ВЕСТНИК ДОНБАССКОЙ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ СТРОИТЕЛЬСТВА И АРХИТЕКТУРЫ

ISSN 2519-2817 online
Здания и сооружения с применением новых материалов и технологий
Выпуск 2022-3(155)

УДК 514.112.3

Т. П. МАЛЮТИНА
ГОУ ВПО «Донбасская национальная академия строительства и архитектуры»

ПРАКТИЧЕСКОЕ ПРИМЕНЕНИЕ ОБКАТКИ ПЛОСКИХ КРИВЫХ ПЛОСКОСТЬЮ

Аннотация. Рассматривается точечное задание обкатки плоских кривых плоскостью методами БН-исчисления (точечное исчисление Балюбы-Найдыша [1]) и практическое применение такой обкатки. Возможность точечного, а с ним и параметрического задания обкатки следует из того, что только в этом исчислении имеются возможности работы с такими объектами пространства. Две плоские кривые определены касательными, каждая из кривых задана двумя свободными функциями и расположена в своей плоскости. Учитывается условие, что касательные пересекаются или параллельны, которое определяется зависимостью четырех функций. При этом данная зависимость определяет плоскость обкатки и образующую линейчатой поверхности. Полученная обкатка плоских кривых плоскостью может быть использована при компьютерном моделировании машиностроительных деталей, а также при расчете и конструировании металлорежущих инструментов с применением вычислительной техники.

Ключевые слова: плоская кривая, обкатка плоскостью, касательная, свободная функция, зависимая функция, металлорежущий инструмент.

ФОРМУЛИРОВКА ПРОБЛЕМЫ

При проектировании и изготовлении большей части машиностроительных деталей и металлорежущего инструмента возникает необходимость в практическом использовании обкатки плоских кривых плоскостью. Для определения плоскости обкатки следует получить функциональную зависимость задания такой плоскости двумя касательными двух плоских кривых. Следовательно, требуется определить точечное уравнение и положение в пространстве плоских кривых, которые допускают обкатку плоскостью. Также необходимо определить свободу выбора функций задания касательных этих плоских кривых.

АНАЛИЗ ПОСЛЕДНИХ ИССЛЕДОВАНИЙ И ПУБЛИКАЦИЙ

Задачи обкатки плоских кривых плоскостью были решены синтетическими и компьютерно-графическими методами [5, 6]. Задача получения уравнения обкатки в общем виде была решена ранее, методами БН-исчисления [1, 2], в работе д. т. н., профессора И. Г. Балюбы и его учеников [3]. При этом уравнение обкатки кривых второго порядка получено ранее в работе последователя И. Г. Балюбы к. т. н., доцента Б. Ф. Горягина [4]. Необходимо показать практическое применение подобной обкатки плоских кривых плоскостью на примере изготовления деталей.

ЦЕЛИ

Привести точечное уравнение обкатки плоских кривых плоскостью с помощью математического аппарата БН-исчисления и рассмотреть пример применения такой обкати при изготовлении машиностроительных деталей и металлорежущего инструмента.

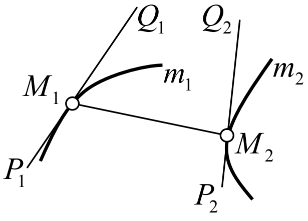

Рисунок 1 – Соответствие точек M_1, M_2 на плоских кривых m_1, m_2.

ОСНОВНОЙ МАТЕРИАЛ

В данной статье под обкаткой двух плоских кривых m_1, m_2 плоскостью (рис. 1) понимается установление однозначного соответствия точек $M_1 \subset m_1$ и $M_2 \subset m_2$, при котором касательные P_1Q_1 и P_2Q_2 определяют плоскость обкатки. При необходимости определяется линейчатая поверхность с образующей M_1M_2 и направляющими m_1 и m_2.

