ISSN 2519-2817 online
ВЕСТНИК Донбасской национальной академии строительства и архитектуры
Научно-технические достижения студентов строительно-архитектурной отрасли
Выпуск 2019-4(138)

УДК 004.025.8: 514.112.3

Т. П. МАЛЮТИНА, А. С. МИЩЕНКО, С. А. ЛОЗИЦКИЙ
ГОУ ВПО «Донбасская национальная академия строительства и архитектуры»

ОСОБЫЕ ТОЧКИ В ТРЕУГОЛЬНИКЕ И ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТОЧКИ ШЛЕМИЛЬХА

Аннотация. Статья посвящена описанию ранее полученных соотношений [1] для особых точек треугольника, основанных на точечном (БН-) исчислении, и дополнению этого списка точечной формулой Шлемильха. Основой для её получения явилась ***S***-теорема [2] (теорема отношения площадей) точечного исчисления, которая дала возможность найти точку пересечения прямых в многомерном пространстве.

Ключевые слова: точечное (БН-) исчисление, симплекс плоскости, особые точки треугольника, прямые Шлемильха, математический аппарат, вычислительные алгоритмы, многомерное пространство

ФОРМУЛИРОВКА ПРОБЛЕМЫ

Соединение графических и проекционных методов инженерной графики с точечными расчетными методами позволяет объединить зрительную наглядность с предусмотренной точностью решения инженерных задач. Метод прямых исчислений, заложенный в этом соединении, позволяет использовать компьютер. Эта возможность прикладной геометрии, основанной на точечном (БН) исчислении, позволяет выступать в виде геометрии конструирования. Предложенная работа является иллюстрацией подобной возможности.

АНАЛИЗ ПОСЛЕДНИХ ИССЛЕДОВАНИЙ И ПУБЛИКАЦИЙ

Предложенный в этой статье метод задания особых точек в треугольнике основан на методе точечного (БН) исчисления [3], который позволяет в компактной форме представить их выражения [1]. Процесс получения соотношения для вычисления точки Шлемильха выявил механизм работы математического аппарата точечного (БН) исчисления, основанный на возможности оперировать непосредственно геометрическими понятиями при описании графических построений; и использовать полученные соотношения для разработки вычислительных алгоритмов конструирования плоских и пространственных форм в пространстве [4].

ЦЕЛИ

Рассмотреть примеры точечных соотношений для определения особых точек треугольника и получить точечную формулу Шлемильха в симплексе [5] треугольника ABC, позволяющую делать обобщения на пространства n измерений.

ОСНОВНОЙ МАТЕРИАЛ

Геометрические формы состоят из множества точек, которые организуются в отрезки прямых, плоские фигуры, дуги кривых, поверхности. Основной их элемент – точка, которая в различных ситуациях выполняет различные функции. Выделим особые (замечательные) точки треугольника. Замечательность точки определяется естественностью конфигураций треугольника, которые ее образуют. Геометрический алгоритм построения этих точек отражает механизм работы точечного исчисления. Приведем точечную интерпретацию соответствия между графическими построениями и геометрическими преобразованиями на примере задания особых точек треугольника. Перечислим некоторые из особых точек треугольника [1].

Первая четверка известна с незапамятных времен, а именно: центр тяжести, центр вписанной окружности, центр описанной окружности, ортоцентр.

Центр тяжести (центроид) *T* (рис. 1) треугольника лежит на пересечении медиан треугольника и определяется как среднеарифметическая точка его вершин из соотношения:

$$T = \frac{A+B+C}{3}. \tag{1}$$

Центр вписанной окружности *P* (рис. 2) лежит на пересечении биссектрис треугольника и определяется средневзвешенным произведением его вершин и длин сторон, противоположных этим вершинам из соотношения:

$$P = \frac{Al_{BC}+Bl_{CA}+Cl_{AB}}{l_{BC}+l_{CA}+l_{AB}}. \tag{2}$$

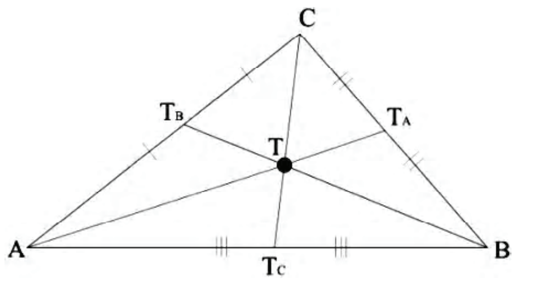

Рисунок 1 – Центр тяжести.

