

УДК 536.2, 514.18

**О. С. ВОРОНОВА**

ГОУ ВПО «Донбасская национальная академия строительства и архитектуры»

**ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ  
КОНВЕКТИВНОГО ТЕПЛООБМЕНА**

**Аннотация.** В данной статье проведен анализ существующих подходов аналитического описания и моделирования процессов конвективного теплообмена применительно к задачам технической термодинамики и теплопередачи, а также выявлены недостатки каждого из них. Для усовершенствования расчета процессов конвективного тепломассообмена предлагается использовать математический аппарат геометрического моделирования процессов и явлений – БН-исчисление, что позволяет получить необходимые значения параметров жидкости и исследовать их с помощью методов математического анализа.

**Ключевые слова:** конвективный теплообмен, тепломассообмен, дифференциальные уравнения, параметры жидкости, геометрическое моделирование, БН-исчисление.

**ФОРМУЛИРОВКА ПРОБЛЕМЫ**

Исследования, посвящённые тепломассообменным процессам применительно к задачам технической термодинамики и теплопередачи, являются одной из актуальных, сложных и до конца не решённых проблем теории тепломассообмена.

Теплообмен – это процесс переноса теплоты, который происходит между телами, имеющими различную температуру. Многие процессы переноса теплоты сопровождаются переносом вещества и этот процесс называется массообменом. Теория теплообмена [1–3] изучает процессы распространения теплоты в твердых, жидких и газообразных телах, при которых теплота может передаваться тремя простейшими принципиально отличными друг от друга способами:

1. Теплопроводность – это процесс передачи теплоты внутри одного тела или при непосредственном соприкосновении тел, обусловленная тепловым движением микрочастиц.
2. Конвекция – это процесс передачи теплоты в результате движения и перемешивания частиц жидкостей или газов.
3. Теплообмен излучением – процесс передачи теплоты с помощью электромагнитных волн или лучей.

Наибольший интерес, с точки зрения моделирования, представляет собой конвективный теплообмен. Это вид теплообмена, при котором совместно протекают процессы конвекции и теплопроводности. Конвективный теплообмен широко распространен в природе, технике и быту. Конвекция происходит только в газах и жидкостях и состоит в том, что объемы жидкости или газа, перемещаясь из области с большей температурой в область с меньшей температурой, переносят с собой теплоту. Конвективный теплообмен зависит от условий движения вещества, в связи с этим различают естественную и вынужденную конвекцию. Конвективный перенос теплоты в значительной мере определяется режимом течения жидкости, которое может быть ламинарным или турбулентным [1–3].

При решении задачи технической термодинамики и теплопередачи процесс теплоотдачи описывается уравнением Ньютона-Рихмана:

$$Q = \alpha \cdot (t_c - t_{жк}) \cdot F, \quad (1)$$

где  $Q$  – тепловой поток, Вт;  
 $\alpha$  – коэффициент теплоотдачи, Вт/(м<sup>2</sup>·К);

$t_c, t_{ж}$  – температуры поверхности твердого тела (стенки) и жидкости, К;  
 $F$  – площадь поверхности теплообмена, м<sup>2</sup>.

Теплоотдача является достаточно сложным процессом, а коэффициент теплоотдачи зависит от многих параметров [1, 3]. Математическая зависимость коэффициента теплоотдачи может быть представлена в виде:

$$\alpha = f(w, \lambda, \nu, \rho, C, X, t_n, t_{ж}, \Phi, l_1, l_2, l_3, \dots), \quad (2)$$

где  $w$  – скорость движения вещества м/с;  
 $\lambda$  – коэффициент теплопроводности, Вт/(м·К);  
 $\nu$  – коэффициент кинематической вязкости, м<sup>2</sup>/с;  
 $\rho$  – плотность жидкости, кг/м<sup>3</sup>;  
 $C$  – удельная теплоемкость, кДж/(кг·°С);  
 $X$  – режим движения жидкости;  
 $\Phi$  – форма поверхности тела;  
 $l_1, l_2, l_3$  – размеры поверхности тела.

Исходя из вышесказанного, рассмотрим существующие подходы аналитического описания и моделирования процессов конвективного теплообмена.

### АНАЛИЗ ПОСЛЕДНИХ ИССЛЕДОВАНИЙ И ПУБЛИКАЦИЙ

Было выделено три принципиальных подхода к моделированию процессов конвективного теплообмена.

