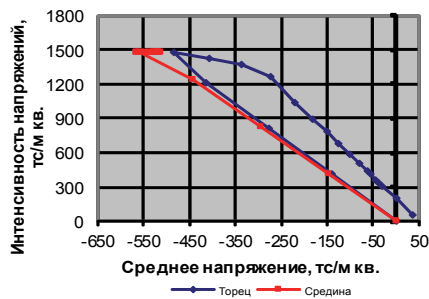


Рисунок 8. Траектории нагружения характерных КЭ призмы.

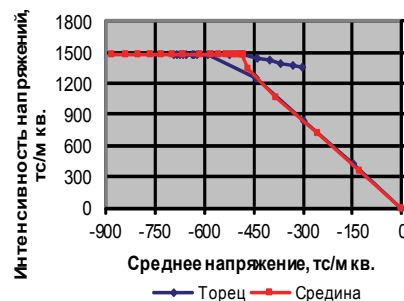


Рисунок 9. Траектории нагружения характерных КЭ кубика.



Рисунок 10. Уровни нагружения характерных КЭ призмы.

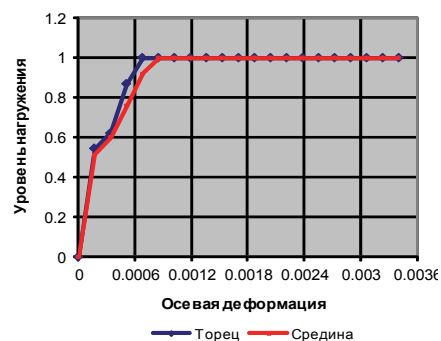


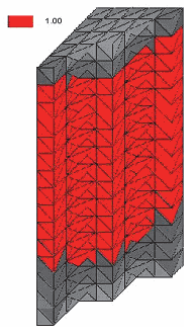
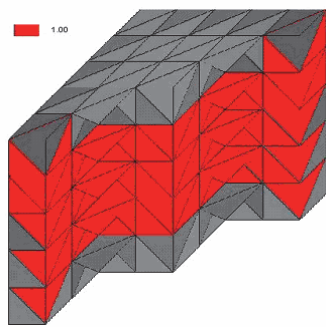
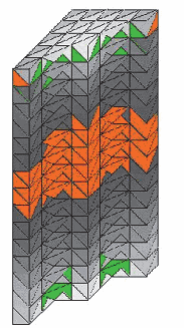
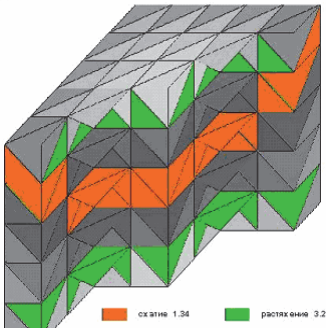
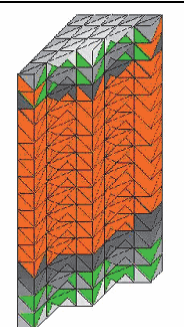
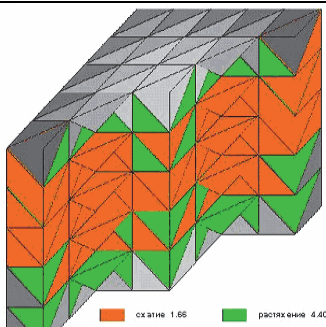
Рисунок 11. Уровни нагружения характерных КЭ кубика.

предельные состояния при нагружении достигаются в середине образца с некоторым опережением по сравнению с торцами. Следствием этого является повышенная несущая способность кубика в сравнении с призмой.

В заключение приведем мозаики, характеризующие предельные состояния испытанных образцов по напряжениям и деформациям при различных уровнях нагружения (таб. 2).

Мозаики в таблице 2 относятся к кратковременным испытаниям образцов бетона. Характерно, что уже при УД 0,2 зоны текучести (КЭ, окрашенные в красный цвет) распространяются практически по всему объему образца за исключением его торцов. При уровне нагружения 0,8 в средней зоне образцов достигается предельная сжимаемость бетона (КЭ, окрашенные в оранжевый цвет). При этом на их торцах достигается

Таблица 2. Мозаики, характеризующие предельные состояния испытанных образцов

Призма	Кубик
 <p>Напряженное состояние при УД 0,2</p>	 <p>Напряженное состояние при УД 0,2</p>
 <p>Деформированное состояние при УД 0,8</p>	 <p>Деформированное состояние при УД 0,8</p>
 <p>Деформированное состояние при УД 1,0</p>	 <p>Деформированное состояние при УД 1,0</p>

Примечание: УД – уровень нагружения образца бетона по деформациям, определяемый как отношение осевой деформации к предельной сжимаемости бетона.

