ISSN 1819-432X print / ISSN 1993-3495 online
СУЧАСНЕ ПРОМИСЛОВЕ ТА ЦИВІЛЬНЕ БУДІВНИЦТВО
СОВРЕМЕННОЕ ПРОМЫШЛЕННОЕ И ГРАЖДАНСКОЕ СТРОИТЕЛЬСТВО
MODERN INDUSTRIAL AND CIVIL CONSTRUCTION
ТОМ 3, N2, 2007, 103-109
УДК 625.731.8.001.2

О РОЗРАХУНКУ СКЛАДЕНИХ ПЛАСТИН ЗІ ЗМІННИМИ ЗНАЧЕННЯМИ КОЕФІЦІЕНТА ЖОРСТКОСТІ ШВІВ

В.В.Філатов
Кафедра "Будівельна механіка", Московськїй державний будівельний університет,
Ярославське шосе, 26, м. Москва, Росія, 129337.
E-mail: fofa@mail.ru

Отримана 28 квітня 2007; прийнята 30 травня 2007.

Анотація. Стаття є розвитком теорії розрахунку складених пластин А.Р.Ржаницина. Розглядаються двошарові складені пластини, у яких твердість шва (ξ - коефіцієнт твердості зв'язків зсуву) змінюється за кусочно-постійним законом. Поперечні зв'язки приймаються як абсолютно тверді. Для вирішення системи розв'язних диференціальних рівнянь залучається розроблений на кафедрі "Будівельна механіка" МГБУ чисельний метод послідовних апроксимацій (МПА). Різницева форма МПА має високу точність і дозволяє враховувати розриви функцій і їхніх перших похідних. Запропонований алгоритм ілюструється на прикладі розрахунку шарнірно-опертої по всьому контуру квадратної двошарової пластини при дії рівномірно розподіленого по всій її поверхні навантаження. Задається стрибкоподібна зміна коефіцієнта твердості зв'язків зсуву у двох напрямках. Наводяться результати розрахунку. Показується можливість застосування методики до розрахунку багатошарових пластин.

Ключові слова: теорія розрахунку складених пластин А.Р. Ржаницина, коефіцієнт твердості зв'язків зсуву, багатошарові пластини.

О РАСЧЕТЕ СОСТАВНЫХ ПЛАСТИН С ПЕРЕМЕННЫМИ ЗНАЧЕНИЯМИ КОЭФФИЦИЕНТА ЖЕСТКОСТИ ШВОВ

В.В.Филатов
Кафедра "Строительная механика", Московский государственный строительный университет,
Ярославское шоссе, 26, г. Москва, Россия, 129337.
E-mail: fofa@mail.ru

Получена 28 апреля 2007; принята 30 мая 2007.

Аннотация. Статья является развитием теории расчета составных пластин А.Р. Ржаницына. Рассматриваются двухслойные составные пластины, в которых жесткость шва (ξ - коэффициент жесткости связей сдвига) меняется по кусочно-постоянному закону. Поперечные связи принимаются как абсолютно жесткие. Для решения системы разрешающих дифференциальных уравнение привлекается разработанный на кафедре "Строительная механика" МГСУ численный метод последовательных аппроксимаций (МПА). Разностная форма МПА обладает высокой точностью и позволяет учитывать разрывы функций и их первых производных. Предложенный алгоритм иллюстрируется на примере расчета шарнирно-опертой по всему контуру квадратной двухслойной пластины при действии равномерно распределенной по всей ее поверхности нагрузки. Задается скачкообразное изменение коэффициента жесткости связей сдвига в двух направлениях. Приводятся результаты расчета. Показывается возможность применения методики к расчету многослойных пластин.

Ключевые слова: теория расчета составных пластин А.Р.Ржаницына, коэффициент жесткости связей сдвига, многослойные пластины.

