

# МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЕРОЯТНОСТНЫХ ПАРАМЕТРОВ НАГРУЗОК В ЗАДАЧАХ ОЦЕНКИ БЕЗОПАСНОСТИ И РЕСУРСА ЗДАНИЙ И СООРУЖЕНИЙ

**В.А. Пшеничкина** доктор техн. наук, профессор; **А.В. Глухов**; **С.Г. Глухова**  
ФГБОУ ВО «Волгоградский государственный технический университет»

*Аннотация.* Статья посвящена оценке статистических характеристик суммарной обобщенной нагрузки, включающей постоянную, временную длительную, снеговую и ветровую. На основе известных законов распределения каждой из составляющих нагрузок получены их центральные статистические моменты и приближенный закон распределения для обобщенной нагрузки. Полученные результаты предназначены для практического решения задач оценки безопасности и остаточного ресурса зданий и сооружений.

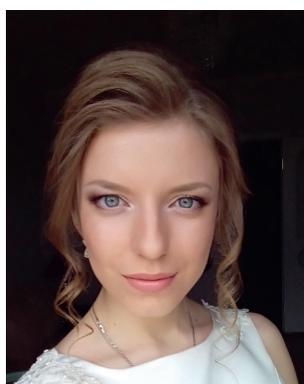
*Ключевые слова:* вероятностные методы расчета строительных конструкций, расчет на безопасность, логарифмически нормальный закон, закон Гумбеля, закон Вейбулла, ряд Грамма-Шарлье.



*Пшеничкина  
Валерия Александровна*



*Глухов  
Антон Викторович*



*Глухова  
Светлана Геннадиевна*

Метод предельных состояний обеспечивает достаточно высокий уровень надежности зданий и сооружений типовых конструктивных решений на действие обычных нагрузок, но, являясь полувариантным, он не дает возможности получить численную оценку надежности. Вместе с тем задача оценки надежности (риска) является актуальной для объектов, эксплуатируемых в сейсмических районах, в сложных инженерно-геологических условиях (на просадочных, набухающих, вечно мерзлых оттаивающих грунтах, на карстовых и порабатываемых территориях). Согласно [1], для нагрузок и воздействий, рассматриваемых как редкие события высокой интенсивности, устанавливается более низкий проектный уровень надежности, так как при высокой степени неопределенности расчетных параметров нагрузок дополнительные расходы, направленные на достижение высокого уровня надежности, неэффективны. Уровень риска разрушений и повреждений для таких объектов по отношению к экстремальным нагрузкам составляет 20-30% [2,3]. Численная оценка риска актуальна при экспертизе остаточного ресурса зданий, для которых время эксплуатации приближается к нормативному, а также для обоснования возможности эксплуатации зданий сверх нормативного срока службы.

Классические вероятностные методы расчета строительных конструкций сложны для инженерного приложения и требуют большого объема статистической информации, которая в настоящее время отсутствует. Все современные практические методы расчета безопасности конструкций основаны на понятии индекса надежности, который был введен А.Р. Ржаницыным [4].

Задача расчета конструкций на безопасность формулируется в виде:

$$\tilde{S} = \tilde{R} - \tilde{F}, \quad (1)$$

где  $\tilde{R}$  – обобщенная прочность конструкции (предел текучести, предел прочности, пластический момент и др.);  $\tilde{F}$  – обобщенная нагрузка (нагрузочный эффект);  $\tilde{S}$  – резерв прочности. Знак  $\sim$  обозначает случайную величину.

Расчет на безопасность проводится в корреляционном приближении с учетом двух числовых характеристик параметров (1) – математических ожиданий  $\bar{R}$ ,  $\bar{F}$  и дисперсий  $\sigma_R^2$ ,  $\sigma_F^2$ . Уровень безопасности определяется при помощи индекса надежности:

$$\beta = \frac{\bar{S}}{\sigma_s} = \frac{\bar{R} - \bar{F}}{\sqrt{\sigma_R^2 - \sigma_F^2}}, \quad (2)$$

который непосредственно связан с вероятностью отказа  $P(\tilde{S} < 0)$ .