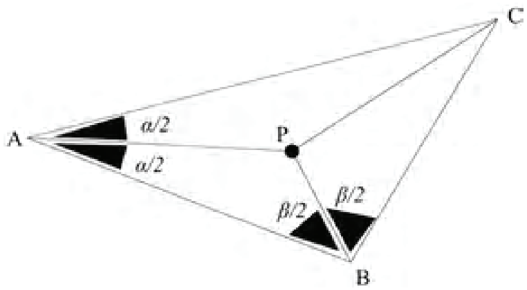

Рисунок 2 – Центр вписанной окружности.

Центр описанной окружности *Q* (рис. 3) лежит на пересечении срединных перпендикуляров и определяется средневзвешенным произведением его вершин и синусов углов из соотношения:

$$Q = \frac{A\sin 2\alpha + B\sin 2\beta + C\sin 2\gamma}{\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma}. \tag{3}$$

Ортоцентр *H* (рис. 4) лежит на пересечении высот треугольника и определяется произведением вершин и котангенсов углов, противолежащих этой вершине из соотношения:

$$H = Actg\beta \cdot ctg\gamma + Bctg\alpha \cdot ctg\gamma + Cctg\alpha \cdot ctg\beta. \tag{4}$$

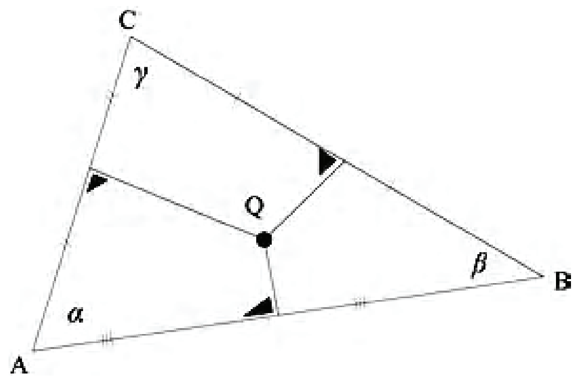

Рисунок 3 – Центр описанной окружности.

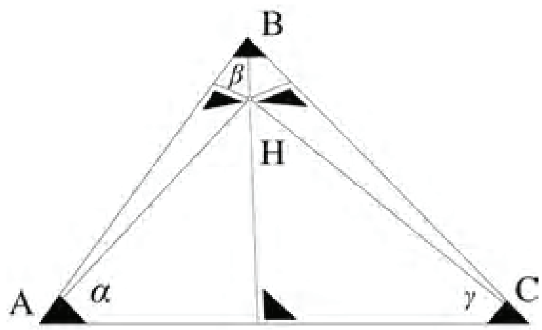

Рисунок 4 – Ортоцентр.

Дадим описание еще нескольких особых точек треугольника.

Точка Лемуана *L* (рис. 5) изогонально сопряжена центроиду ***T***. Можно сказать, что она минимизирует сумму квадратов расстояний до сторон треугольника и лежит на пересечении его симедиан.

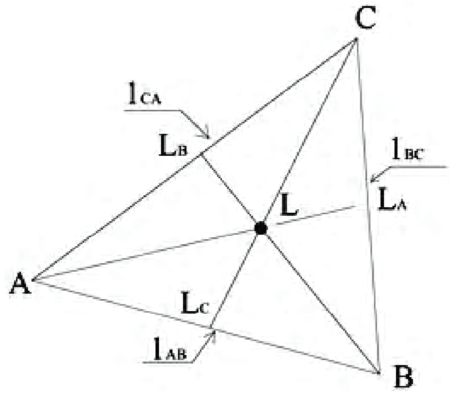

Рисунок 5 – Точка Лемуана.

