ISSN 2519-2817 online
Здания и сооружения с применением новых материалов и технологий
Выпуск 2020-3(143)

УДК 531.3:539.6:624.042.8

С. А. ФОМЕНКО
ГОУ ВПО «Донбасская национальная академия строительства и архитектуры»

МЕТОДЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЧАСТОТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ СИСТЕМ

Аннотация. Большинство элементов реальных конструкций и сооружений представляют собой системы с распределенными параметрами, т. е. системы с бесконечным числом степеней свободы. Одной из важных задач динамического расчета строительных конструкций является определение спектра собственных частот колебаний. Большинство приближенных методов позволяет получить лишь первую частоту собственных колебаний и не позволяет оценить значимость последующих частот. В статье рассмотрены алгоритмы решения задач на определение частот малых колебаний консервативной системы с несколькими степенями свободы при помощи известных способов (использование уравнений Лагранжа, использование общих теорем динамики, метод перемещений). Достаточно точно возможно определить частотные характеристики при продольных, крутильных и изгибных колебаниях конструкций при помощи метода начальных параметров. Приведен пример решения задачи при помощи метода начальных параметров.

Ключевые слова: уравнения Лагранжа, метод начальных параметров, статически неопределимые системы, частота собственных колебаний.

ФОРМУЛИРОВКА ПРОБЛЕМЫ

Большинство элементов реальных конструкций [7] и сооружений представляют собой системы с распределенными параметрами, т. е. системы с бесконечным числом степеней свободы. На первом этапе проведения динамического расчета данных конструкций стоит задача по определению спектра собственных частот, т. е. получения и решения волнового уравнения.

АНАЛИЗ ПОСЛЕДНИХ ИССЛЕДОВАНИЙ И ПУБЛИКАЦИЙ

В литературе [1, 2, 3] данный вопрос рассмотрен недостаточно полно, в основном он сводится к определению спектра собственных частот нескольких простых балочных схем как систем с распределенными параметрами, далее следуют приближенные и упрощенные методы динамического расчета (метод сил, метод перемещений, метод конечных элементов). На сегодняшний день многие задачи статики и динамики строительных конструкций, зданий, сооружений, машин успешно решаются приближенными методами (чаще всего – МКЭ) с использованием богатого сервиса таких программ, как ЛИРА-САПР, SCAD, МОНОМАХ, МИРАЖ и т. д.

Удобным способом составления дифференциальных уравнений малых колебаний системы является использование уравнений Лагранжа [1]. Однако получение волнового уравнения для системы с бесконечным числом степеней свободы затруднено, что влечет за собой упрощение задачи.

Весьма подробно рассмотрены задачи по нахождению частотных характеристик при продольных, крутильных и изгибных колебаниях с использованием метода начальных параметров в работах [3, 4, 5, 6]. Но и там практические расчеты ограничивались балками с двумя-тремя участками при наличии одной, двух сосредоточенных масс, что связано с большой трудоемкостью составления частотного уравнения методом начальных параметров.

ЦЕЛЬ

Большинство приближенных методов позволяет получить лишь первую частоту собственных колебаний и не позволяет оценить значимость последующих частот. Таким образом, поиск новых методов составления частотных уравнений является актуальной научно-практической задачей.

ОСНОВНОЙ МАТЕРИАЛ

Рассмотрим некоторые известные способы решения задач на определение частот малых колебаний консервативной системы с несколькими степенями свободы.

Первый способ – использование уравнений Лагранжа. Порядок действий следующий:

1) выбираем обобщенные координаты;
2) составляем выражение кинетической энергии;
3) определяем потенциальную энергию системы или вычисляем обобщенные силы;
4) внося выражения энергий (или обобщенные силы) в уравнения Лагранжа, получаем систему дифференциальных уравнений малых колебаний;
5) задаваясь частным решением этой системы, подставляем частное решение в систему дифференциальных уравнений движения;
6) исключая из полученной системы алгебраических уравнений амплитуды колебаний, находим уравнение частот;
7) решая уравнение частот, определяем собственные частоты системы.

Второй способ – использование общих теорем динамики. Порядок действий следующий:

1) исходя из условий задачи, выбираем путь составления дифференциальных уравнений – основное уравнение динамики или какую-нибудь из общих теорем динамики;
2) применяя избранную теорему, составляем дифференциальные уравнения малых колебаний системы;
3) задаваясь частными решениями системы, вносим эти частные решения в систему дифференциальных уравнений;
4) решая полученную систему уравнений, находим уравнение частот, из которого определяем собственные частоты системы.