Из двух обобщенных параметров формулы (1) наибольшей определенностью обладает прочностной фактор  $\tilde{R}$ . Закон распределения прочности материала конструкций близок к нормальному, а статистические характеристики прочности можно легко вычислить по величине нормативной прочности, имеющей обеспеченность 0,95, и известным коэффициентам вариации. Что касается нагрузочного эффекта, то в общем случае необходимо учитывать совместное действие нагрузок, каждая из которых имеет свой закон распределения, и коэффициент их сочетаний. Это значительно усложняет решение [4,5].

В представленной работе на примере конструкции эксплуатируемого здания изложен метод вычисления статистических характеристик суммарной обобщенной нагрузки. Полученные результаты использованы при оценке остаточного ресурса рассматриваемого здания.

#### Описание объекта

По конструктивной схеме исследуемый объект представляет девятиэтажную ствольную систему диаметром 18 м с подвешенным двухуровневым спиральным этажом диаметром 48 м. Крепление конструкций спирального этажа выполнено через систему подвесок и конструкцию несущих ферм. Общая высота сооружения от верха ростверка фундамента до верха плиты фонаря достигает 40,3 м. Общая схема здания приведена на рис. 1.

Центральный несущий железобетонный ствол здания высотой 36,5 м выполнен каркасным способом. Каркас ствола образован двумя кольцевыми рядами колонн, связанных между собой кольцевыми и радиальными железобетонными ригелями. Стальные несущие фермы системой связей в плоскостях

опорных раскосов и нижних поясов ферм объединены в единый пространственный жесткий диск.

Конструкции опирания спирального этажа представлены системой подвесок, несущих ферм и конструкциями опорных узлов на радиальных железобетонных балках.

Конструкция спирального этажа представляет собой стальную балочную клетку радиально-кольцевой системы преимущественно нормального типа. Функцию главных балок выполняют стальные радиальные балки.

Совместная работа конструкции нижнего участка спирального этажа с несущим стволом здания обеспечивается креплением радиальных балок к колоннам ствола.

В качестве примера для расчета вероятностных параметров обобщенной нагрузки выбрана несущая ферма покрытия здания.

Фермы покрытия представляют собой плоскую стержневую конструкцию, опирающуюся на радиальные ригели железобетонного каркаса. Несущие фермы выполнены треугольного очертания с горизонтальной ориентацией верхнего пояса. Высота фермы по осям поясов составляет 4200 мм. Решетка ферм – треугольная с дополнительной распоркой. Сечение элементов ферм – спаренные равнополочные уголки таврового очертания для поясов и раскосов, и крестового – для стоек. Приопорная панель верхнего пояса обетонирована. Геометрическая схема фермы изображена на рис. 2.

#### Статистические характеристики нагрузок, действующих на ферму покрытия здания

Рассматриваются следующие нагрузки: постоянная, полезная, снеговая и ветровая. По известным законам распределения нагрузок  $p(x)$  вычисляем 4 центральных момента по формуле:

$$\mu_s = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^s p(x) dx, \quad s=1, \dots, 4. \quad (3)$$

#### Постоянная нагрузка

Постоянные нагрузки хорошо описываются нормальным законом распределения [6]:

$$p_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n} \exp\left(-\frac{(x - m_n)^2}{2\sigma_n^2}\right), \quad (4)$$

где  $m_n$ ,  $\sigma_n$  – соответственно математическое ожидание и стандарт постоянной нагрузки.

Для линейных элементов с площадью поперечного сечения  $A$  и плотностью материала  $\rho$  нагрузка на единицу длины равна  $g = \rho \cdot A$ . Приняв  $\rho = 78,5 \text{ кН/м}^3$