*Дифференциально-интегральный подход.* Применяя общие законы физики, можно составить дифференциальные уравнения для конвективного теплообмена, учитывающие как тепловые, так и гидродинамические явления в любом процессе. Система дифференциальных уравнений конвективного теплообмена состоит из уравнений теплоотдачи, энергии, неразрывности и движения [1–3]. Решение системы дифференциальных уравнений конвективного теплообмена средствами математического анализа связано с большими трудностями, поэтому на практике такие задачи решаются численными методами с применением ЭВМ, либо экспериментальным путем.

*Численный подход* основан на численных методах решения системы дифференциальных уравнений теплоотдачи, энергии, неразрывности и движения. Данный подход является частью дифференциально-интегрального подхода, но в виду его широкого использования в системах автоматизированного проектирования было решено выделить его отдельно. В настоящее время существует большое множество различных методов численного решения задач конвективного теплообмена. Так, следует выделить метод конечных разностей, метод конечных элементов, метод конечных объемов, вихревые методы и др. [4–9].

Численные методы основываются на том, что расчетную область необходимо разбить с помощью сетки на небольшие соприкасающиеся объемы или ячейки расчетной сетки, далее составляется глобальная матрица и решается система линейных алгебраических уравнений. Используя этот подход, был разработан целый ряд коммерческих и свободно распространяемых программных пакетов [7, 8], таких как ANSYS CFX, ANSYS FLUENT, FlowVision, PHOENICS, TascFlow, Star-CD, SINE, SigmaFlow и ряд других, которые основываются на численном решении системы дифференциальных уравнений различными алгоритмами.

*Теория подобия и критериальный подход.* При изучении конвективного теплообмена основную роль играет эксперимент. Используя теорию подобия и анализ критериев [1, 2], которые были введены В. Нуссельтом в 1910 г., результаты единичных опытов удается обобщить на все сходные случаи. Такое обобщение позволяет получить зависимости коэффициента теплоотдачи от всех влияющих параметров величин.

Для уменьшения числа независимых переменных была разработана теория подобия. Уравнения подобия позволяют выразить обобщенную зависимость между величинами параметров, которые характеризуют процесс, и являются справедливыми для всех подобных между собой процессов [1, 3].

В общем виде критериальное уравнение конвективного теплообмена имеет вид:

$$Nu = c \cdot Re^n \cdot Pr^m \cdot Gr^b \cdot \left( \frac{Pr}{Pr_{cm}} \right)^{0,25}, \quad (3)$$

где  $c, n, m, b$  – постоянные величины, которые зависят от конкретных условий и определяются опытным путем;  
 $Nu, Re, Pr, Gr$  – критерии подобия [1–3];  
 $(Pr / Pr_{cm})^{0,25}$  – поправка, учитывающая направление теплового потока.

## ЦЕЛЬ РАБОТЫ

Разработать теоретические основы использования геометрического моделирования реализованного в БН-исчислении (точечное исчисление Балюбы-Найдыша) [10–12] для аналитического описания тепломассообменных процессов применительно к задачам технической термодинамики и теплопередачи.

## ОСНОВНОЙ МАТЕРИАЛ

В рассмотренных выше существующих подходах аналитического описания и моделирования процессов конвективного теплообмена следует выделить ряд недостатков.

Конвективный теплообмен описывается системой дифференциальных уравнений и условиями однозначности, которые содержат большое количество неизвестных. Попытки аналитического решения этой системы уравнений наталкиваются на серьезные трудности, так как при решении задач конвективного теплообмена приходится делать целый ряд упрощений, которые могут существенно отличаться от реальных условий протекания процессов тепломассообмена.

К недостаткам численного подхода следует отнести то, что решение системы дифференциальных уравнений конвективного теплообмена может рассматриваться в линейной и нелинейной постановках. Линейное решение уравнений может давать большие погрешности в вычислении, так как связано со значительным упрощением. Решение нелинейных уравнений, не имеющих определенной структуры, дает более достоверные результаты, однако это весьма сложный и продолжительный процесс, который требует больших вычислительных ресурсов. Результаты расчетов сильно зависят от геометрической формы исследуемой области, которая может быть сложной и незакономерной, от изменения свойств вещества, а также особенностей выбранного программного пакета. Следует обратить внимание, что если представленная задача имеет более одного решения, то трудно выявить, какой из результатов расчета является правильным и как он согласуется с реальным протеканием процесса движения вещества. В таких случаях возникает необходимость экспериментального обоснования численного подхода в исследовании.

