

УДК 514.112.8.3

Т. П. МАЛЮТИНА, Я. Р. ЛИМАНОВСКИЙ

ГОУ ВПО «Донбасская национальная академия строительства и архитектуры»

ЗАДАНИЕ ПАРЫ БЛИЖАЙШИХ ТОЧЕК НА СКРЕЩИВАЮЩИХСЯ ПРЯМЫХ ГРАФИЧЕСКИМ И ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫМ МЕТОДАМИ

Аннотация. В статье предложено решение позиционной задачи на скрещивающиеся прямые – определение ближайших точек на этих прямых. Рассматриваются два алгоритма: графический, решаемый методом начертательной геометрии, и вычислительный, основанный на аналитическом методе точечного исчисления. С помощью математического аппарата Балюбы-Найдыша (БН)-исчисления были заданы текущие положения оснований перпендикуляров, проведенных из соответствующих точек на скрещивающихся прямых. Получена система точечных уравнений, которая определяет задание ближайших точек, расположенных на общем перпендикуляре двух скрещивающихся прямых. В случае, если точки совпадут, будет найдена точка пересечения прямых. Подробно представленное описание вычислительного алгоритма нахождения расстояния между скрещивающимися прямыми является примером внедрения элементов точечной геометрии в рамках дисциплины «Инженерная и компьютерная графика» при подготовке бакалавров инженерных специальностей.

Ключевые слова: БН-исчисление, точечное уравнение, вычислительный алгоритм, основание перпендикуляра, метрический оператор трех точек.

ФОРМУЛИРОВКА ПРОБЛЕМЫ

Для инженерной практики многомерного пространства положение прямых удобно характеризовать расстоянием между прямыми или ближайшими точками на этих прямых. Поэтому, полезно иметь аналитическое соотношение их определения через заданные точки A_1, A_2, A_3, A_4 .

АНАЛИЗ ПОСЛЕДНИХ ИССЛЕДОВАНИЙ И ПУБЛИКАЦИЙ

Эта статья является продолжением работы авторов над расширением возможностей БН-исчисления [1, 2], которое активно развивается всеми членами кафедры «Специализированные информационные технологии и системы» ДонНАСА, чему были посвящены следующие их труды [3–5].

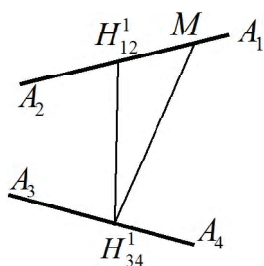


Рисунок – Геометрическое определение расстояния между прямыми.

ЦЕЛИ

На прямой A_1A_2 определить точку H^{12} , ближайшую к прямой A_3A_4 , если заданы точки A_1, A_2, A_3, A_4 (рисунок).

ОСНОВНОЙ МАТЕРИАЛ

Ближайшие точки на прямых располагаются на общем перпендикуляре к этим прямым. Для определения параметра t искомой точки на прямой A_1A_2 , используем следующий расчетный алгоритм.

Зададим текущую точку M на прямой A_1A_2 :

$$M = A_{21}t + A_1, \quad (1)$$

где $A_{ij} = A_i - A_j$.

1. Определим основание перпендикуляра H_{34}^1 , опущенного из точки M на прямую A_3A_4 :

$$H_{34}^1 = \frac{A_3 \Sigma_{M3}^4 + A_4 \Sigma_{M4}^3}{\Sigma_{M3}^4 + \Sigma_{M4}^3}, \quad (2)$$

где $\Sigma_{M3}^4 + \Sigma_{M4}^3 = |A_3 A_4|^2$.

2. Определим основание перпендикуляра H_{12}^1 опущенного из точки H_{34}^1 на прямую $A_1 A_2$:

$$\begin{aligned} H_{12}^1 &= \frac{A_1 \Sigma_{1H_{34}^1}^2 + A_2 \Sigma_{2H_{34}^1}^1}{|A_1 A_2|^2} = \frac{A_1 \Sigma A_{12} (H_{34}^1 - A_2) - A_2 \Sigma A_{12} (H_{34}^1 - A_1)}{|A_1 A_2|^2} = \\ &= A_1 \Sigma A_{12} \frac{A_{32} \Sigma_{M3}^4 + A_{42} \Sigma_{M4}^3}{|A_3 A_4|^2 |A_1 A_2|^2} - A_2 \Sigma A_{12} \frac{A_{31} \Sigma_{M3}^4 + A_{41} \Sigma_{M4}^3}{|A_3 A_4|^2 |A_1 A_2|^2} = \\ &= A_1 \frac{\Sigma_{13}^2 \Sigma_{M3}^4 + \Sigma_{14}^2 \Sigma_{M4}^3}{|A_3 A_4|^2 |A_1 A_2|^2} + A_2 \frac{\Sigma_{23}^1 \Sigma_{M3}^4 + \Sigma_{24}^1 \Sigma_{M4}^3}{|A_3 A_4|^2 |A_1 A_2|^2}. \end{aligned} \quad (3)$$