Третий способ – метод перемещений. Порядок действий следующий:

1) определение степени кинематической неопределимости n;
2) выбор основной системы путем введения дополнительных связей;
3) для определения неизвестных записывают канонические уравнения метода перемещений, смысл которых состоит в том, что приравниваются нулю реакции во введенных связях, т. е. снимается противоречие между рассчитываемой и основной системой;
4) подставляя значения динамических перемещений и ускорений, а также некоторых преобразований, получаем систему однородных алгебраических уравнений;
5) система уравнений имеет два решения: тривиальное, соответствующее положению статического равновесия системы, и ненулевое, при котором определитель равен нулю;
6) решая частотное уравнение, определяют частоты собственных колебаний системы.

Рассмотрим *метод начальных параметров.*

Известно, что уравнение прогибов для произвольной формы колебаний по методу начальных параметров имеет вид [3]

$$y(x) = y_0 A_{kx} + \frac{\alpha_0}{k} B_{kx} + \frac{M_0}{k^2 EI_z} C_{kx} + \frac{P_0}{k^3 EI_z} D_{kx}. \tag{1}$$

При наличии на весомой балке (рис. 1а) сосредоточенной массы M_a в сечении $x = a$ нужно учесть силу инерции этой массы

$$P_u = M_a \omega^2 y_a = M_a \frac{k^4 EI_z}{m} y_a, \tag{2}$$

в уравнении (2) слагаемым, аналогичным слагаемому, содержащему начальный параметр P_a, т. е. в (1) следует добавить

$$\frac{P_u}{k^3 EI_z} D_{k(x-a)} \cdot e(x-a),$$

где $e\cdot(x-a)$ – единичная функция.

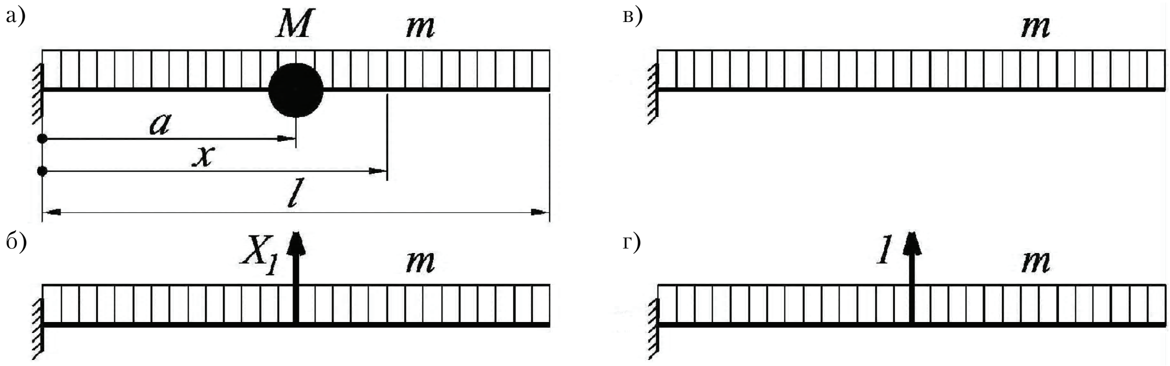

Рисунок 1 – К решению консольной весомой балки с одной сосредоточенной массой

Заменив сосредоточенную массу неизвестной силой $X_1 = P_u$, мы получим систему, эквивалентную заданной (рис. 1б), таким образом, систему с распределенными параметрами, при наличии n сосредоточенных масс будем рассматривать как n-раз статически неопределимую. При решении статических задач одним из наиболее эффективных способов раскрытия статической неопределимости является *метод сил*. Используем аналогичный подход и к решению динамической задачи. В качестве основной системы будет исходная система без наличия сосредоточенных масс (рис. 1в), а для составления канонических уравнений воспользуемся не кинематическими условиями, а силовым соотношением $X_1 = P_u$, тогда

$$X_1 = M_a \frac{k^4 EI_z}{m} y_a .$$

Введем обозначения $\varsigma = \frac{M_a}{ml}$, $\lambda = kl$, а прогиб y_a будем искать в виде $y_a = \frac{\delta_\lambda}{k^3 EI_z Y_\lambda} X_1$, $\frac{\delta_\lambda}{k^3 EI_z Y_\lambda}$ – перемещение сечения, в котором приложена масса для схемы (рис. 1г), Y_λ – функция, соответствующая частотному уравнению для основной системы.