ON THE DESIGN OF COMPOSITE PLATES WITH ALTERNATING VALUES OF SEAM STIFFNESS FACTOR

V.V. Filatov
Faculty "Structural Mechanics", Moscow State Building University,
26, Yaroslavl highway, 129337, Moscow, Russia.
E-mail: fofa@mail.ru

Reseived 28 April 2007; accepted 30 May 2007

Abstract. This article is a result of the development of the theory of designing A.R. Rzhanitsyn's composite plates. Two-layer composite plates are considered, a seam stiffness in which (ξ - a stiffness factor of shift bonds) varies by the piecewise-constant law. Cross-section bonds are accepted as absolutely rigid. To solve the system of resolving differential equations there is involved a numerical method of successive approximations (MSA) developed at the faculty "Structural Mechanics", MGSU. A MSA differential form possesses a high accuracy and allows considering breaks of the functions and their first derivatives. The algorithm offered is illustrated on the example of designing a square two-layer plate pin-supported along the whole contour under loading evenly distributed on its surface. A spasmodic change of the stiffness factor of shift bonds in two directions is set. There are given the design results. An opportunity of using the technique for designing multilayered plates is shown.

Keywords: theory of designing A.R. Rzhanitsyn's composite plates, stiffness factor of shift bonds, multilayered plates.

На примере двухслойной составной пластины с нулевой толщиной шва рассмотрим случай, когда коэффициент жесткости шва ξ меняется скачкообразно, причем на некоторых (непроклеенных) участках ξ может равняться нулю. Для общности будем считать, что на каждом из участков I-IV (рис.1) ξ имеет постоянные, но разные по величине значения. Тогда в точке ij квадратной сетки имеем 4 значения: ${}^{I}\xi_{ij}, {}^{II}\xi_{ij}, {}^{III}\xi_{ij}, {}^{IV}\xi_{ij}$.

По теории А.Р.Ржаницына [2] при ξ=*const* рассматриваемая задача сводится к решению трех дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка. Запишем эти уравнения в безразмерном виде:

$$\frac{\partial^2 m}{\partial \psi^2} + \frac{\partial^2 m}{\partial \theta^2} = -p\,; \qquad (1)$$

$$\frac{\partial^2 t}{\partial \psi^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial \theta^2} = -\tilde{k}\left(3m - 4\tilde{t}\right); \qquad (2)$$

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial \psi^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial \theta^2} = -\left(m - \tilde{t}\right); \qquad (3)$$

где

$$\psi = \frac{x}{a};\ \ \theta = \frac{y}{a};\ \ \omega = \frac{W}{a};\ \ m = \frac{M}{D_0};$$

$$\tilde{t} = \frac{Tha}{D_0};\ \ p = \frac{qa^3}{D_0};\ \ \tilde{k} = 2\frac{\xi a^2}{Eh}\left(1-\mu^2\right), \qquad (4)$$

a – длина одной из сторон пластины. В общем случае суммарная жесткость составляющих пластин

$$D_0 = \frac{E}{12(1-\mu^2)}\sum_{i=1}^{n+1} h_i^3\,.$$

Здесь n – число швов; h_i – толщина каждого слоя; E – модуль упругости, одинаковый для всех слоев; μ – коэффициент Пуассона. В рассматриваемом случае, когда составная пластина состоит из двух слоев толщиной h,

$$D_0 = \frac{Eh^3}{6(1-\mu^2)};$$

М – суммарный изгибающий момент, имеющий тот же смысл, что и в сплошных пластинах [3]; Т – потенциальная функция возникающих в швах сдвигающих сил [2]; W – прогибы составной пластины; q – распределенная по произвольному закону поперечная нагрузка.