Для искомой точки основания H_{12}^1 и M должны совпадать, тогда получим систему точечных уравнений:

$$\begin{cases} \Sigma_{13}^2 \Sigma_{M3}^4 + \Sigma_{14}^2 \Sigma_{M4}^3 = \bar{t} |A_3 A_4|^2 |A_1 A_2|^2, \\ \Sigma_{23}^1 \Sigma_{M3}^4 + \Sigma_{24}^1 \Sigma_{M4}^3 = t |A_3 A_4|^2 |A_1 A_2|^2. \end{cases} \quad (4)$$

Суммируя эти два уравнения системы, получим тождество. Следовательно, мы имеем не систему, а два вида одного и того же уравнения. Преобразуем это уравнение:

$$\begin{aligned} \Sigma_{23}^1 \Sigma_{M3}^4 + \Sigma_{24}^1 \Sigma_{M4}^3 + \Sigma_{13}^2 \Sigma_{M3}^4 - \Sigma_{14}^2 \Sigma_{M4}^3 &= t |A_3 A_4|^2 |A_1 A_2|^2 \rightarrow \\ \rightarrow \Sigma_{23}^1 |A_3 A_4|^2 + (\Sigma_{24}^1 - \Sigma_{14}^2) \Sigma_{M4}^3 &= t [|A_3 A_4|^2 |A_1 A_2|^2 - (\Sigma_{24}^1 - \Sigma_{14}^2) \Sigma_{M4}^3]. \end{aligned} \quad (5)$$

Из полученного уравнения находим параметр t для точки H^{12} прямой $A_1 A_2$, ближайшей к прямой $A_3 A_4$:

$$t = \frac{\Sigma_{23}^1 |A_3 A_4|^2 + (\Sigma_{24}^1 - \Sigma_{14}^2) \Sigma_{M4}^3}{|A_3 A_4|^2 |A_1 A_2|^2 - (\Sigma_{24}^1 - \Sigma_{14}^2) \Sigma_{M4}^3}. \quad (6)$$

Тогда искомая точка определяется следующим точечным уравнением:

$$H^{12} = A_{21} \frac{\Sigma_{23}^1 \Sigma_{22}^1 \Sigma_{44}^3 + (\Sigma_{24}^1 - \Sigma_{14}^2) \Sigma_{14}^3}{\Sigma_{44}^3 \Sigma_{22}^1 - (\Sigma_{24}^1 - \Sigma_{14}^2)^2} + A_1. \quad (7)$$

Меняя индексы, получим ближайшую точку H^{34} на прямой $A_3 A_4$:

$$H^{34} = A_{43} \frac{\Sigma_{41}^3 \Sigma_{44}^3 \Sigma_{22}^1 + (\Sigma_{24}^3 - \Sigma_{41}^3) \Sigma_{32}^1}{\Sigma_{22}^1 \Sigma_{44}^3 - (\Sigma_{24}^3 - \Sigma_{41}^3)^2} + A_3. \quad (8)$$

Если точки H^{12} и H^{34} совпадают, то они определяют точку пересечения прямых, а если нет, то это ближайшие точки на скрещивающихся прямых.

Поставленную задачу можно решить другим способом, если представить расстояние $(H_{12}^1 H_{34}^1)^2$, как функцию и отыскать ее минимум.

Итак, для определения ближайших точек на прямых $A_1 A_2$ и $A_3 A_4$ можно применить следующий вычислительный алгоритм.