Симедиана, как известно [6], – это прямая, проходящая через его вершину и делящая противоположную сторону на части, пропорциональные квадратам прилежащих сторон. Точка Лемуана определяется из соотношения:

$$L = \frac{A l_{BC}^2 + B l_{CA}^2 + C l_{AB}^2}{l_{BC}^2 + l_{CA}^2 + l_{AB}^2}. \tag{5}$$

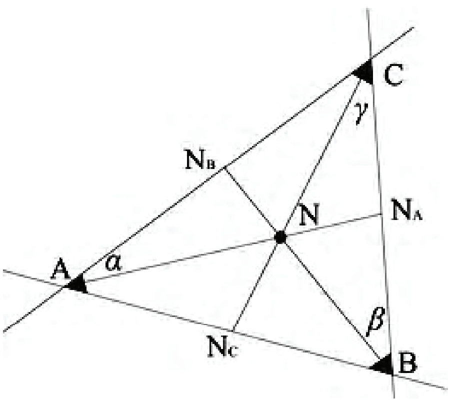

Рисунок 6 – Точка Нагеля.

Точка Нагеля *N* (рис. 6) лежит на пересечении прямых, соединяющих каждую из вершин треугольника с точкой касания противоположной стороны с соответствующей вневписанной окружностью. Она определяется средневзвешенным произведением его вершин и котангенсов половинных углов в этих вершинах из соотношения:

$$N = \frac{Actg\dfrac{\alpha}{2} + Bctg\dfrac{\beta}{2} + Cctg\dfrac{\gamma}{2}}{ctg\dfrac{\alpha}{2} + ctg\dfrac{\beta}{2} + ctg\dfrac{\gamma}{2}}. \tag{6}$$

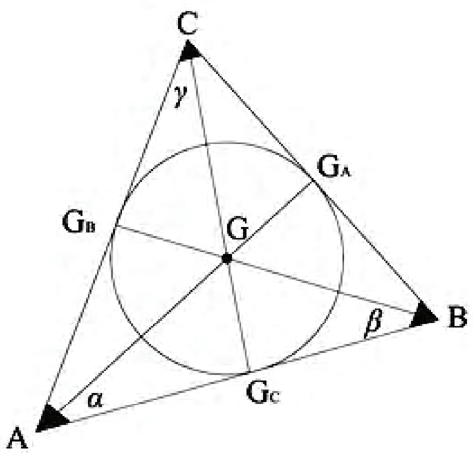

Рисунок 7 – Точка Жергонна.

Точка Жергонна *G* (рис. 7) лежит на пересечении прямых, соединяющих вершины треугольника с точками касания вписанной окружности со сторонами треугольника. Она определяется средневзвешенным произведением его вершин и тангенсов половинных углов в этих вершинах из точечного соотношения:

$$G = \frac{Atg\dfrac{\alpha}{2} + Btg\dfrac{\beta}{2} + Ctg\dfrac{\gamma}{2}}{tg\dfrac{\alpha}{2} + tg\dfrac{\beta}{2} + tg\dfrac{\gamma}{2}}. \tag{7}$$

Представленные точечные формулы особых точек треугольника отражают геометрические операции при их построении. Процесс получения соотношений между этими точками и точками, задающими плоскость, явился примером работы математического аппарата точечного исчисления. Он обеспечил реализацию таких возможностей, как: оперирование непосредственно геометрическими понятиями при описании графических построений; использование в удобной и компактной форме полученных соотношений при разработке вычислительных алгоритмов конструирования плоских форм в пространстве.

Дополним список особых точек треугольника **точечной формулой Шлемильха *Ш***.

Теорема Шлемильха утверждает, что прямые, которые соединяют середины сторон треугольника с серединами его высот пересекаются в одной точке – **точке Шлемильха** (рис. 8). Приведем геометрический алгоритм задания точки **Ш** в плоскости треугольника ***ABC***, заданного прямоугольными декартовыми координатами его вершин.