Рассматриваемая задача в силу своей сложности может быть решена только численно. Для аппроксимации дифференциального уравнения (1) алгебраическим уравнением воспользуемся имеющим высокую точность методом последовательных аппроксимаций (МПА). Из уравнения МПА, аппроксимирующего дифференциальное уравнение второго порядка общего вида [1], получим, как частный случай, алгебраическое уравнение, аппроксимирующее дифференциальное уравнение (1). Запишем его на квадратной сетке с шагом τ (рис.1), полагая, что функция m непрерывна, но имеет разрывные частные производные

$$m^{\psi} = \frac{\partial m}{\partial \psi} \text{ и } m^{\theta} = \frac{\partial m}{\partial \theta}:$$

$$\begin{aligned}
&m_{i-1,j-1} + 4m_{i-1,j} + m_{i-1,j+1} + \\
&+ 4m_{i,j-1} - 20m_{i,j} + 4m_{i,j+1} + \\
&+ m_{i+1,j-1} + 4m_{i+1,j} + m_{i+1,j+1} + \\
&+ 3\tau\left(\Delta^{\mathrm{I-II}} m_{ij}^{\psi} + \Delta^{\mathrm{III-IV}} m_{ij}^{\psi} + \Delta^{\mathrm{I-III}} m_{ij}^{\theta} + \Delta^{\mathrm{II-IV}} m_{ij}^{\theta}\right) = \\
&= \frac{\tau^3}{4}\left(\Delta^{\mathrm{I-II}} p_{ij}^{\psi} + \Delta^{\mathrm{III-IV}} p_{ij}^{\psi} + \Delta^{\mathrm{I-III}} p_{ij}^{\theta} + \Delta^{\mathrm{II-IV}} p_{ij}^{\theta}\right) - \\
&- \frac{\tau^2}{12}\Big({}^{I}p_{i-1,j-1} + 2\,{}^{I}p_{i-1,j} + 2\,{}^{III}p_{i-1,j} + {}^{III}r_{i-1,j+1} + \\
&+ 2\,{}^{I}p_{i,j-1} + 13\,{}^{I}p_{ij} + 13\,{}^{III}p_{ij} + 2\,{}^{III}p_{i,j+1} + \\
&+ 2\,{}^{II}p_{i,j-1} + 13\,{}^{II}p_{ij} + 13\,{}^{IV}p_{ij} + 2\,{}^{IV}p_{i,j+1} + \\
&+ {}^{II}p_{i+1,j-1} + 2\,{}^{II}p_{i+1,j} + 2\,{}^{IV}p_{i+1,j} + {}^{IV}p_{i+1,j+1}\Big), \qquad (5)
\end{aligned}$$

где

$$\Delta^{I-II} m_{ij}^{\psi} = {}^{I}m_{ij}^{\psi} - {}^{II}m_{ij}^{\psi};$$

остальные члены уравнения такого типа имеют аналогичный смысл. Например,

$$\Delta^{\mathrm{II-IV}} p_{ij}^{\theta} = {}^{II}p_{ij}^{\theta} - {}^{IV}p_{ij}^{\theta}; \quad p^{\theta} = \frac{\partial p}{\partial \theta}; \quad p^{\psi} = \frac{\partial p}{\partial \psi}.$$

Верхний левый индекс означает принадлежность величины тому или иному элементу (рис.1). Например, ${}^{I}p_{ij}$ – величина p в т. ij, принадлежащая элементу I. Имеется в виду, что – функция, имеющая вместе со своими первыми частными производными конечные разрывы на границах элементов. Уравнение (5) позволяет рассчитывать пластины на разрывные распределенные нагрузки и полосовые нагрузки Δm^{ψ}, Δm^{θ}.

Из сравнения (3) с (1) следует, что для аппроксимации дифференциального уравнения (3) разностным уравнением МПА достаточно в (5) заменить m на ω, p – на $(m - \tilde{t})$. Соответствующее (3) разностное уравнение мы здесь не приводим. Отметим лишь, что в предположении о неразрывности функций и вместе со своими первыми частными производными это разностное уравнение конструируется достаточно просто.