В отвлеченной декартовой системе координат зададим точки: $A(x_A, y_A, z_A)$, $B(x_B, y_B, z_B)$, $C(x_C, y_C, z_C)$ (рис. 2). Отношением $u = AP_1/AC$ зададим на прямой AC точку P_1, а отношением $v = CQ_1/CB$ зададим точку Q_1 на CB. Различные значения u и v на прямых AC, CB определяют различные точки P_1Q_1.

Пусть $u_1 = u_1(t)$, $v_1 = v_1(t)$ некоторые функции, определенные одновременно на некотором отрезке значений параметра t. Тогда каждому значению параметра t соответствует пара точек, которые определяют прямую P_1Q_1 (рис. 3):

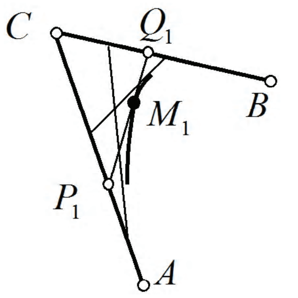

Рисунок 2 – Однопараметрическое множество прямых P_1Q_1 и их огибающая.

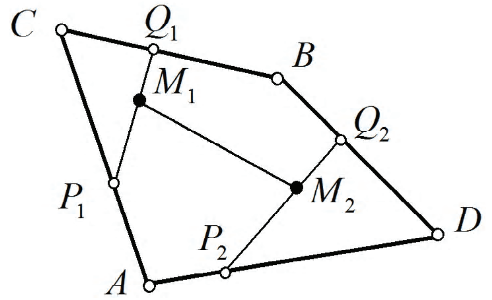

Рисунок 3 – Обкатка кривых M_1 и M_2 плоскостью $P_1Q_1Q_2P_2$.

$$P_1 = (C - A)u_1(t) + A, \; Q_1 = (B - C)v_1(t) + C.$$

Пучок прямых имеет огибающую кривую. Точку M_1 на этой кривой и на P_1Q_1 определяет отношение

$$w_1 = {P_1M_1}/{P_1Q_1} = \frac{\dot{u}_1 v_1}{\dot{u}_1 v_1 + \overline{u}_1 \dot{v}_1}, \text{ где } \dot{u}_1 = \frac{du_1}{dt}, \; \overline{u}_1 = 1 - u_1, \; \dot{v}_1 = \frac{dv_1}{dt}.$$

При этом точечное уравнение огибающих принимает вид [1]:

$$M_1 = (A - C)\frac{\overline{u}_1^2 \dot{v}_1}{\dot{u}_1 v_1 + \overline{u}_1 \dot{v}_1} + (B - C)\frac{v_1^2 \dot{u}_1}{\dot{u}_1 v_1 + \overline{u}_1 \dot{v}_1} + C. \tag{1}$$

$$M_2 = (A - C)\frac{\overline{u}_2^2 \dot{v}_2}{\dot{u}_2 v_2 + \overline{u}_2 \dot{v}_2} + (B - C)\frac{v_2^2 \dot{u}_2}{\dot{u}_2 v_2 + \overline{u}_2 \dot{v}_2} + C. \tag{2}$$

Далее переходим к симплексу $DABC$ (рис. 3), который через координаты точек D, A, B, C включен в глобальную систему координат. Кривые, заданные касательными, приводятся в соответствие поточечно, определяется соответствие точек на кривых на основании компланарности касательных – зависимостью функций их определяющих.

Чтобы определить эту зависимость функций $u_1 = u_1(t)$, $v_1 = v_1(t)$, $u_2 = u_2(t)$, $v_2 = v_2(t)$ необходимо приравнять нулю объем пирамиды $P_1Q_1P_2Q_2$:

$$\begin{vmatrix} \overline{u}_1 & 0 & u_1 & 0 \\ 0 & v_1 & \overline{v}_1 & 0 \\ \overline{u}_2 & 0 & 0 & u_2 \\ 0 & v_2 & 0 & \overline{v}_2 \end{vmatrix} = \overline{u}_1\overline{v}_1 u_2 v_2 - u_1 \overline{v}_2 \overline{u}_2 v_1 = 0 \rightarrow \frac{\overline{u}_1\overline{v}_1}{u_1 v_1} = \frac{\overline{v}_2\overline{u}_2}{u_2 v_2} = k, \;\; v_1 = \frac{\overline{u}_1}{\overline{u}_1 + k u_1}, \;\; v_2 = \frac{\overline{u}_2}{\overline{u}_2 + k u_2}. \tag{3}$$