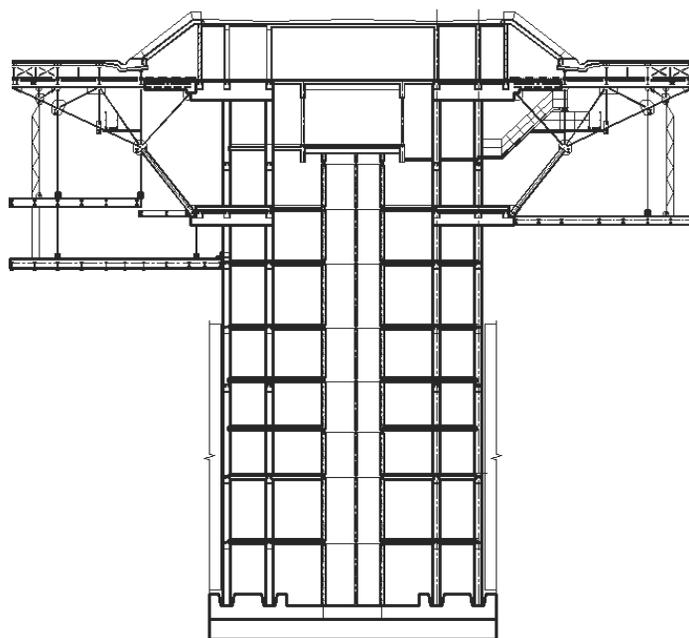


Рис. 1. Общая схема здания

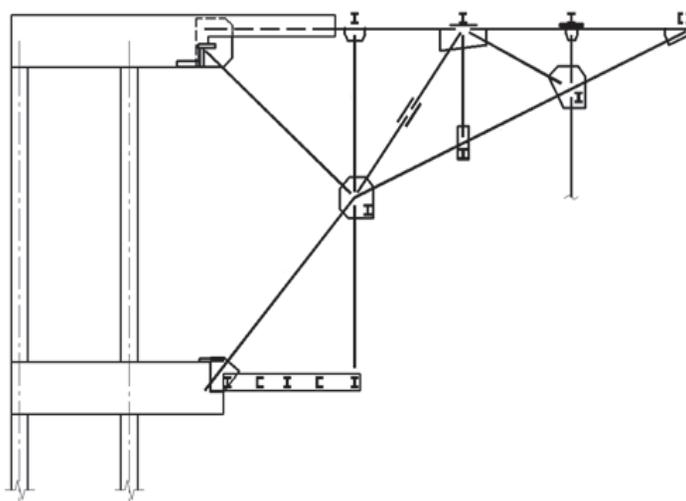


Рис. 2. Геометрическая схема фермы

и коэффициент вариации  $f_p = 0,03$ , получим следующие значения математического ожидания и дисперсии постоянной нагрузки:

$$m_n = 0,674 \text{ кН/м}, D_n = 8,179 \cdot 10^{-4} \text{ кН}^2/\text{м}^2, \sigma_n = 0,029 \text{ кН/м}.$$

Постоянную нагрузку приведем к единичной площади.

*Полезная нагрузка*

Нормативная полезная нагрузка с верхнего и нижнего яруса спирального этажа, чердачного помещения и покрытия равна  $15,2 \text{ кН/м}^2$ . Коэффициент вариации нагрузки  $f_l = 0,1$  [6]. Вычисляем математическое ожидание и дисперсию полезной нагрузки:

$$m_l = 13,06 \text{ кН/м}^2, D_l = 6,82 \text{ Н}^2/\text{м}^4, \sigma_l = 2,62 \text{ кН/м}^2.$$

Согласно [6] полезная нагрузка подчиняется логарифмически нормальному закону:

$$p_l(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_0} \cdot \frac{1}{x} \exp\left[-\frac{(\ln x - m_0)^2}{2\sigma_0^2}\right] \quad (5)$$