Дифференциальное уравнение (2), как и (1), (3), представляет собой уравнение Пуассона для двумерной задачи. Для аппроксимации (2) необходимо: в левой части (5) m заменить на $\tilde{t}$, в правой – p на $\tilde{k}(3m - 4\tilde{t})$. Но следует учесть, что $\tilde{k}$ – величина разрывная, и меняется в силу (4) по тому же закону, что и коэффициент жесткости х. После несложных преобразований получим следующее разностное уравнение:

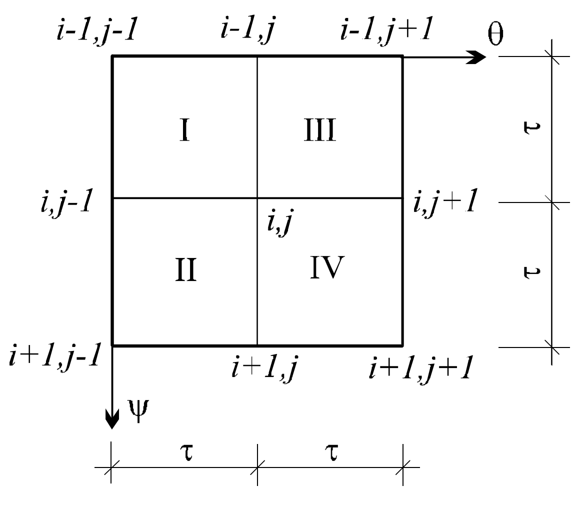

Рис. 1.

$$\left(1-\frac{\tau^2}{3}\cdot{}^{\mathrm{I}}\tilde{k}_{ij}\right)\tilde{t}_{i-1,j-1}+4\left(1-\frac{\tau^2}{6}\cdot{}^{\mathrm{I-III}}\tilde{k}_{ij}\right)\tilde{t}_{i-1,j}+$$
$$+\left(1-\frac{\tau^2}{3}\cdot{}^{\mathrm{III}}\tilde{k}_{ij}\right)\tilde{t}_{i-1,j+1}+4\left(1-\frac{\tau^2}{6}\cdot{}^{\mathrm{I-II}}\tilde{k}_{ij}\right)\tilde{t}_{i,j-1}-$$
$$-4\left[5+\frac{13}{12}\tau^2\left({}^{\mathrm{I-II}}\tilde{k}_{ij}+{}^{\mathrm{III-IV}}\tilde{k}_{ij}\right)\right]\tilde{t}_{i,j}+$$
$$+4\left(1-\frac{\tau^2}{6}\cdot{}^{\mathrm{III-IV}}\tilde{k}_{ij}\right)\tilde{t}_{i,j+1}+\left(1-\frac{\tau^2}{3}\cdot{}^{\mathrm{II}}\tilde{k}_{ij}\right)\tilde{t}_{i+1,j-1}+$$
$$+4\left(1-\frac{\tau^2}{6}\cdot{}^{\mathrm{II-IV}}\tilde{k}_{ij}\right)\tilde{t}_{i+1,j}+\left(1-\frac{\tau^2}{3}\cdot{}^{\mathrm{IV}}\tilde{k}_{ij}\right)\tilde{t}_{i+1,j+1}=$$
$$=\frac{3}{8}\tau^3\left({}^{\mathrm{I-II}}\tilde{k}_{ij}\cdot\Delta^{\mathrm{I-II}}m_{ij}^{\psi}+{}^{\mathrm{III-IV}}\tilde{k}_{ij}\cdot\Delta^{\mathrm{III-IV}}m_{ij}^{\psi}+\right.$$
$$\left.+{}^{\mathrm{I-III}}\tilde{k}_{ij}\cdot\Delta^{\mathrm{I-III}}m_{ij}^{\theta}+{}^{\mathrm{II-IV}}\tilde{k}_{ij}\cdot\Delta^{\mathrm{II-IV}}m_{ij}^{\theta}\right)-$$
$$-\frac{\tau^2}{4}\left[{}^{\mathrm{I}}\tilde{k}_{ij}m_{i-1,j-1}+2\,{}^{\mathrm{I-III}}\tilde{k}_{ij}m_{i-1,j}+{}^{\mathrm{III}}\tilde{k}_{ij}m_{i-1,j+1}+\right.$$
$$+{}^{\mathrm{I-II}}\tilde{k}_{ij}m_{i,j-1}+13\left({}^{\mathrm{I-II}}\tilde{k}_{ij}+{}^{\mathrm{III-IV}}\tilde{k}_{ij}\right)m_{i,j}+$$
$$+2\,{}^{\mathrm{III-IV}}\tilde{k}_{ij}m_{i,j+1}+{}^{\mathrm{II}}\tilde{k}_{ij}m_{i+1,j-1}+2\,{}^{\mathrm{II-IV}}\tilde{k}_{ij}m_{i+1,j}+$$
$$\left.+{}^{\mathrm{IV}}\tilde{k}_{ij}m_{i+1,j+1}\right] \qquad (6)$$