1. На прямых $A_1 A_2$ и $A_3 A_4$ зададим текущие точки M и N :

$$M = A_{21} u + A_1, \quad N = A_{43} v + A_3. \quad (9)$$

2. Определим квадрат расстояния между текущими точками с помощью метрического оператора трех точек прямой:

$$\begin{aligned}(MN)^2 &= \Sigma[A_{21}u + A_{13} - A_{43}v]^2 = \\ &= (A_1A_2)^2u^2 + (A_1A_3)^2 + (A_3A_4)^2v^2 - 2\Sigma_{23}^1u - 2\Sigma_{21}A_{43}uv - 2\Sigma_{14}^3v.\end{aligned}\quad (10)$$

3. Приравняем к нулю производные этого квадрата расстояния по параметру u и по параметру v :

$$\begin{cases} 2(A_1A_2)^2u - 2\Sigma_{23}^1 - 2\Sigma_{21}A_{43}v = 0, \\ 2(A_3A_4)^2v - 2\Sigma_{21}A_{43}u - 2\Sigma_{14}^3 = 0. \end{cases}\quad (11)$$

4. Решим полученную систему точечных уравнений в соответствии с параметрами u и v :

$$\begin{aligned}&\begin{cases} (A_1A_2)^2u - \Sigma_{21}A_{43}v = \Sigma_{23}^1 \\ (-\Sigma_{21}A_{43}u + (A_3A_4)^2v = \Sigma_{14}^3 \end{cases} \rightarrow \\ &\rightarrow u = \frac{\Sigma_{23}^1(A_3A_4)^2 + \Sigma_{14}^3\Sigma_{21}A_{43}}{(A_1A_2)^2(A_3A_4)^2 - (\Sigma_{21}A_{43})^2}, v = \frac{\Sigma_{14}^3(A_1A_2)^2 + \Sigma_{23}^1\Sigma_{21}A_{43}}{(A_1A_2)^2(A_3A_4)^2 - (\Sigma_{21}A_{43})^2}.\end{aligned}\quad (12)$$

5. Подставляя значение u и v в уравнение (9), окончательно находим:

$$\begin{aligned}H_{12}^1 &= A_{21} \frac{\Sigma_{23}^1(A_3A_4)^2 + \Sigma_{14}^3\Sigma_{21}A_{43}}{(A_1A_2)^2(A_3A_4)^2 - (\Sigma_{21}A_{43})^2} + A_1, \\ H_{34}^1 &= A_{43} \frac{\Sigma_{14}^3(A_1A_2)^2 + \Sigma_{23}^1\Sigma_{21}A_{43}}{(A_1A_2)^2(A_3A_4)^2 - (\Sigma_{21}A_{43})^2} + A_3.\end{aligned}\quad (13)$$

ВЫВОДЫ

Предложены два вычислительных алгоритма аналитического определения точки, которая принадлежит прямой, ближайшей к другой прямой, если прямые скрещиваются. Каждому геометрическому алгоритму решения задачи соответствует свой вычислительный алгоритм. Нахождение таких точек часто необходимо для решения прикладных задач.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Балюба, И. Г. Точечное исчисление : учебное пособие / И. Г. Балюба, В. М. Найдыш. – Мелитополь : Изд-во МГПУ им. Б. Хмельницкого, 2015. – 234 с. – Текст : непосредственный.
2. Балюба, И. Г. Конструктивная геометрия многообразий в точечном исчислении : 05.01.01 «Инженерная геометрия и компьютерная геометрия» : диссертация на соискание научной степени доктора технических наук / Балюба Иван Григорьевич ; Киевский государственный университет строительства и архитектуры. – Киев, 1995. – 227 с. – Текст : непосредственный.
3. Малютина, Т. П. Интерпретация вычислительной геометрии плоских фигур в точечном исчислении : 05.01.01 «Инженерная геометрия и компьютерная геометрия» : диссертация на соискание научной степени кандидата технических наук / Малютина Татьяна Петровна ; Киевский национальный технический университет строительства и архитектуры. – Киев, 1998. – 161 с. – Текст : непосредственный.
4. Конопацкий, Е. В. Некоторые вопросы математического и компьютерного моделирования в строительстве / Е. В. Конопацкий. – Текст : непосредственный // Информатика и кибернетика. – 2016. – № 2(4)-2016. – С. 37–42.
5. Введение в математический аппарат БН-исчисления / А. И. Бумага, Е. В. Конопацкий, А. А. Крысько, О. А. Чернышева. – Текст : непосредственный // Проблемы качества графической подготовки студентов в техническом вузе: традиции и инновации : труды Пермского исследовательского национального исследовательского политехнического университета. – 2017. – Том 1. – С. 76–82.