Параметры логнормального закона  $m_0$  и  $\sigma_0$  находим по формулам:

$$m_0 = \ln\left(\frac{m_l^2}{\sqrt{m_l^2 + D_l}}\right) = 2,55, \quad (6)$$

$$\sigma_0 = \sqrt{\ln\left(1 + \frac{D_l}{m_l^2}\right)} = 0,198. \quad (7)$$

Центральные статистические моменты случайной величины полезной нагрузки можно вычислить по формулам [7]:

$$\begin{aligned} \mu_{1l} &= m_l = \exp\left(\frac{\sigma_0^2}{2} + m_0\right); \\ \mu_{2l} &= D_l = \exp(\sigma_0^2 + 2m_0) \cdot (\exp \sigma_0^2 - 1); \\ \mu_{3l} &= \left[(\exp \sigma_0^2 + 2)\sqrt{\exp \sigma_0^2 - 1}\right]; \\ \mu_{4l} &= \exp(4\sigma_0^2) + 2 \exp(3\sigma_0^2) + 3 \exp(2\sigma_0^2) - 3. \end{aligned} \quad (8)$$

$$p_g(x) = a_s \exp\{-a_s(x-u_s) - \exp[-a_s(x-u_s)]\}. \quad (9)$$

Объект находится во II снеговом районе. Нормативное значение веса снегового покрова на 1 м<sup>2</sup> горизонтальной поверхности земли  $S_g = 1,0$  кПа [8]. Коэффициент вариации  $f_g = 0,4$ . Тогда математическое ожидание годовых максимумов веса снегового покрова  $m_g = 0,604$  кН/м<sup>2</sup>, дисперсия —  $D_g = 0,058$  кН<sup>2</sup>/м<sup>4</sup>, стандарт  $\sigma_g = 0,242$  кН/м<sup>2</sup>.

Вычисляем параметры закона Гумбеля:

$$a_s = \frac{1,28255}{\sigma_g} = 5,309; \quad u_s = m_g - \frac{0,577216}{a_s} = 0,495.$$

На рис. 4 приведены графики плотности распределения снеговой нагрузки по закону Гумбеля и нормальному закону с параметрами  $m_g$  и  $\sigma_g$ .

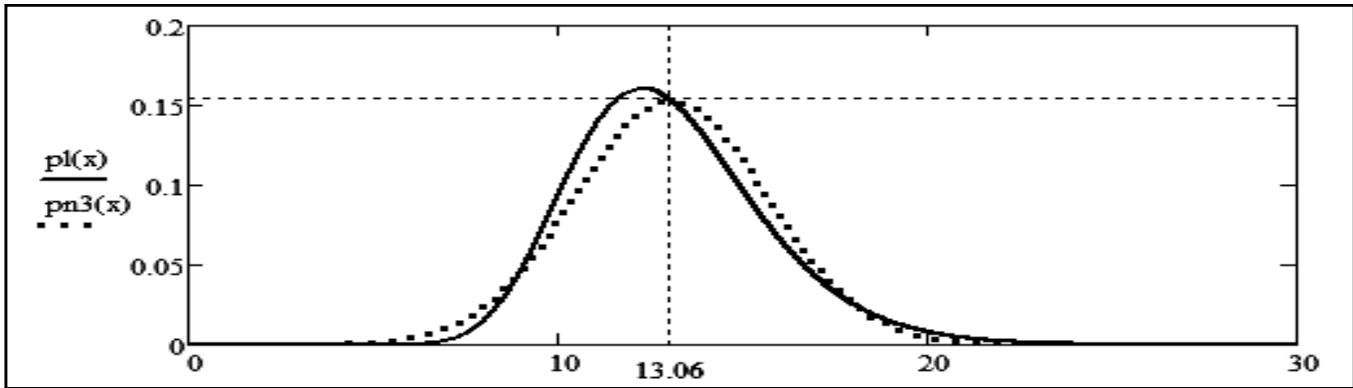


Рис. 3. Плотность распределения полезной нагрузки

График плотности распределения полезной нагрузки показан на рис. 3. Здесь же приведен график плотности распределения нормального закона с параметрами  $m_l = 13,06$  кН/м<sup>2</sup>,  $\sigma_l = 2,62$  кН/м<sup>2</sup>.

Статистические моменты случайной величины максимумов снеговой нагрузки вычисляем по формуле (3). Коэффициент асимметрии и приведенный эксцесс для закона Гумбеля постоянны.

#### Снеговая нагрузка

Для аппроксимации распределения случайной величины ежегодных максимумов снеговой нагрузки используем закон Гумбеля.