Составим уравнение линейчатой поверхности на основании линейной интерполяции между кривыми M_1 и M_2 (рис. 3):

$$M = M_1\overline{\tau} + M_2\tau = (M_2 - M_1)\tau + M_1. \tag{4}$$

После подстановки уравнений кривых из (1) и (2) и преобразований, получим точечное уравнение линейчатой поверхности:

$$M = (A-C)\left(\frac{\overline{u}_2^2\dot{v}_2\tau}{\dot{u}_2v_2+\overline{u}_2\dot{v}_2}+\frac{\overline{u}_1^2\dot{v}_1\overline{\tau}}{\dot{u}_1v_1+\overline{u}_1\dot{v}_1}\right)+(B-C)\left(\frac{v_2^2\dot{u}_2\tau}{\dot{u}_2v_2+\overline{u}_2\dot{v}_2}+\frac{v_1^2\dot{u}_1\overline{\tau}}{\dot{u}_1v_1+\overline{u}_1\dot{v}_1}\right)+C, \tag{5}$$

где u_1, u_2, v_1, v_2 – функции от параметра t, причем

$$\frac{\overline{u}_1\overline{v}_1}{u_1v_1}=\frac{\overline{u}_2\overline{v}_2}{u_2v_2}=k(t);\;\; \dot{u}_1=\frac{du_1}{dt},\dot{u}_2=\frac{du_2}{dt},\dot{v}_1=\frac{dv_1}{dt},\dot{v}_2=\frac{dv_2}{dt},$$

$$\overline{u}_1=1-u_1,\overline{u}_2=1-u_2,\overline{v}_1=1-v_1,\overline{v}_2=1-v_2.$$

Переход от точечного уравнения обкатки к параметрическому в прямоугольном декартовом симплексе $OE_1E_2E_3$ в исчислении заложен автоматически через покоординатное задание:

$$x_M=(x_A-x_C)\left(\frac{\overline{u}_2^2\dot{v}_2\tau}{\dot{u}_2v_2+\overline{u}_2\dot{v}_2}+\frac{\overline{u}_1^2\dot{v}_1\tau}{\dot{u}_1v_1+\overline{u}_1\dot{v}_1}\right)+(x_B-x_C)\left(\frac{v_2^2\dot{u}_2\tau}{\dot{u}_2v_2+\overline{u}_2\dot{v}_2}+\frac{v_1^2\dot{u}_1\overline{\tau}}{\dot{u}_1v_1+\overline{u}_1\dot{v}_1}\right)+x_A;$$

$$y_M=(y_A-y_C)\left(\frac{\overline{u}_2^2\dot{v}_2\tau}{\dot{u}_2v_2+\overline{u}_2\dot{v}_2}+\frac{\overline{u}_1^2\dot{v}_1\tau}{\dot{u}_1v_1+\overline{u}_1\dot{v}_1}\right)+(y_B-y_C)\left(\frac{v_2^2\dot{u}_2\tau}{\dot{u}_2v_2+\overline{u}_2\dot{v}_2}+\frac{v_1^2\dot{u}_1\overline{\tau}}{\dot{u}_1v_1+\overline{u}_1\dot{v}_1}\right)+y_A;$$

$$z_M=(z_A-z_C)\left(\frac{\overline{u}_2^2\dot{v}_2\tau}{\dot{u}_2v_2+\overline{u}_2\dot{v}_2}+\frac{\overline{u}_1^2\dot{v}_1\tau}{\dot{u}_1v_1+\overline{u}_1\dot{v}_1}\right)+(z_B-z_C)\left(\frac{v_2^2\dot{u}_2\tau}{\dot{u}_2v_2+\overline{u}_2\dot{v}_2}+\frac{v_1^2\dot{u}_1\overline{\tau}}{\dot{u}_1v_1+\overline{u}_1\dot{v}_1}\right)+z_A.$$