Получена 04.05.2022

Т. П. МАЛЮТИНА, Я. Р. ЛІМАНОВСЬКИЙ
 ЗАДАНИЯ ПАРИ НАЙБЛИЖЧИХ ТОЧОК НА ПРЯМИХ, ЩО
 СХРЕЩУЮТЬСЯ, ГРАФІЧНИМ І ОБЧИСЛЮВАЛЬНИМ МЕТОДАМИ
 ДООУ ВПО «Донбаська національна академія будівництва і архітектури»

Анотація. У статті запропоновано рішення позиційної задачі на прямих, що схрещуються, – визначення найближчих точок на цих прямих. Розглядаються два алгоритми: графічний, вирішуваний методом точкової геометрії, і обчислювальний, ґрунтований на аналітичному методі точкового числення. За допомогою математичного апарата Балюби-Найдиша (БН)-обчислення були задані поточні положення основ перпендикулярів, проведених з відповідних точок на прямих, що схрещуються. Отримана система точкових рівнянь, яка визначає задання найближчих точок, розташованих на загальному перпендикулярі двох прямих, що схрещуються. У разі, якщо точки співпадуть, буде знайдена точка перетину прямих. Детально представлений опис обчислювального алгоритму знаходження відстані між прямими, що схрещуються, є прикладом впровадження елементів точкової геометрії у рамках дисципліни «Інженерна і комп'ютерна графіка» при підготовці бакалаврів інженерних спеціальностей.

Ключові слова: точкове (БН-) обчислення, точкове рівняння, обчислювальний алгоритм, основа перпендикуляра, метричний оператор трьох точок.

TATYANA MALUTINA, JAROSLAV LIMANOVSKIY
 SETTING A PAIR OF NEAREST POINTS ON INTERSECTING LINES BY
 GRAPHICAL AND COMPUTATIONAL METHODS
 Donbas National Academy of Civil Engineering and Architecture

Abstract. The article proposes a solution to the positional problem for crossing lines - the operation of the nearest points on these lines. Two algorithms are considered: graphical, solved by the method of descriptive geometry, and computational, based on the analytical method of point calculus. With the help of the mathematical apparatus of Balyuba-Naidysh (BN) – calculation, the current positions of the bases of perpendiculars drawn from the corresponding points on the crossing lines were set. A system of then-Chechen equations is obtained, which determines the definition of the nearest points located on the common perpendicular of two crossing lines. If the points coincide, the intersection point of the lines will be found. The detailed description of the computational algorithm for finding the distance between intersecting straight lines is an example of the introduction of point geometry elements within the discipline «Engineering and Computer Graphics» in the preparation of bachelors of engineering specialties.

Key words: BN-calculus, point equation, computational algorithm, base of the perpendicular, metric operator of three points.

Малютина Татьяна Петровна – кандидат технических наук, доцент кафедры специализированных информационных технологий и систем ГОУ ВПО «Донбасская национальная академия строительства и архитектуры». Научные интересы: развитие альтернативного геометрического аппарата рационального описания контуров геометрических тел, создание расчетных моделей различных технических форм в процессе их проектирования на основе различных методов математического аппарата БН-исчисления.

Лимановский Ярослав Романович – студент ГОУ ВПО «Донбасская национальная академия строительства и архитектуры». Научные интересы: изучение и освоение механизма работы математического аппарата точечного БН-исчисления, решение задач исследования плоских и объемных пространственных образований при создании их расчетных алгоритмов, приспособленных для дальнейшего использования компьютерных программ.

Малютіна Тетяна Петрівна – кандидат технічних наук, доцент кафедри спеціалізованих інформаційних технологій і систем ДООУ ВПО «Донбаська національна академія будівництва і архітектури». Наукові інтереси: розвиток альтернативного геометричного апарата раціонального опису контурів геометричних тіл, створення розрахункових моделей різних технічних форм у процесі їх проектування на основі різних методів математичного апарата БН-обчислення.

Лімановський Ярослав Романович – студент ДООУ ВПО «Донбаська національна академія будівництва і архітектури». Наукові інтереси: вивчення і освоєння механізму роботи математичного апарата точкового БН-обчислення, розв'язання задач дослідження плоских і об'ємних просторових утворень при створенні їх розрахункових алгоритмів, пристосованих для подальшого використання комп'ютерних програм.

Malyutina Tatyana – Ph. D. (Eng.), Associate Professor, Specialized Information Technology and Systems Department, Donbas National Academy of Civil Engineering and Architecture. Scientific interests: development of an alternative geometric apparatus for rational description of contours of geometric bodies, creation of computational models of various technical forms in the process of their design based on the mathematical apparatus of BN-calculus.

Limanovskiy Yaroslav – student, Donbas National Academy of Civil Engineering and Architecture. Scientific interests: studying and mastering the mechanism of operation of the mathematical apparatus of precision (BN) calculus by the example of obtaining new ratios of singular points of a triangle, solving problems with flat figures, the determinant of which includes points of the simplex.