Подставив введенные обозначения, получим

$$X_1 = \varsigma\lambda \frac{\delta_\lambda}{Y_\lambda} X_1, \tag{3}$$

тогда частотное уравнение принимает вид

$$Y_\lambda - \varsigma\lambda\delta_\lambda = 0 .$$

Для практического примера возьмем следующие исходные данные [6]: балка из двутавра № 20 длиной l = 4 м с погонной массой m = 400 кг/м содержит три одинаковые сосредоточенные массы M = 900 кг на равных расстояниях между опорами, рис. 2а. Жесткость балки при изгибе задана – $EI = 3{,}68 \cdot 10^6$ Н·м². Заменив массы неизвестными силами X_1, X_2, X_3 (рис. 2б), получим эквивалентную систему. На рис. 2в представлена основная система. Приложим в основной системе единичную силу на произвольном расстоянии a от левой опоры и определим уравнения прогибов и углов поворота для сечения x по *методу начальных параметров* (рис. 2г):

$$y(x) = \frac{\alpha_0}{k} B_{kx} + \frac{P_0}{k^3 EI_z} D_{kx} + \frac{1}{k^3 EI_z} D_{k(x-a)} \cdot e(x-a),$$

$$\alpha(x) = \alpha_0 A_{kx} + \frac{P_0}{k^2 EI_z} C_{kx} + \frac{1}{k^2 EI_z} C_{k(x-a)} \cdot e(x-a).$$

Начальные параметры α_0 и P_0 определим из условий закрепления правого конца балки ($y(l) = 0$), $\alpha(l) = 0$):

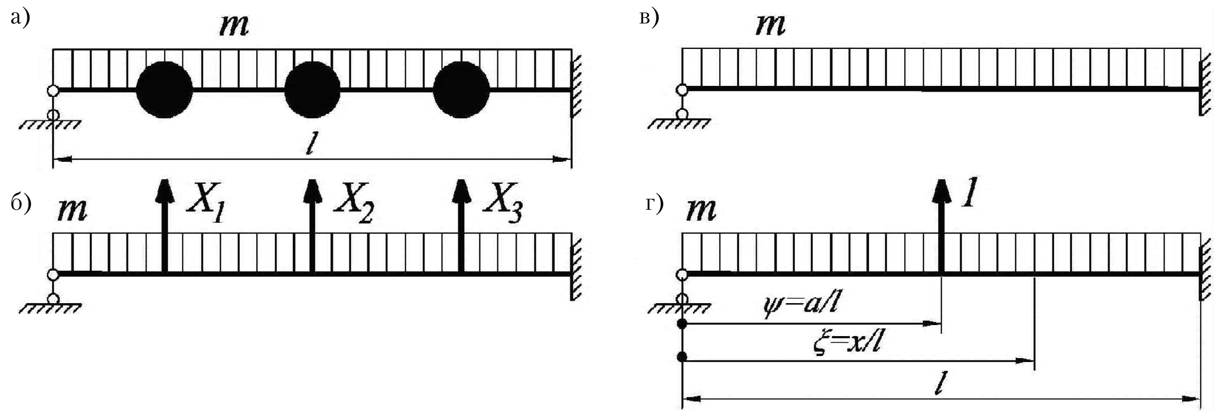

Рисунок 2 – К решению двухопорной весомой балки с тремя сосредоточенными массами.

$$\alpha_0 = \frac{D_\lambda C_{\lambda(1-\psi)} - C_\lambda D_{\lambda(1-\psi)}}{k^2 EI_z (B_\lambda C_\lambda - A_\lambda D_\lambda)};\ P_0 = \frac{A_\lambda D_{\lambda(1-\psi)} - B_\lambda C_{\lambda(1-\psi)}}{B_\lambda C_\lambda - A_\lambda D_\lambda},$$

где $\lambda = kl$, $\psi = a/l$ – относительная координата сечения приложения единичной силы.