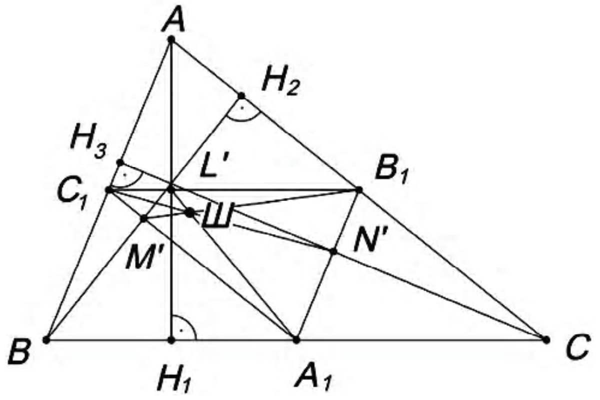

Рисунок 8 – Точка Шлемильха.

С точечного (БН) исчисления известно, что основы высот треугольника ***ABC*** (рис. 8) определяются по формулам:

$$H_C = \frac{A\Sigma_{AC}^{B} + B\Sigma_{BC}^{A}}{\Sigma_{AC}^{B} + \Sigma_{BC}^{A}}; \tag{8}$$

$$H_A = \frac{A\Sigma_{AB}^{C} + C\Sigma_{AC}^{B}}{\Sigma_{AB}^{C} + \Sigma_{AC}^{B}}; \tag{9}$$

$$H_B = \frac{C\Sigma_{BC}^{A} + A\Sigma_{BA}^{C}}{\Sigma_{BC}^{A} + \Sigma_{AB}^{C}}. \tag{10}$$

Определим середину высот треугольника ***ABC*** (рис. 8) и соответствующие середины сторон, которые определяют прямые Шлемильха:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{A\Sigma_{AC}^{B} + B\Sigma_{BC}^{A}}{\Sigma_{AC}^{B} + \Sigma_{AB}^{C}} + C\right) \leftrightarrow \frac{1}{2}(A+B); \tag{11}$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{B\Sigma_{AB}^{C} + C\Sigma_{AC}^{B}}{\Sigma_{AB}^{C} + \Sigma_{AC}^{B}} + A\right) \leftrightarrow \frac{1}{2}(B+C); \tag{12}$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{C\Sigma_{BC}^{A} + A\Sigma_{BA}^{C}}{\Sigma_{BC}^{A} + \Sigma_{AB}^{C}} + B\right) \leftrightarrow \frac{1}{2}(A+C). \tag{13}$$

Зададим точечное уравнение первой прямой:

$$2M = A\left(1 - \frac{\Sigma_{BC}^{A}}{\Sigma_{AC}^{B} + \Sigma_{BC}^{C}}t\right) + B\left(1 - \frac{\Sigma_{AC}^{B}}{\Sigma_{AC}^{B} + \Sigma_{BC}^{A}}t\right) + Ct. \tag{14}$$

Различные точки первой прямой задаются различными значениями параметра ***t***. Найдем такие значения параметра ***t***, которые вместе с двумя точками другой прямой определяют треугольник нулевой площади. Используя ***S***-теорему (теорему относительных площадей) с условием преобразования определителей получим соотношения:

$$\begin{vmatrix} \Sigma_{AC}^{B} + \Sigma_{BC}^{A} - t\Sigma_{BC}^{A} & \Sigma_{AC}^{B} + \Sigma_{BC}^{A} - t(2\Sigma_{AC}^{B} + \Sigma_{BC}^{A}) \\ \Sigma_{AC}^{B} + \Sigma_{AB}^{C} & \Sigma_{AB}^{C} - \Sigma_{AC}^{B} \end{vmatrix} = 0, \tag{15}$$

$$\begin{vmatrix} \Sigma_{AC}^{B}+\Sigma_{BC}^{A}-t(2\Sigma_{BC}^{A}+\Sigma_{AC}^{B}) & \Sigma_{AC}^{B}+\Sigma_{BC}^{A}-t\Sigma_{AC}^{B} \\ \Sigma_{AB}^{C}-\Sigma_{BC}^{A} & \Sigma_{BC}^{A}+\Sigma_{AB}^{C} \end{vmatrix}=0. \qquad (16)$$