#### Ветровая нагрузка

Принимаем закон Вейбулла для описания распределения максимального давления ветра [9].

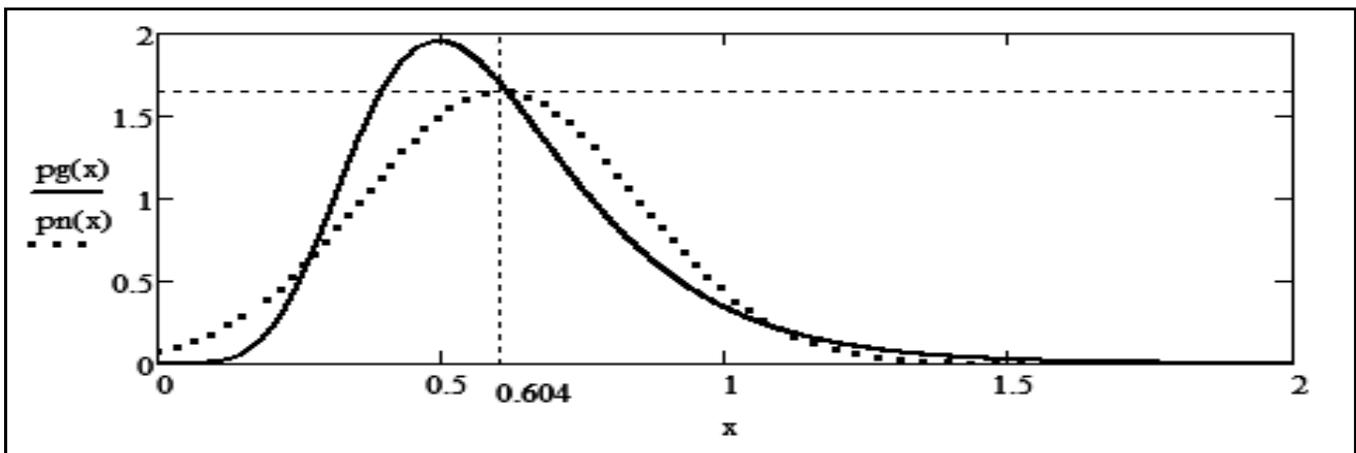


Рис. 4. Плотность распределения снеговой нагрузки

$$p_v(x) = \frac{\beta}{\alpha} \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta-1} \exp\left[-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^\beta\right]. \quad (10)$$

Объект находится в III ветровом районе [8], и нормативное значение ветрового давления  $w_0 = 0,38$  кН/м<sup>2</sup>. Коэффициент вариации  $f_v = 0,37$  [9].

Математическое ожидание максимумов ветровой нагрузки  $m_v = 0,236$  кН/м<sup>2</sup>, дисперсия –  $D_v = 7,62 \cdot 10^{-3}$  кН<sup>2</sup>/м<sup>4</sup>, стандарт  $\sigma_v = 0,087$  кН/м<sup>2</sup>.

Параметры закона Вейбулла  $\alpha$  и  $\beta$  находим, решая систему нелинейных алгебраических уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \alpha \Gamma\left(\frac{1}{\beta} + 1\right) &= m_v \\ \alpha^2 \left[ \Gamma\left(\frac{2}{\beta} + 1\right) - \left(\Gamma\left(\frac{2}{\beta} + 1\right)\right)^2 \right] &= D_v \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

где  $\Gamma$  – гамма-функция.

$$\alpha = 0,265; \quad \beta = 2,941.$$

Для вычисления статистических моментов закона Вейбулла можно использовать аналитические зависимости, приведенные в [7].

$$\begin{aligned} \mu_{1v} &= m_v; \\ \mu_{2v} &= \alpha^2 \left[ \Gamma\left(\frac{2}{\beta} + 1\right) - \left(\Gamma\left(\frac{2}{\beta} + 1\right)\right)^2 \right]; \end{aligned} \quad (12)$$

$$\mu_{3v} = g_3 \alpha^3 - 3g_2 g_1 \alpha^3 + 2g_1^3 \alpha^3$$

$$\mu_{4v} = a \alpha^4$$

В формулах (10) использованы следующие обозначения:

$$g_1 = \Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right); \quad g_2 = \Gamma\left(1 + \frac{2}{\beta}\right); \quad g_3 = \Gamma\left(1 + \frac{3}{\beta}\right); \quad g_4 = \Gamma\left(1 + \frac{4}{\beta}\right);$$

$$a = g_4 - 4g_1 g_3 + 6g_2 g_1^2 - 3g_1^4.$$

Результаты расчета приведены в таблице 1.