предельная растяжимость (КЭ, окрашенные в зеленый цвет).

При уровне нагружения 1,0 зоны предельной сжимаемости бетона распространяются практически на весь объем образца. На торцах зоны предельной растяжимости сливаются в замкнутые области. В кубике зоны предельной растяжимости развиваются в сердцевине образца по всей его высоте, что приводит к раскалыванию образца по вертикальным плоскостям. Качественный анализ напряженно-деформированного состояния испытанных образцов бетона согласуется с результатами количественного анализа на графиках рисунков 4–11.

Выводы

1. Прочностные характеристики бетона как анизотропного материала могут быть адекватно интерпретированы как параметры в уравнении прочности Кулона-Мора в соответствии с диаграммой прочности по рисунку 1 и формулами (1).
2. В численных исследованиях, реализуемых с использованием уравнений состояния теории пластического течения, рекомендуется использовать инвариантные характеристики прочности бетона, вычисляемые как параметры в уравнении прочности Мизеса-Шлейхера-Боткина в соответствии с диаграммой прочности по рисунку 2 и формулами (2).
3. Для учета трещинообразования в бетоне рекомендуется использовать кусочно-линейную диаграмму объемного деформирования (рис. 3), ассоциированную с диаграммой прочности. Параметры указанной диаграммы могут быть определены по формулам (3).

Литература

1. Гениев, Г. А. Теория пластичности бетона и железобетона / Г. А. Гениев, В. Н. Кисюк, В. А. Тюпин. – Москва : Стройиздат, 1974. – 216 с. – Текст : непосредственный.
2. Клованич, С. Ф. Модель течения связных грунтов / С. Ф. Клованич. – Текст : непосредственный // Світ геотехніки. – 2012. – № 1. – С. 16–20.
3. Петраков, А. А. Практические методы решения упруго-пластических задач при сложном нагружении бетонных конструкций / А. А. Петраков. –

4. Адекватность предложенной модели бетона установлена по результатам численных испытаний призм и кубиков. При этом средние напряжения при разрушении призмы равны заданному в исходных данных расчетному сопротивлению бетона при одноосном сжатии f_{cd} . Средние напряжения при разрушении кубика превышают расчетное сопротивление бетона при одноосном сжатии на 17...22 %, что согласуется со справочными данными.
5. При кратковременных испытаниях образцов бетона установлено явление, которое описано в технической литературе как «работа бетона по нисходящей ветви». При этом снижение средних напряжений в момент разрушения образца составило до 12 %. Можно сделать вывод о том, что «работа бетона по нисходящей ветви» не является свойством материала, а является свойством конструкции, которую представляет испытываемый образец.
6. При разрушении образцов достигается предельная сжимаемость бетона практически по всей высоте образца и предельная растяжимость с образованием трещин в опорных зонах. Для кубиков наблюдается их раскалывание на блоки вертикальными трещинами. В момент разрушения коэффициент поперечной деформации превышает предельное значение 0,5, принятое в классической теории пластичности, и достигает величины 0,6–0,65. Из этого следует, что адекватный анализ работы бетона вплоть до достижения его предельной сжимаемости может осуществляться с использованием предложенной модели, которая косвенно учитывает дилатансионные явления.

Reference

1. Geniyev, G. A.; Kisyuk, V. N.; Tyupin, V. A. The theory of plasticity of concrete and reinforced concrete. – Moscow : Stroiizdat, 1974. – 216 p. – Text : direct. (in Russian)
2. Klovanych, S. F. Cohesive soil flow model. – Text : direct. – In: *The world of geotechnics*. – 2012. – № 1. – P. 16–20. (in Russian)
3. Petrakov, A. A. Practical methods for solving elastic-plastic problems with complex loading of concrete structures. – Text : direct. – In: *Modern*