Последнее параметрическое уравнение (5) определяет обкатку плоских кривых (1), (2) плоскостей ABC и ABD в самом общем виде. Возможность точечного, а с ним и параметрического задания обкатки следует из того, что только в этом исчислении для этого имеются три возможности работы с объектами пространства:

1. Кривую можно определить не только множеством точек, но и множеством касательных ее – кривая задается не только функциями, но и их производными. Эта возможность позволяет одновременно рассматривать кривую двойственно, что позволяет более сложную задачу интегрирования заменить более простой операцией дифференцирования.

2. Каждую кривую определяют и работают с ней в ее плоскости (симплексе), а с двумя кривыми работают в пространстве (симплексе), которое определяют две плоскости.

3. Результат такой раздельной работы с симплексами, автоматически (покоординатно) переводится в глобальную систему координат (в которой задавалось условие задачи) в виде привычных для расчета параметрических уравнений.

Дальнейшие методы конструирования и исследования могут сконцентрироваться на оптимизации подбора свободных функций, входящих в соотношение (3). Эти возможности позволяют решать многие практические задачи, которые недоступны другими средствами.

Применение обкатки плоских кривых плоскостью при изготовлении машиностроительных деталей и металлорежущего инструмента представлено на рис. 4.

В перспективе открываются возможности аналитических и дифференциальных исследований по конструированию геометрических форм, полученных на основе обкатки, которые дополнят существующие возможности синтетических и компьютерно-графических методов.

ВЫВОДЫ

В статье приведено точечное уравнение обкатки плоских кривых плоскостью с помощью математического аппарата БН-исчисления и рассмотрен один из примеров применения такой обкатки при изготовлении машиностроительных деталей и металлорежущего инструмента.

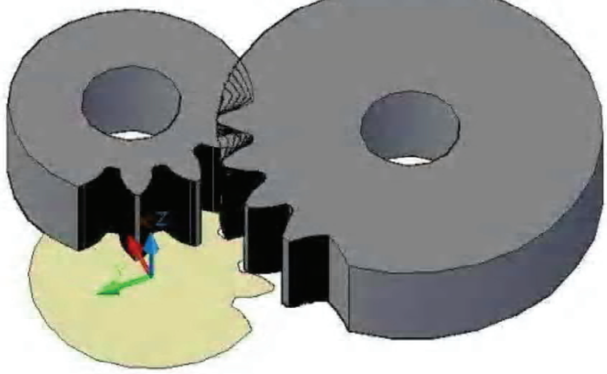

Рисунок 4 – Компьютерное моделирование машиностроительных деталей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Балюба, И. Г. Конструктивная геометрия многообразий в точечном исчислении : 05.01.01 «Инженерная геометрия и компьютерная геометрия» : диссертация на соискание научной степени доктора технических наук / Балюба Иван Григорьевич ; Киевский государственный университет строительства и архитектуры. – Киев, 1995. – 227 с
2. Давыденко, И. П. Точечное задание закономерных пространственных ломаных и их применение при конструировании линий и поверхностей : 05.01.01 «Инженерная геометрия и компьютерная геометрия» : диссертация на соискание научной степени кандидата технических наук / Давыденко Иван Петрович; Таврическая государственная агротехническая академия. – Мелитополь, 2009. – 168 с.
3. Кузнецов, С. Г. Обкатка плоских кривых плоскостью / С. Г. Кузнецов, И. Г. Балюба, Б. Ф. Горягин, Т. П. Малютина, И. П Давыденко // Прикладна геометрія та інженерна графіка (спецвипуск): міжвідомчий науково-технічний збірник. – 2011. – Випуск 87. – С. 220–224.
4. Горягин, Б. Ф. Поверхность торса в точечном описании / Б. Ф. Горягин, А. Н. Клен // Прикладная геометрия и инженерная графика: Труды Таврической государственной агротехнической академии. – 1999. – Выпуск 4. – Том 8. – С. 9–15.
5. Обухова, В. С. Конструирование сопровождающих торсов пространственных кривых / В. С. Обухова // Прикладна геометрія та інженерна графіка: міжвідомча науково-технічна збірка. – Випуск 61. – Київ : КДТУБА, 1997. – С. 13–18.
6. Підгорний, О. Л. Утворення нелінійчатої поверхні 3-го порядку в перетині конгруенції прямих та в'язки площин / О. Л. Підгорний, В. М Несвідомін // Прикладна геометрія та інженерна графіка: Праці Таврійської державної агротехнічної академії. – 2007. – Випуск 4. – Том 36. – С. 9–15.