На рис. 5 показаны графики плотностей распределения ветровой нагрузки по закону Вейбулла и нормальному закону с параметрами  $m_v$  и  $D_v$ .

Численные значения четырех статистических моментов случайных нагрузок, а также коэффициентов асимметрии и приведенного эксцесса приведены в таблице 1.

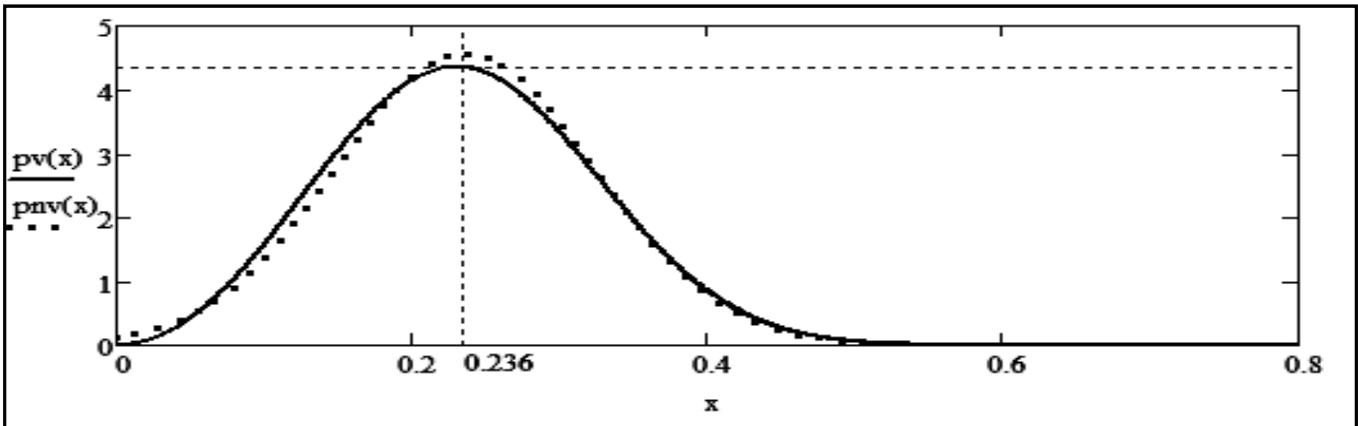


Рис. 5. Плотность распределения ветровой нагрузки

Центральные статистические моменты нагрузок на ферму покрытия

Таблица 1.