- Текст : непосредственный // Современные проблемы строительства. Донецкий ПромстройНИИ-проект. – 1999. – № 7. – С. 65–69.
4. Петраков, А. А. Исследование уравнений состояния теории пластического течения / А. А. Петраков. – Текст : непосредственный // Будівельні конструкції. – 2008. – Выпуск 71. – С. 77–87.
 5. Петраков, А. А. Решение нелинейных задач МКЭ методом Ньютона – ПВР / А. А. Петраков, Н. А. Петракова, М. Д. Панасюк. – Текст : электронный // Современное промышленное и гражданское строительство. – 2017. – Т. 13, № 3. – С. 169–178. – URL: http://donnasa.ru/publish_house/journals/spgs/2017-3/05_petrakov_petrakova_panasjuk.pdf (дата опубликования 31.05.2017).
 6. Бондаренко, В. М. Железобетонные и каменные конструкции / В. М. Бондаренко, Д. Г. Суворкин. – Москва : Высшая школа, 1987. – 384 с. – Текст : непосредственный.
 7. ДБН В.2.6-98:2009. Бетонні та залізобетонні конструкції : видання офіційне : затверджено та надано чинності Наказом Мінрегіонбуд України від 24 грудня 2009 р. № 680 : на заміну СНиП 2.03.01-84* : надано чинності 2011-06-04 / розроблено Державним науково-дослідним інститутом будівельних конструкцій. – Київ : Міністерство регіонального розвитку та будівництва України. – 2011. – 71 с. – Текст : непосредственный.
 8. Методические рекомендации по уточненному расчету железобетонных элементов с учетом полной диаграммы сжатия бетона / НИИ строительных конструкций. – Киев : НИИСК, 1987. – 25 с. – Текст : непосредственный.
 9. Numerical Modeling of Masonry and Historical Structures from Theory to Application / B. Ghiassi, G. Milani, G. Bahman, M. Gabriele. – Cambridge, United States : Woodhead Publishing, 2019. – 795 p. – Текст : непосредственный.
 10. Zienkiewicz, O. C. The Finite Element Method : vol. 2. Solid Mechanics / O. C. Zienkiewicz, R. L. Taylor. – [5-th ed.]. – Oxford : Butterworth : Heinemann, 2000. – 459 p. – Текст : непосредственный.
 11. Schanz, T. The hardening soil model: formulation and verification / T. Schanz, P. A. Vermeer, P. G. Bonnier. – Текст : непосредственный // Beyond 2000 in Computational Geotechnics. 10 Years of Plaxis International, 18–20 March 1999, Amsterdam, Netherlands / edited by Ronald B. J. Brinkgreve. – Rotterdam : BROOKFIELD, 1999. – P. 281–296.
 12. Zingoni, A. Advances in Engineering Materials, Structures and Systems: Innovations, Mechanics and Applications / A. Zingoni. – Netherlands : CRC Press/Balkema, 2019. – 2398 p. – Текст : непосредственный.
 13. Structural Foundation Designers' Manual / W. G. Curtin, G. I. Parkinson, J. Golding [et. al.]. – UK : Blackwell Publishing, 2006. – 370 p. – Текст : непосредственный.
 - construction problems. Donetsk Promstroy Research Institute project. – 1999. – № 7. – P. 65–69. (in Russian)
 4. Petrakov, A. A. Investigation of the equations of state of the theory of plastic flow. – Text : direct. – In: *Building structures*. – 2008. – Issue 71. – P. 77–87. (in Russian)
 5. Petrakov, A. A.; Petrakova, N. A.; Panasyuk, M. D. Solving non-linear problems of the finite over elements by Newton method. – Text : electronic. – In: *Modern industrial and civil construction*. – 2017. – Vol. 13, № 3. – P. 169–178. – URL: http://donnasa.ru/publish_house/journals/spgs/2017-3/05_petrakov_petrakova_panasjuk.pdf (published 31.05.2017). (in Russian)
 6. Bondarenko, V. M.; Suvorkin, D. G. Reinforced concrete and stone structures. – Moscow : Higher school, 1987. – 384 p. – Text : direct. (in Russian)
 7. DBN V.2.6-98:2009. Concrete and reinforced concrete structures. – Kiev : Ministry of Regional Development and Construction of Ukraine. – 2011. – 71 p. – Text : direct. (in Ukrainian)
 8. Research Institute of Building Structures. Methodological recommendations for the refined calculation of reinforced concrete elements, taking into account the complete diagram of concrete compression. – Kiev : RIBS, 1987. – 25 p. – Text : direct (in Russian)
 9. Ghiassi, B.; Milani, G.; Bahman, G.; Gabriele, M. Numerical Modeling of Masonry and Historical Structures from Theory to Application. – Cambridge, United States: Woodhead Publishing, 2019. – 795 p. – Text : direct. (in English)
 10. Zienkiewicz, O. C.; Taylor, R. L. The Finite Element Method: vol. 2. Solid Mechanics. – [5-th ed.]. – Oxford : Butterworth : Heinemann, 2000. – 459 p. – Text : direct. (in English)
 11. Schanz, T.; Vermeer, P. A.; Bonnier, P. G. The hardening soil model: formulation and verification. – Text : direct. – In: *Beyond 2000 in Computational Geotechnics. 10 Years of Plaxis International*. – Rotterdam : BROOKFIELD, 1999. – P. 281–296. (in English)
 12. Zingoni, A. Advances in Engineering Materials, Structures and Systems: Innovations, Mechanics and Applications. – Netherlands: CRC Press/Balkema, 2019. – 2398 p. – Text : direct. (in English)
 13. Curtin, W. G.; Parkinson, G. I.; Golding, J. [et. al.]. Structural Foundation Designers' Manual. – UK : Blackwell Publishing, 2006. – 370 p. – Text : direct. (in English)