Недостаток критериального подхода заключается в трудности распространения полученных соотношений на широкий спектр задач, так например, свободная или вынужденная конвекция, ламинарный или турбулентный режим течения вещества, несжимаемое или сжимаемое течение. Полученное при обработке результатов единичного опыта критериальное уравнение может быть справедливым только в пределах изменения определяющих и параметрических критериев подобия, которые имели место в ходе проведения опыта. Зона действия критериального уравнения имеет определенные ограничения. В центральной части зон ламинарного или турбулентного режимов соблюдается закономерность течения жидкости, но чем ближе граница  $Re < 2\,320$  и  $2\,320 < Re$  [1], тем более вероятность погрешности в определении режима течения жидкости. Следует отметить, что во многих случаях процедура измерения бывает затруднительна, а оборудование для измерения не застраховано от погрешностей.

Несмотря на перечисленные выше недостатки, критериальный подход, который базируется на экспериментальных данных, с практической точки зрения остается наиболее предпочтительным. Если стадии получения экспериментальных данных, нельзя избежать, то можно воспользоваться матрицей планирования эксперимента с его дальнейшим аналитическим описанием методами геометрического моделирования. Для этого нужно зафиксировать несколько значений параметров, которые характеризуют состояние жидкости, и смоделировать весь процесс в целом как геометрический объект многомерного аффинного пространства. Таким образом, возможно избежать всех промежуточных уточняющих коэффициентов и критериев.

Для усовершенствования расчета процессов конвективного тепломассообмена предлагается использовать математический аппарат геометрического моделирования процессов и явлений – БН-исчисление.

*Обоснование выбора БН-исчисления в качестве аппарата геометрического моделирования тепломассообменных процессов:*

1. Основным элементом БН-исчисления является точка, которая характеризуется рядом параметров. Количество параметров, которые определяют точку в пространстве, зависит от размерности этого пространства. А любой геометрический объект является организованным множеством точек. Поэтому точечные уравнения, которые определяют геометрический объект в пространстве, справедливы для пространства любой размерности. Эта особенность БН-исчисления дает возможность представлять геометрические объекты в многомерном пространстве. Исходя из этого, можно сделать вывод, что геометрическая модель, представленная в БН-исчислении, является организованным множеством точек, которые зависят от нескольких, связанных между собой, текущих параметров [10–12].

2. Точечные уравнения геометрических объектов инвариантны относительно размерности пространства глобальной системы координат. То есть в качестве параметров выбираются такие параметры, которые являются инвариантными относительно параллельного проецирования (например, простое отношение трех точек прямой). Поэтому точечные уравнения справедливы для пространства любой размерности.

3. Точечное исчисление позволяет работать в локальном симплексе, а результат получать в глобальном симплексе. Причем переход от локального симплекса к глобальному осуществляется автоматически.

4. В БН-исчислении был разработан специальный метод подвижного симплекса, который позволяет конструировать геометрические объекты любой сложности с наперед заданными характеристиками. Использование метода подвижного симплекса позволяет установить зависимость между несколькими параметрами, что, в свою очередь, позволяет моделировать многопараметрические явления и процессы, учитывая не только независимые параметры, но и параметры, которые зависят один от другого [13].

5. В БН-исчислении каждой геометрической операции соответствует аналитическая операция. Таким образом, БН-исчисление позволяет представить любой геометрический алгоритм построения объекта в аналитическом виде, или в виде точечного уравнения, или в виде расчетного алгоритма, который, по сути, является упорядоченным множеством точечных уравнений. Поэтому в точечных уравнениях сохраняется наглядный геометрический смысл параметров, который известен из геометрического алгоритма построения объекта.

6. Точечные уравнения, по сути, являются символьной записью. Переходя к глобальной декартовой системе координат, точечные уравнения заменяются на систему однопипных параметрических уравнений, количество которых зависит от размерности пространства глобальной системы координат. Поэтому точечные уравнения и расчетные алгоритмы на их основе легко программируются на ЭВМ.

Рассмотрим более подробно теоретические основы общего подхода к конструированию геометрических объектов в  $n$ -мерном аффинном пространстве на основе заданного дискретного массива точек арифметического пространства (рис. 1, 2).