Также учтем, что знаменатель в начальных параметрах соответствует частотному уравнению для основной системы $Y_\lambda = B_\lambda C_\lambda - A_\lambda D_\lambda$. Тогда уравнение перемещений принимает вид

$$y(\xi) = \frac{\left(D_\lambda C_{\lambda(1-\psi)} - C_\lambda D_{\lambda(1-\psi)}\right)B_{\lambda\xi} + \left(A_\lambda D_{\lambda(1-\psi)} - B_\lambda C_{\lambda(1-\psi)}\right)D_{\lambda\xi} + Y_\lambda D_{k(\xi-\psi)} \cdot e(\xi - \psi)}{k^3 EI_z Y_\lambda},$$

или

$$y(\xi) = \frac{\delta_\lambda(\xi, \psi)}{k^3 EI_z Y_\lambda},$$

где $\xi = x/l$ – относительная координата сечения, в котором ищем прогиб.

Тогда с учетом условий задачи соответственно уравнению (3) получаем систему уравнений

$$\begin{cases} X_1 = \frac{\varsigma\lambda}{Y_\lambda}\left(\delta_\lambda(0.25,0.25)X_1 + \delta_\lambda(0.25,0.5)X_2 + \delta_\lambda(0.25,0.75)X_3\right) \\ X_2 = \frac{\varsigma\lambda}{Y_\lambda}\left(\delta_\lambda(0.5,0.25)X_1 + \delta_\lambda(0.5,0.5)X_2 + \delta_\lambda(0.5,0.75)X_3\right) \\ X_3 = \frac{\varsigma\lambda}{Y_\lambda}\left(\delta_\lambda(0.75,0.25)X_1 + \delta_\lambda(0.75,0.5)X_2 + \delta_\lambda(0.75,0.75)X_3\right) \end{cases}.$$

Приравняв определитель системы нулю, получаем частотное уравнение

$$\begin{vmatrix} Y_\lambda - \varsigma\lambda\delta_\lambda(0.25,0.25) & -\varsigma\lambda\delta_\lambda(0.25,0.5) & -\varsigma\lambda\delta_\lambda(0.25,0.75) \\ -\varsigma\lambda\delta_\lambda(0.5,0.25) & Y_\lambda - \varsigma\lambda\delta_\lambda(0.5,0.5) & -\varsigma\lambda\delta_\lambda(0.5,0.75) \\ -\varsigma\lambda\delta_\lambda(0.75,0.25) & -\varsigma\lambda\delta_\lambda(0.75,0.5) & Y_\lambda - \varsigma\lambda\delta_\lambda(0.75,0.75) \end{vmatrix} = 0.$$

Первые четыре корня этого уравнения будут: $\lambda_1 = 2{,}906$; $\lambda_2 = 3{,}508$; $\lambda_3 = 5{,}444$; $\lambda_4 = 6{,}999$, а соответствующие им частоты $\omega_n = \frac{\lambda_n^2}{l^2}\sqrt{\frac{EI_z}{m}}$: $\omega_1 = 50{,}625$ $с^{-1}$, $\omega_2 = 73{,}772$ $с^{-1}$, $\omega_3 = 177{,}678$ $с^{-1}$, $\omega_4 = 293{,}661$ $с^{-1}$. Частота, найденная по упрощенному методу для заданной схемы [6] $\omega = 49{,}08$ $с^{-1}$. Погрешность составляет 3,05 %, что приемлемо.

ВЫВОДЫ

1) Из расчета видно, что вторая частота достаточно близка к первой, что является весьма грубым упрощением при замене исходной системы одномассовой.