Вид нагрузки	Статистические моменты				Коэф. асимметрии	Привед. эксцесс
	$\mu_{1n}$ кН/м <sup>2</sup>	$\mu_{2n}$ кН <sup>2</sup> /м <sup>4</sup>	$\mu_{3n}$ кН <sup>3</sup> /м <sup>6</sup>	$\mu_{4n}$ кН <sup>4</sup> /м <sup>8</sup>		
Постоянная	$\mu_{1n}$ кН/м <sup>2</sup>	$\mu_{2n}$ кН <sup>2</sup> /м <sup>4</sup>	$\mu_{3n}$ кН <sup>3</sup> /м <sup>6</sup>	$\mu_{4n}$ кН <sup>4</sup> /м <sup>8</sup>	$A_{sn}$	$E_{sn}$
	0,674	$8,18 \cdot 10^{-4}$	0	$2,01 \cdot 10^{-6}$	0	3
Полезная	$\mu_{1l}$ кН/м <sup>2</sup>	$\mu_{2l}$ кН <sup>2</sup> /м <sup>4</sup>	$\mu_{3l}$ кН <sup>3</sup> /м <sup>6</sup>	$\mu_{4l}$ кН <sup>4</sup> /м <sup>8</sup>	$A_{sl}$	$E_{sl}$
	13,06	6,82	10,83	170,57	0,608	3,664
Снеговая	$\mu_{1g}$ кН/м <sup>2</sup>	$\mu_{2g}$ кН <sup>2</sup> /м <sup>4</sup>	$\mu_{3g}$ кН <sup>3</sup> /м <sup>6</sup>	$\mu_{4g}$ кН <sup>4</sup> /м <sup>8</sup>	$A_{sg}$	$E_{sg}$
	0,604	0,058	0,016	0,018	1,14	5,4
Ветровая	$\mu_{1v}$ кН/м <sup>2</sup>	$\mu_{2v}$ кН <sup>2</sup> /м <sup>4</sup>	$\mu_{3v}$ кН <sup>3</sup> /м <sup>6</sup>	$\mu_{4v}$ кН <sup>4</sup> /м <sup>8</sup>	$A_{sv}$	$E_{sv}$
	0,236	$7,65 \cdot 10^{-3}$	$1,26 \cdot 10^{-4}$	$1,60 \cdot 10^{-4}$	0,19	2,74
Суммарная обобщенная	$\mu_{1Q}$ кН/м <sup>2</sup>	$\mu_{2Q}$ кН <sup>2</sup> /м <sup>4</sup>	$\mu_{3Q}$ кН <sup>3</sup> /м <sup>6</sup>	$\mu_{4Q}$ кН <sup>4</sup> /м <sup>8</sup>	$A_{sQ}$	$E_{sQ}$
	14,57	6,89	10,85	173,32	0,6	3,652

Оценка композиции законов распределения

Рассматриваемые случайные нагрузки являются независимыми величинами с различными законами распределения. Найдем приближенный закон распределения суммарной обобщенной нагрузки, используя разложение в ряд Грамма-Шарлье.

Полученные результаты предназначены для практического решения задач оценки безопасности и остаточного ресурса зданий и сооружений.