Получена 13.03.2022

Т. П. МАЛЮТІНА
ПРАКТИЧНЕ ЗАСТОСУВАННЯ ОБКАТКИ ПЛОСКИХ КРИВИХ ПЛОЩИНОЮ
ДОУ ВПО «Донбаська національна академія будівництва і архітектури»

Анотація. Розглядається точкове завдання обкатки плоских кривих площиною методами БН-обчислення (точкове обчислення Балюби-Найдиша [1]) і практичне застосування такої обкатки. Можливість точкового, а з ним і параметричного завдання обкатки випливає з того, що тільки в цьому обчисленні є можливості роботи з такими об'єктами простору. Дві плоскі криві визначені дотичними, кожна з кривих задана двома вільними функціями і розташована в своїй площині. Враховується умова, що дотичні перетинаються або паралельні, яка визначається залежністю чотирьох функцій. При цьому дана залежність визначає площину обкатки і твірну лінійчатої поверхні. Отримана обкатка плоских кривих площиною може бути використана при комп'ютерному моделюванні машинобудівних деталей, а також при розрахунку і конструюванні металорізальних інструментів із застосуванням обчислювальної техніки.
Ключові слова: плоска крива, обкатка площиною, дотична, вільна функція, залежна функція, металоріжучий інструмент.

TATYANA MALYUTINA
PRACTICAL APPLICATION OF RUNNING-IN OF FLAT CURVES BY PLANE
Donbas National Academy of Civil Engineering and Architecture

Abstract. The point task of running-in of flat curves by a plane by methods of BN-calculus (point calculus of Balyuba-Naydysh [1]) and the practical application of such a run-in are considered. The possibility of a point, and with it a parametric task of running-in follows from the fact that only in this calculus there are opportunities to work with such objects of space. Two plane curves are defined by tangents, each of the curves is defined by two free functions and is located in its own plane. The condition is taken into account that the tangents intersect or are parallel, which is determined by the dependence of four functions. At the same time, this dependence determines the running-in plane and the forming of the ruled surface. The resulting run-in of flat curves with a plane can be used in computer modeling of machine-building parts, as well as in the calculation and design of metal-cutting tools using computer technology.
Key words: flat curve, rolling by a plane, tangent, free function, dependent function, metal-cutting instrument.

Малютина Татьяна Петровна – кандидат технических наук, доцент кафедры специализированных информационных технологий и систем ГОУ ВПО «Донбасская национальная академия строительства и архитектуры». Научные интересы: развитие альтернативного геометрического аппарата рационального описания контуров геометрических тел, создание расчетных моделей различных технических форм в процессе их проектирования на основе различных методов математического аппарата БН-исчисления.

Малютіна Тетяна Петрівна – кандидат технічних наук, доцент кафедри спеціалізованих інформаційних технологій і систем ДОУ ВПО «Донбаська національна академія будівництва і архітектури». Наукові інтереси: розвиток альтернативного геометричного апарата раціонального опису контурів геометричних тіл, створення розрахункових моделей різних технічних форм у процесі їх проектування на основі різних методів математичного апарату БН-обчислення.

Malyutina Tatyana – Ph. D. (Eng.), Associate Professor, Specialized Information Technology and Systems Department, Donbas National Academy of Civil Engineering and Architecture. Scientific interests: development of an alternative geometric apparatus for rational description of contours of geometric bodies, creation of computational models of various technical forms in the process of their design based on the mathematical apparatus of BN-calculus.