где $${}^{\mathrm{I-II}}\tilde{k}_{ij}={}^{\mathrm{I}}\tilde{k}_{ij}+{}^{\mathrm{II}}\tilde{k}_{ij}\,. \qquad (7)$$

Остальные коэффициенты такого типа имеют аналогичный смысл; ${}^{I}\tilde{k}_{ij}$, ${}^{II}\tilde{k}_{ij}$, ${}^{III}\tilde{k}_{ij}$ ${}^{IV}\tilde{k}_{ij}$,— величины $\tilde{k}$ в т. ij сетки (рис.1), принадлежащие соответственно элементам I, II, III, IV. При ${}^{I}\tilde{k}_{ij}={}^{II}\tilde{k}_{ij}={}^{III}\tilde{k}_{ij}={}^{IV}\tilde{k}_{ij}=\tilde{k}$ из (6) как частный случай следует более простое уравнение для составной плиты с ξ=*const*.

Если края составной пластины шарнирно оперты и не имеют препятствия сдвигам [2], то на краях имеем условия: $\omega=m=\tilde{t}=0$. При таких краевых условиях полученных выше трех типов уравнений МПА достаточно для определения $m,\tilde{t},\omega$ во внутренних точках сетки. При других граничных условиях разностные уравнения для краевых точек также получаются с использованием [1].

Если пластина состоит не из двух, а нескольких слоев, меняются лишь правые части уравнений (3) и (2), порядок их сохраняется. Причем уравнений типа (2) будет столько, сколько швов [2]. При этом прием перехода от дифференциальных уравнений к разностным по [1] сохраняется.

Описанный здесь алгоритм проиллюстрируем на примере расчета шарнирно опертой по всему контуру квадратной двухслойной пластины при действии равномерно распределенной по всей ее поверхности безразмерной нагрузки p =10. На краях $\omega=\tilde{t}=m=0$. Будем полагать, что на заштрихованном участке пластины $\tilde{k}$ =0,5; на прочих участках $\tilde{k}$ =3 (рис.2).

Для определения m записываем уравнение (5) в точках 11, 21, 22 сетки с учетом краевых условий и симметрии задачи при $\Delta m^{\psi}=\Delta m^{\theta}=\Delta p^{\psi}=\Delta p^{\theta}=0$ и $\tau=1/4$. Для т.11, например, это уравнение запишется так:

$$-20m_{11}+8m_{21}+m_{22}=-\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{4^2}\cdot72\cdot10\,.$$

Записав (5) для т.т.21, 22, из решения этих трех уравнений находим: m_{11}=0,4540; m_{21}=0,5741; m_{22}=0,7376. Для записи (6) в тех же точках 11, 21, 22 предварительно следует выписать значения для каждой расчетной точки, пользуясь нумерацией элементов на рис.1. Например, точка 11:

${}^{I}\tilde{k}_{11}={}^{II}\tilde{k}_{11}={}^{III}\tilde{k}_{11}=3$; ${}^{IV}\tilde{k}_{11}=0{,}5$; по формуле типа (7) ${}^{I-II}\tilde{k}_{11}={}^{I-III}\tilde{k}_{11}=6$;

${}^{II-IV}\tilde{k}_{11}={}^{III-IV}\tilde{k}_{11}=3{,}5$. Тогда уравнение (6) для т.11 с учетом найденных значений m запишется так:

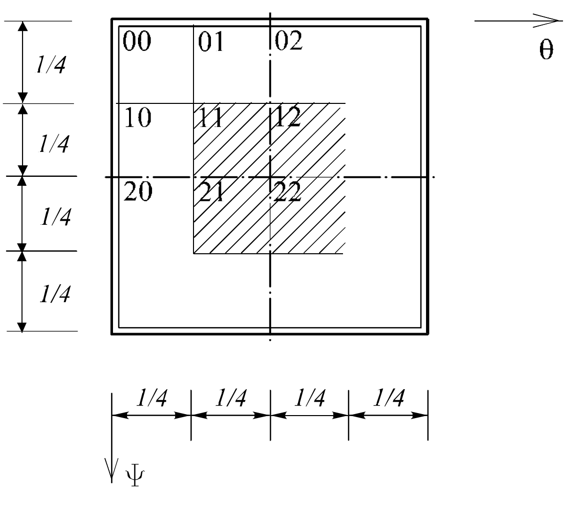

Рис. 2.

$$-4\left[5+\frac{13}{12}\cdot\frac{1}{4^2}(6+3{,}5)\right]\cdot\widetilde{t}_{11}+$$

$$+4\left[2-\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{4^2}(3{,}5\cdot 2)\right]\cdot\widetilde{t}_{21}+$$

$$+\left(1-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4^2}\cdot 0{,}5\right)\cdot\widetilde{t}_{22}=$$

$$=-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4^2}[13(6+3{,}5)\cdot 0{,}4540+$$

$$+2\cdot 3{,}5\cdot 2\cdot 0{,}5741+0{,}5\cdot 0{,}7376]$$

Записав (6) и для т.т. 21, 22 из решения трех уравнений находим: $\widetilde{t}_{11}=0{,}07971$; $\widetilde{t}_{21}=0{,}08545$; $\widetilde{t}_{22}=0{,}1385$. Далее записывается в т.т. 11, 21, 22 разностное уравнение МПА, аппроксимирующее (3). При этом учитываются краевые условия, симметрия, τ =1/4 и найденные значения m и $\widetilde{t}$. Из решения этих уравнений следует: $\omega_{11}=0{,}01777$; $\omega_{21}=0{,}02460$; $\omega_{22}=0{,}03378$. Значения в этой задаче значительно больше по сравнению с расчетом той же пластины при $\widetilde{k}=const=3$, где, например, $\omega_{22}=0{,}02889$.

В заключение отметим, что разработанный численный алгоритм может быть использован в инженерных расчетах.

Литература

1. Габбасов Р.Ф. О разностных уравнениях в задачах прочности и устойчивости плит//Прикладная механика. – 1982. – т. XIII.– 9. – С. 63-67.
2. Ржаницын А.Р. Составные стержни и пластины. – М: Стройиздат, 1986. – 316с.
3. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластины и оболочки/ Перев. с англ. М.: Наука, 1966.– 635с.

Філатов Володимир Володимирович є докторантом кафедри "Будівельна механіка" Московського державного будівельного університету. Наукові інтереси: розрахунок складених конструкцій.

Филатов Владимир Владимирович является докторантом кафедры "Строительная механика" Московского государственного строительного университета. Научные интересы: расчет составных конструкций.

Filatov Vladimir Vladimirovich is Doctorate faculties of "Building Mechanics" of The Moscow State Building University. Scientific interests: calculation of compound designs.