Панасюк Марк Дмитриевич – аспирант кафедры оснований, фундаментов и подземных сооружений ГОУ ВПО «Донбасская национальная академия строительства и архитектуры». Научные интересы: теория взаимодействия сооружений с деформирующимся основанием, в том числе на подрабатываемых территориях и на просадочных грунтах; разработка и исследование фундаментов повышенной несущей способности и методов их расчета на основе гипотез нелинейной геомеханики и теории строительных конструкций.

Петраков Александр Александрович – доктор технических наук, профессор; заведующий кафедрой оснований, фундаментов и подземных сооружений ГОУ ВПО «Донбасская национальная академия строительства и архитектуры». Научные интересы: теория взаимодействия сооружений с деформирующимся основанием, в том числе на подрабатываемых территориях и просадочных грунтах; разработка и исследование фундаментов повышенной несущей способности и методов их расчета на основе гипотез нелинейной геомеханики и теории строительных конструкций.

Петракова Наталья Александровна – кандидат технических наук, доцент кафедры оснований, фундаментов и подземных сооружений ГОУ ВПО «Донбасская национальная академия строительства и архитектуры». Научные интересы: теория взаимодействия сооружений с деформирующимся основанием, в том числе на подрабатываемых территориях и на просадочных грунтах; разработка и исследование фундаментов повышенной несущей способности и методов их расчета на основе гипотез нелинейной геомеханики и теории строительных конструкций.

Панасюк Марк Дмитрович – аспірант кафедри основ, фундаментів та підземних споруд ДООУ ВПО «Донбаська національна академія будівництва і архітектури». Наукові інтереси: теорія взаємодії споруд з деформованою основою, у тому числі на підроблюваних територіях і просадних грунтах; розроблення і дослідження фундаментів підвищеної несучої здатності і методів їх розрахунку на основі гіпотез нелінійної геомеханіки та теорії будівельних конструкцій.

Петраков Олександр Олександрович – доктор технічних наук, професор; завідувач кафедри основ, фундаментів і підземних споруд ДООУ ВПО «Донбаська національна академія будівництва і архітектури». Наукові інтереси: теорія взаємодії споруд з деформованою основою, у тому числі на підроблюваних територіях і просадних грунтах; розроблення і дослідження фундаментів підвищеної несучої здатності і методів їх розрахунку на основі гіпотез нелінійної геомеханіки та теорії будівельних конструкцій.

Петракова Наталя Олександрівна – кандидат технічних наук, доцент кафедри основ, фундаментів та підземних споруд ДООУ ВПО «Донбаська національна академія будівництва і архітектури». Наукові інтереси: теорія взаємодії споруд з деформованою основою, у тому числі на підроблюваних територіях і просадних грунтах; розроблення і дослідження фундаментів підвищеної несучої здатності і методів їх розрахунку на основі гіпотез нелінійної геомеханіки та теорії будівельних конструкцій.

Panasiuk Mark – Post-graduate student, Grounds, Foundations and Underground Structures Department, Donbas National Academy of Civil Engineering and Architecture. Scientific interests: theory of inter action with deformable structures base, including undermined territories and subsiding soils; development and research foundations increased carrying capacity and methods of their calculation on the basis of hypotheses and theories of nonlinear geomechanics constructions.

Petrakov Oleksandr – Dr. Sc. (Eng.), Professor, Grounds, Foundations and Underground Structures Department, Donbas National Academy of Civil Engineering and Architecture. Scientific interests: theory of inter action with deformable structures base, including undermined territories and subsiding soils; development and research foundations increased carrying capacity and methods of their calculation on the basis of hypotheses and theories of nonlinear geomechanics constructions.

Petrakova Natalia – Ph. D. (Eng.), Associate Professor; Head of the Grounds, Foundations and Underground Structures Department, Donbas National Academy of Civil Engineering and Architecture. Scientific interests: theory of inter action with deformable structures base, including undermined territories and subsiding soils; development and research foundations increased carrying capacity and methods of their calculation on the basis of hypotheses and theories of nonlinear geomechanics constructions.