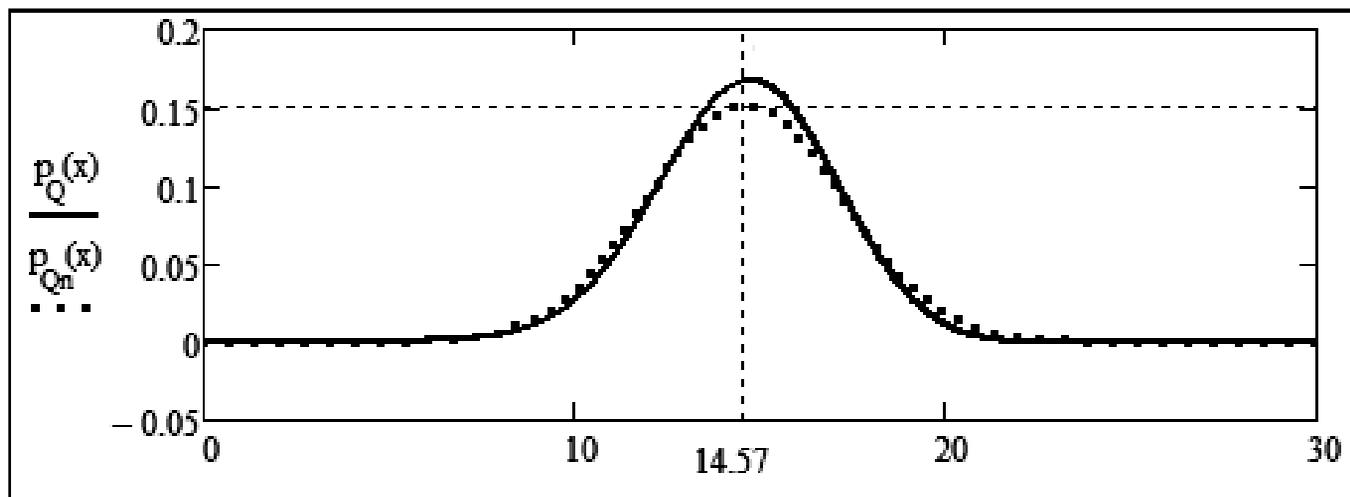


Рис. 6. Закон распределения суммарной обобщенной нагрузки

$$p_Q(x) = \Phi(u) - \frac{1}{6} \sqrt{\frac{\mu_{3Q}^2}{\mu_{2Q}^3}} \Phi^{(3)}(u) + \frac{1}{24} \left( \frac{\mu_{4Q}}{\mu_{2Q}^2} - 3 \right) \Phi^{(4)}(u) + \frac{1}{72} \frac{\mu_{5Q}^2}{\mu_{2Q}^3} \Phi^{(6)}(u) + \dots \quad (13)$$

Обозначения параметров в формуле (13):

$\Phi(u)$  — плотность вероятности стандартного нормального распределения  $u = \frac{x - m_Q}{\sigma_Q}$ ;

$\Phi^{(k)}(u)$  — k-я производная от функции  $\Phi(u)$ ;

$$\Phi^{(3)}(u) = (u^2 - 1)\Phi(u);$$

$$\Phi^{(4)}(u) = (-u^3 + 3u)\Phi(u);$$

$$\Phi^{(6)}(u) = (-u^5 + 10u^3 - 5u)\Phi(u).$$

Как показал проведенный расчет, закон распределения суммарной обобщенной нагрузки близок к нормальному (рис. 6).

**ВЫВОДЫ**

Получено решение, позволяющее свести постоянную, временную длительную, снеговую и ветровую нагрузки с различными законами распределения к одной случайной суммарной обобщенной нагрузке. Установлено, что обобщенная нагрузка с достаточной для практических расчетов точностью может быть аппроксимирована нормальным законом распределения с параметрами:

$$m_Q = \sum_i^4 m_i; D_Q = \sum_i^4 D_i; i = n, l, g, v; f_Q = 0,18$$

**Список литературы:**

1. Probabilistic Model Code ISBN 978-3-909386-79-6. — Официальный сайт Объединённого комитета по надёжности конструкций (JCSS): [http://www.jcss.byg.dtu.dk/Publications/Probabilistic\\_Model\\_Code.aspx](http://www.jcss.byg.dtu.dk/Publications/Probabilistic_Model_Code.aspx).
2. Дроздов В.В. Evaluation of Reliability of the Earthquake Resistant Building Provided by Means of the Analysis for Design-Basis Earthquake / В.В. Дроздов, В.А. Пиеничкина, К.Н. Сухина // Procedia Engineering. Vol. 150 : 2nd International Conference on Industrial Engineering (ICIE-2016) / ed. by A.A. Radionov. — [Elsevier publishing], 2016. — P. 1841–1847.
3. Чаускин А.Ю. Вероятностный расчёт нелинейной динамической системы на сейсмическое воздействие уровня МРЗ / А.Ю. Чаускин, В.А. Пиеничкина // Вестник Волгоградского гос. архит.-строит. ун-та. Сер. Строительство и архитектура. — 2017. — № 47 (66). — с. 82–92.
4. Ржаницин А.Р. Теория расчета строительных конструкций на надежность. М., Стройиздат, 1978. — 240 с.
5. Райзер В.Д. Теория надежности конструкций.—М., Издательство АСВ, 2010. — 384 с.
6. Чирков В.П. Прикладные методы теории надежности в расчетах строительных конструкций. Учебное пособие для вузов ж.-д. транспорта.— М., Маршрут, 2006. — 620 с.
7. Ходасевич Г.Б. Обработка экспериментальных данных на ЭВМ. Учебное пособие. — СПб., Санкт-Петербургский государственный университет телекоммуникаций им. проф. М.А. Бонч-Бруевича, 2000. — 100 с.
8. СП 20.13330.2016. Нагрузки и воздействия. Актуализированная редакция СНиП 2.01.07–85\*
9. Райзер В.Д. Методы теории надежности в задачах нормирования расчетных параметров строительных конструкций. — М., Стройиздат, 1986. — 194 с.