2) Аналогичный подход, составляя смешанные силовые и кинематические соотношения можно использовать для решения простейших рамных конструкций.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сопротивление материалов [Текст] : учебник для вузов / В. И. Феодосьев. – 16-е изд., испр. – Москва : Издательство МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2016. – 543, [1] с.: ил.
2. Тарг, С. М. Краткий курс теоретической механики [Текст] : учеб. для втузов / С. М. Тарг. – 14-е изд, стер. – М. : Высш. шк., 2004. – 416 с.
3. Шевченко, Ф. Л. Динамика упругих стержневых систем [Текст] : учебное пособие / Ф. Л. Шевченко. – Донецк : ООО «Лебедь», 1999. – 268 с.
4. Шевченко, Ф. Л. Общие и различные свойства балок и ферм [Текст] / Ф. Л. Шевченко, С. Н. Царенко // Современное промышленное и гражданское строительство. – 2011. – Том 7, № 4. – С. 215–223.
5. Шевченко, Ф. Л. Оценка точности упрощенного динамического расчета систем с распределенными параметрами на примере однопролетной жестко защемленной балки с консолью [Текст] / Ф. Л. Шевченко, С. Н. Царенко // Український міжвідомчий науково-технічний збірник «Автоматизація виробничих процесів у машинобудуванні та приладобудуванні». – 2011. – Вып. 45. – С. 159–167.
6. Шевченко, Ф. Л. Задачі з опору матеріалів [Текст] / Ф. Л. Шевченко, С. М. Царенко. – Донецьк : ФОП Бабалік А.В., 2011. – 356 с.
7. Denisov, E. Rational parameters of a «damper on the thread» for damping bending oscillations of rigid bus structures [Текст] / E. Denisov, S. Fomenko // Металлические конструкции. – 2014. – Том 20, № 4. – С. 191–202.

Получена 17.04.2020

С. О. ФОМЕНКО
МЕТОДИ ВИЗНАЧЕННЯ ЧАСТОТНИХ ХАРАКТЕРИСТИК СТАТИЧНО НЕВИЗНАЧЕНИХ СИСТЕМ
ДОУ ВПО «Донбаська національна академія будівництва і архітектури»

Анотація. Більшість елементів реальних конструкцій і споруд являють собою системи з розподіленими параметрами, тобто системи з нескінченним числом ступенів свободи. Однією з важливих задач динамічного розрахунку будівельних конструкцій є визначення спектру власних частот коливань. Більшість наближених методів дозволяє отримати лише першу частоту власних коливань і не дозволяє оцінити значимість наступних частот. У статті розглянуті алгоритми рішення задач на визначення частот малих коливань консервативної системи з декількома ступенями свободи за допомогою відомих способів (використання рівнянь Лагранжа, використання загальних теорем динаміки, метод переміщень). Досить точно можливо визначити частотні характеристики при поздовжніх, крутильних і згинальних коливаннях конструкцій за допомогою методу початкових параметрів. Наведено приклад вирішення задачі за допомогою методу початкових параметрів.
Ключові слова: рівняння Лагранжа, метод початкових параметрів, статично невизначені системи, частота власних коливань.

SERAFYM FOMENKO
METHODS FOR DETERMINING THE FREQUENCY CHARACTERISTICS OF STATICALLY INDETERMINATE SYSTEMS
Donbas National Academy of Civil Engineering and Architecture

Abstract. Most elements of real structures and structures are systems with distributed parameters. They are systems with an infinite number of degrees of freedom. One of the important tasks of the dynamic calculation of building structures is to determine the spectrum of natural vibration frequencies. Most approximate methods allow you to get only the first frequency of natural oscillations, and does not allow to evaluate the significance of subsequent frequencies. The article discusses algorithms for solving problems on determining the frequencies of small oscillations of a conservative system with several degrees of freedom using known methods (using the Lagrange equations, using general theorems of dynamics, the method of displacement). It is quite accurate that it is possible to determine the frequency characteristics for

longitudinal, torsional and bending vibrations of structures using the initial parameter method. An example of solving the problem using the method of initial parameters is given.
Key words: Lagrange equations, initial parameter method, statically indeterminate systems, natural frequency

Фоменко Серафим Александрович – кандидат технических наук, доцент кафедры теоретической и прикладной механики ГОУ ВПО «Донбасская национальная академия строительства и архитектуры». Научные интересы: развитие общей методики динамических расчетов элементов строительных конструкций и поиск рациональных способов демпфирования колебаний.

Фоменко Серафим Олександрович – кандидат технічних наук, доцент кафедри теоретичної та прикладної механіки ДОУ ВПО «Донбаська національна академія будівництва і архітектури». Наукові інтереси: розвиток загальної методики динамічних розрахунків елементів будівельних конструкцій та пошук раціональних способів демпфірування коливань.

Fomenko Serafym – Ph. D. (Eng.), Associate Professor; Theoretical and Applied Mechanics Department, Donbas National Academy of Civil Engineering and Architecture. Scientific interests: development of a general methodology of the dynamic calculations of construction elements and the search for rational ways of vibration damping.