Раскроем определители, после громоздких преобразований, получим из каждого определителя тот же результат:

$$t = (A + B) \,/\, (A + B + C). \qquad (17)$$

Окончательно получим, что для любого треугольника ***ABC*** существует **точка Шлемильха**, которую можно определить по точечной формуле:

$$2Ш = A\left(1-\frac{\Sigma_{BC}^{A}}{\Sigma_{AC}^{B}+\Sigma_{BC}^{A}}\cdot\frac{A+B}{A+B+C}\right)+B\left(1-\frac{\Sigma_{AC}^{B}}{\Sigma_{AC}^{B}+\Sigma_{BC}^{A}}\cdot\frac{A+B}{A+B+C}\right)+\frac{C(A+B)}{A+B+C}. \qquad (18)$$

Поскольку два разных определителя, связанные с определением точки пересечения первой прямой Шлемильха с другими, дали те же значение параметра ***t***, то этим доказано существование общей точки пересечения трёх прямых. Доказательство является конструктивным, так как применение полученной формулы позволяет по координатам вершин треугольника ***ABC*** рассчитать координаты точки Шлемильха.

ВЫВОДЫ

Полученная точечная формула является еще одним дополнением списка особых точек треугольника. Она позволяет включить ранее неизвестную точку Шлемильха во всевозможные компьютерные программы. Известно, что точечные формулы позволяют при расчётах вместо точек брать только одну их координату и этим работать в пространстве ***n*** измерений. Это свойство точечного исчисление используется при решении практических задач многомерного пространства, что требует разработки новых различных точечных соотношений. Разработанная система получения точечных формул может быть использована для моделирования геометрических объектов на основе точечного исчисления и проективных преобразований с применением средств компьютерной графики.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Малютина, Т. П. Интерпретация вычислительной геометрии плоских фигур в точечном исчислении [Текст] : дис. ... канд. техн. наук : 05.01.01 / Малютина Татьяна Петровна. – К. : КГТУСА, 1998. – 227 с.
2. Балюба И. Г. Конструктивная геометрия многообразий в точечном исчислении [Текст] : дис. ... д-ра техн. наук : 05.01.01 / Балюба Иван Григорьевич. – Макеевка : МИСИ, 1995. – 227 с.
3. Балюба, И. Г. Точечное исчисление [Текст] : учебное пособие / И. Г. Балюба, В. М. Найдыш. – Мелитополь : МГПУ им. Б. Хмельницкого, 2015. – 234с.
4. Давиденко, И. П. Конструирование поверхностей пространственных форм методом подвижного симплекса [Текст] : дис. ... канд. техн. наук : 05.01.01 / Давыденко Иван Петрович. – Макеевка : ДонНАСА, 2012. – 164 с.
5. Алгебра БН-исчисления [Текст] / В. М. Найдыш, И. Г. Балюба, В. М. Верещага // Міжвідомчий науковий збірник. Випуск 90 «Прикладна геометрія та інженерна графіка». – Київ : КНУБА, 2012. – С. 210–215.
6. Четверухин, Н. Ф. Проективная геометрия [Текст] : учебник для пед. ин-тов / Н. Ф. Четверухин. – 8-е изд. – М. : Просвещение, 1969. – 368 с.

Получено 09.04.2019

Т. П. МАЛЮТІНА, А. С. МІЩЕНКО, С. А. ЛОЗИЦЬКИЙ

ОСОБЛИВІ ТОЧКИ В ТРИКУТНИКУ І ВИЗНАЧЕННЯ ТОЧКИ ШЛЕМІЛЬХА

ДОУ ВПО «Донбаська національна академія будівництва і архітектури»

Анотація. Стаття присвячена опису раніше отриманих співвідношень [1] для особливих точок трикутника, основаних на точковому (БТ) обчисленні, і доповненню цього списку точковою формулою Шлемільха. Основою для її отримання стала ***S***-теорема [2] (теорема відношення площ) точкового числення, яка дала можливість знайти точку перетину прямих у багатовимірному просторі.
Ключові слова: точкове (БН-) обчислення, симплекс площини, особливі точки трикутника, прямі Шлемільха, математичний апарат, обчислювальні алгоритми, багатовимірний простір.