Под геометрическим моделированием процессов конвективного теплообмена следует понимать тот факт, что определенному процессу или явлению соответствует конкретный геометрический объект. Таким образом, в зависимости от количества факторов варьирования геометрический объект будет принадлежать соответствующему пространству. Например, однофакторному процессу ставится в соответствие однопараметрическое множество точек или линия (рис. 1а). Линия определяется как организованное множество точек в симплексе  $ABC$  с помощью текущего параметра  $u$ , который, двигая текущую точку  $P$ , формирует дугу кривой.

$$P_1 = (A_1 - C_1)p_1(u) + (B_1 - C_1)q_1(u) + C_1, \quad (4)$$

где  $A_i, B_i, C_i$  – точки, определяющие симплекс плоскости;  
 $p_i(u)$  и  $q_i(u)$  – функции параметра  $u$ , которые определяют движение точки  $P$ .

Двухфакторному процессу ставится в соответствие двухпараметрическое множество точек, которое как геометрический объект является поверхностью (рис. 1б).

$$\begin{cases} P_1 = (A_1 - C_1)p_1(u) + (B_1 - C_1)q_1(u) + C_1, \\ P_2 = (A_2 - C_2)p_2(u) + (B_2 - C_2)q_2(u) + C_2, \\ Q_1 = (P_1 - C_2)\phi_1(v) + (P_2 - C_2)f_1(v) + C_2, \end{cases} \quad (5)$$

где  $\phi_i(v)$  и  $f_i(v)$  – функции параметра  $v$ , которые определяют движение точки  $Q$ .

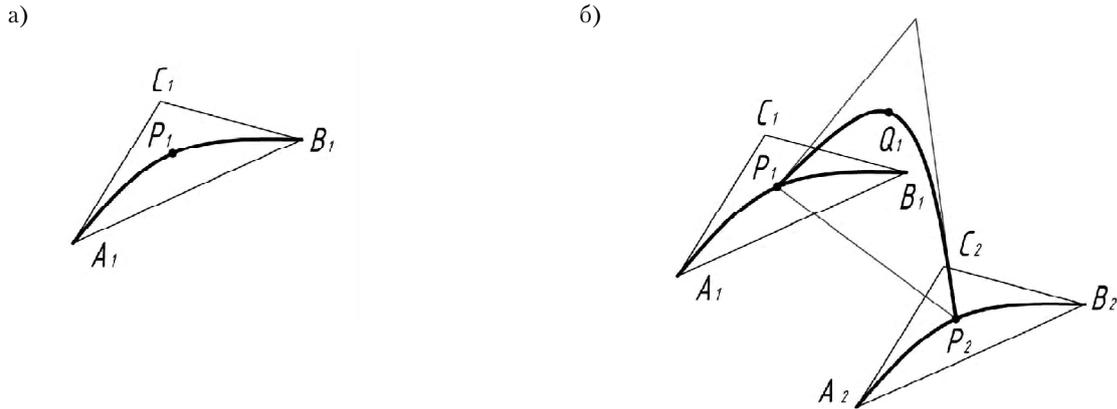


Рисунок 1 – Геометрическая схема конструирования: а) одно и б) двухпараметрического процесса.

Обобщая, трехфакторному процессу ставим в соответствие трехпараметрическое множество точек или гиперповерхность (рис. 2).