TATYANA MALUTINA, ALINA MISHCHENKO, SERGEY LOZITSKY
SPECIAL POINTS IN A TRIANGLE AND DETERMINATION OF THE POINT OF SLAMILKH
Donbas National Academy of Civil Engineering and Architecture

Abstract. The article is devoted to the description of the previously obtained relations [1] for singular points of a triangle based on point (BN) calculus, and the addition of this list with the Schlemilch point formula. The basis for obtaining it was the ***S***-theorem [2] (area ratio theorem) of point calculus, which made it possible to find the intersection point of lines in a multidimensional space.
Key words: point (BN-) calculus, simplex plane, singular points of a triangle, Schlemilch's lines, mathematical apparatus, computational algorithms, multidimensional space.

Малютина Татьяна Петровна – кандидат технических наук, доцент кафедры специализированных информационных технологий и систем ГОУ ВПО «Донбасская национальная академия строительства и архитектуры». Научные интересы: развитие альтернативного геометрического аппарата рационального описания контуров геометрических тел, создание расчетных моделей различных технических форм в процессе их проектирования на основе математического аппарата БН-исчисления.

Мищенко Алина Сергеевна – студентка ГОУ ВПО «Донбасская национальная академия строительства и архитектуры». Научные интересы: изучение и освоение механизма работы математического аппарата точеного (БН) исчисления на примере получения новых соотношений особых точек треугольника, решения задач с плоскими фигурами, в определитель которых входят точки симплекса.

Лозицкий Сергей Андреевич – студент ГОУ ВПО «Донбасская национальная академия строительства и архитектуры». Научные интересы: изучение и освоение механизма работы математического аппарата точеного (БН) исчисления на примере получения новых соотношений особых точек треугольника, решения задач с плоскими фигурами, в определитель которых входят точки симплекса.

Малютіна Тетяна Петрівна – кандидат технічних наук, доцент кафедри спеціалізованих інформаційних технологій і систем ДОУ ВПО «Донбаська національна академія будівництва і архітектури». Наукові інтереси: розвиток альтернативного геометричного апарата раціонального опису контурів геометричних тіл, створення розрахункових моделей різних технічних форм у процесі їх проектування на основі математичного апарата БН-обчислення.

Мищенко Алина Сергіївна – студент ДОУ ВПО «Донбаська національна академія будівництва і архітектури». Наукові інтереси: вивчення та освоєння механізму роботи математичного апарата точкового (БН-) обчислення на прикладі отримання нових співвідношень особливих точок трикутника, розв'язання задач з плоскими фігурами, в визначник яких входять точки симплексу.

Лозицький Сергій Андрійович – студент ДОУ ВПО «Донбаська національна академія будівництва і архітектури». Наукові інтереси: вивчення та освоєння механізму роботи математичного апарата точкового (БН-) обчислення на прикладі отримання нових співвідношень особливих точок трикутника, розв'язання задач з плоскими фігурами, в визначник яких входять точки симплексу.

Malutina Tatyana – Ph. D. (Eng.), Associate Professor, Specialized Information Technology and Systems Department, Donbas National Academy of Civil Engineering and Architecture. Scientific interests: development of an alternative geometric apparatus for the rational description of the contours of geometric bodies, the creation of computational models of various technical forms in the process of their design on the basis of the mathematical apparatus of BN calculus.

Mishchenko Alina – student, Donbas National Academy of Civil Engineering and Architecture. Scientific interests: the study and development of the mechanism of the mathematical apparatus of exact (BN) calculus by the example of obtaining new relations of the singular points of the triangle, solving problems with flat figures, the determinant of which includes the points of the simplex.

Lozitsky Sergey – student, Donbas National Academy of Civil Engineering and Architecture. Scientific interests: the study and development of the mechanism of the mathematical apparatus of exact (BN) calculus by the example of obtaining new relations of the singular points of the triangle, solving problems with flat figures, the determinant of which includes the points of the simplex.