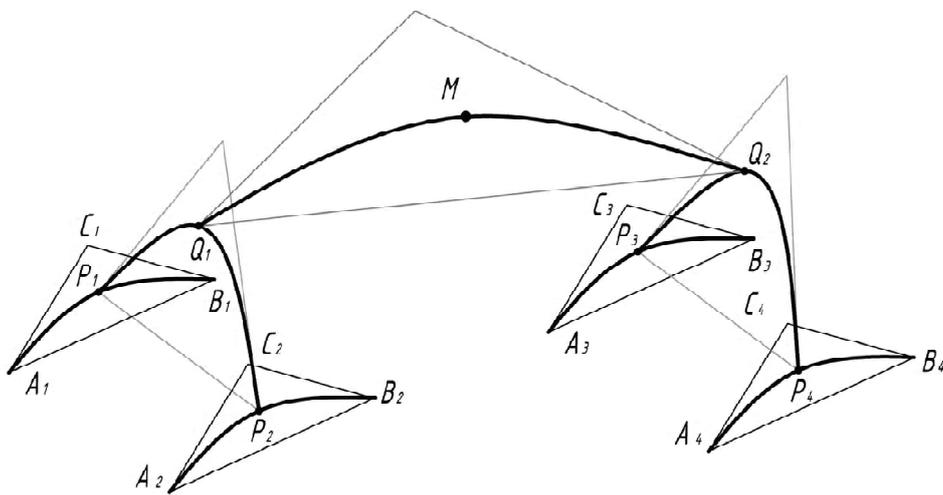


Рисунок 2 – Геометрическая схема конструирования трехпараметрического процесса.

$$\begin{cases}
 P_1 = (A_1 - C_1)p_1(u) + (B_1 - C_1)q_1(u) + C_1, \\
 P_2 = (A_2 - C_2)p_2(u) + (B_2 - C_2)q_2(u) + C_2, \\
 P_3 = (A_3 - C_3)p_3(u) + (B_3 - C_3)q_3(u) + C_3, \\
 P_4 = (A_4 - C_4)p_4(u) + (B_4 - C_4)q_4(u) + C_4, \\
 Q_1 = (P_1 - C_2)\phi_1(v) + (P_2 - C_2)f_1(v) + C_2, \\
 Q_2 = (P_3 - C_4)\phi_2(v) + (P_4 - C_4)f_2(v) + C_4, \\
 M = (Q_1 - C_4)\mu(w) + (Q_2 - C_4)\eta(w) + C_4.
 \end{cases} \quad (6)$$

где  $\mu(w)$  и  $\eta(w)$  – функции параметра  $w$ , которые определяют движение точки  $M$ .

Аналогичным образом можно сконструировать любой многопараметрический геометрический объект, который будет аналитически описывать многофакторные процессы и явления живой природы, техники, технологии, экономики, строительства и архитектуры в многомерном аффинном пространстве, и получить его аналитическое представление в виде расчетного точечного алгоритма.

## ВЫВОДЫ

В статье проанализированы и классифицированы существующие подходы моделирования теплообменных процессов применительно к задачам технической термодинамики и теплопередачи, а также выявлены их недостатки. Обоснован выбор метода многомерного геометрического моделирования, реализованного в БН-исчислении, что позволяет избежать приведенных выше недостатков для решения задач конвективного теплообмена. Разработаны теоретические основы геометрического моделирования теплообменных процессов в БН-исчислении, которые позволяют получить необходимые значения параметров жидкости и исследовать их с помощью методов математического анализа.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мирам, А. О. Техническая термодинамика. Теплообмен: Учебное издание [Текст] / А. О. Мирам, В. А. Павленко. – М. : АСВ, 2011. – 352 с.
2. Мухачев, Г. А. Термодинамика и теплопередача [Текст] : Учеб. для авиац. вузов / Г. А. Мухачев, В. К. Щюкин. – 3-е изд., перераб. – М. : Выс шк., 1991. – 480 с.
3. Михеев, М. А. Основы теплопередачи [Текст] / М. А. Михеев, И. М. Михеева. – Изд. 2-е, стереотип. – М. : Энергия, 1977. – 344 с.
4. Патанкар, С. Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости [Текст] : Пер. с англ. / С. Патанкар. – М. : Энергоатомиздат, 1984. – 152 с.
5. Андерсон, Д. Вычислительная гидромеханика и теплообмен [Текст] : [пер. с англ.]. В 2 ч. Ч. 1. / Д. Андерсон, Дж. Таннехилл, Р. Плетчер ; под ред. Г. Л. Подвидза. – М. : Мир, 1990. – 384 с.
6. Андерсон, Д. Вычислительная гидромеханика и теплообмен [Текст] : [пер. с англ.]. В 2 ч. Ч. 2. / Д. Андерсон, Дж. Таннехилл, Р. Плетчер ; под ред. Г. Л. Подвидза. – М. : Мир, 1990. – 336 с.
7. Смирнов, Е. М. Метод конечных объемов в приложении к задачам гидрогазодинамики и теплообмена в областях сложной геометрии [Текст] / Е. М. Смирнов, Д. К. Зайцев // Научно-технические ведомости. – 2004. – № 2. – С. 70–81.
8. Сравнительный анализ CFD-пакетов SigmaFlow и Ansys Fluent на примере решения ламинарных тестовых задач [Текст] / Д. В. Платонов, А. В. Минаков, Е. Б. Харламов, А. А. Дектерев // Вестн. Томск. гос. ун-та. матем. и мех. – 2013. – № 1(21). – С. 84–94.
9. Никонов, В. В. Развитие вихревых методов расчета обтекания тел несжимаемыми вязким и невязким потоками [Текст] : дис. ... канд. техн. наук : 01.02.05 / Никонов В. В. – Самара, 2007. – 174 с.
10. Балюба, И. Г. Конструктивная геометрия многообразий в точечном исчислении [Текст] : диссертация на соискание научной степени доктора технических наук : 05.01.01 / Балюба Иван Григорьевич. – Макеевка, 1995. – 227 с.
11. Найдеш, В. М. Алгебра БН-исчисления [Текст] / И. Г. Балюба, В. М. Верещага, В. М. Найдыш // Прикладна геометрія та інженерна графіка : Міжвідомчий науково-технічний збірник. – К. : КНУБА, 2012. – Вип. 90. – С. 210–215.
12. Балюба, И. Г. Точечное исчисление [Текст] : учебное пособие / И. Г. Балюба, В. М. Найдыш. – Мелитополь : МГПУ им. Б. Хмельницкого, 2015. – 236 с.
13. Давиденко, І. П. Конструювання поверхонь просторових форм методом рухомого симплексу [Текст] : дис. ... канд. техн. наук : 05.01.01 / І. П. Давиденко ; Тавр. держ. агротехнол. ун-т. – Мелітополь, 2012. – 186 с.

Получено 04.09.2017

О. С. ВОРОНОВА

### ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ГЕОМЕТРИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ КОНВЕКТИВНОГО ТЕПЛООБМІНУ ДОУ ВПО «Донбаська національна академія будівництва і архітектури»

**Анотація.** У даній статті проведено аналіз існуючих підходів аналітичного опису і моделювання процесів конвективного теплообміну стосовно завдань технічної термодинаміки і теплопередачі, а також виявлені недоліки кожного з них. Для удосконалення розрахунку процесів конвективного теплообміну пропонується використовувати математичний апарат геометричного моделювання процесів і явищ – БН-числення, що дозволяє отримати необхідні значення параметрів рідини і досліджувати їх за допомогою методів математичного аналізу.

**Ключові слова:** конвективний теплообмін, теплообмін, диференціальні рівняння, параметри рідини, геометричне моделювання, БН-числення.

OLGA VORONOVA  
THEORETICAL FOUNDATIONS OF GEOMETRICAL MODELING OF  
CONVECTIVE HEAT EXCHANGE  
Donbas National Academy of Civil Engineering and Architecture

**Abstract.** In this paper, an analysis of existing approaches to analytical description and simulation of convective heat transfer processes in relation to the problems of technical thermodynamics and heat transfer has been considered, and the shortcomings of each of them have been revealed. To improve the calculation of convective heat and mass transfer processes, it is proposed to use the mathematical apparatus of geometrical modeling processes and phenomena – BN- calculation, which will allow obtaining the necessary values of the parameters of the liquid and investigating them with the help of mathematical analysis methods.

**Key words:** convective heat transfer, heat and mass transfer, differential equations, fluid parameters, geometric model, BN-calculation.

**Воронова Ольга Сергеевна** – магистр архитектуры, ассистент кафедры специализированных информационных технологий и систем ГОУ ВПО «Донбасская национальная академия строительства и архитектуры». Научные интересы: геометрическое и компьютерное моделирование процессов конвективного теплообмена применительно к задачам технической термодинамики и теплопередачи.

**Воронова Ольга Сергіївна** – магістр архітектури, асистент кафедри спеціалізованих інформаційних технологій та систем ДОУ ВПО «Донбаська національна академія будівництва і архітектури». Наукові інтереси: геометричне та комп'ютерне моделювання процесів конвективного теплообміну стосовно завдань технічної термодинаміки і теплопередачі.

**Voronova Olga** – Master of Architecture, Assistant, Specialized Information Technology and Systems Department, Donbas National Academy of Civil Engineering and Architecture. Scientific interests: geometric and computer modeling of convective heat and mass transfer processes in relation to the problems of technical thermodynamics and heat transfer.