

EDN: **TFNOEU**

УДК 531.3/637.5.02

**С. Н. ЦАРЕНКО, Е. А. ГОЛОВАНЕВ**Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования Камчатский государственный технический университет,  
Российская Федерация, Камчатский край, г. Петропавловск-Камчатский

## ИССЛЕДОВАНИЕ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ ЖЕСТКОГО РОТОРА НА УПРУГИХ ОПОРАХ

**Аннотация.** В работе проведены исследования динамики жесткого ротора на упругих опорах для случая переменного момента инерции в поперечном направлении. Математическая модель ротора представлена системой дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами. Расчетные зависимости представлены с использованием безразмерных величин. Решение системы уравнений получено численно методом Адамса. Для частного случая роторной системы, когда момент инерции постоянен, найдено аналитическое решение. Выполнено сравнение результатов расчета для двух моделей. Установлено, что возможны случаи параметрического резонанса на частотах, которые значительно ниже собственных частот колебаний. Получено условие, при котором возможна замена упругих опор на абсолютно жесткие. Результаты моделирования для линейной и нелинейной постановки задачи показали близкое поведение функций перемещений на диапазоне изменения частот до первой собственной частоты, за исключением зон параметрического резонанса.

**Ключевые слова:** роторная динамика, динамические нагрузки, лабораторный стенд, колебания упругих систем, параметрические колебания, резонанс.

### ВВЕДЕНИЕ

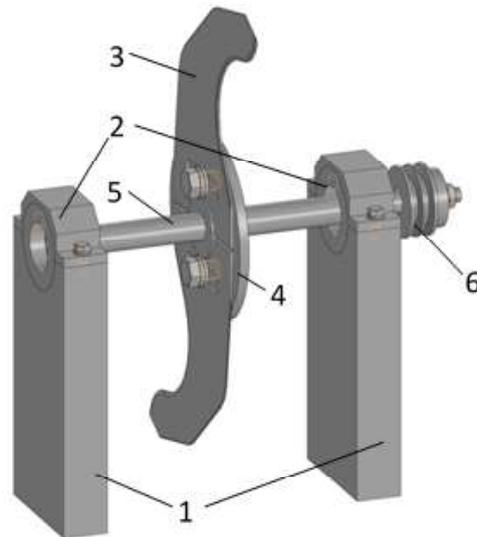
Роторные системы используются, как промежуточные звенья в процессе накопления и преобразования энергии, а также непосредственно для реализации технологических операций во многих машинах и оборудовании строительной, транспортной, пищевой и пр. отраслей. Сюда можно отнести: различные центрифуги, машины для измельчения и смешивания сырья и т. д. Особенностью роторных систем является – возникновение значительных динамических нагрузок, которые вызывают вибрации и приводят к усиленному износу и поломке узлов в целом.

### АНАЛИЗ ПОСЛЕДНИХ ИССЛЕДОВАНИЙ И ПУБЛИКАЦИЙ

Роторной динамике посвящено множество работ отечественных и зарубежных авторов. Общие принципы построения математических моделей для роторных систем рассмотрены в работах [1–3]. Динамика высокооборотных роторных машин с учетом нелинейной податливости подшипниковых узлов исследована в статье [4]. Особенности поведения роторной системы с маятниковыми балансирными элементами рассмотрены в работе [5]. Как правило, в линейной постановке поведение системы достаточно предсказуемо, при этом задача сводится к поиску спектра собственных частот для недопущения резонансных явлений. В нелинейной постановке задачи колебаний, поведение системы трудно прогнозируемо и для каждой ситуации требуется поведение отдельных исследований.

Для изучения влияния технологических режимов измельчения сырья, а также для отслеживания состояния режущих кромок ножей куттера разработан лабораторный стенд. На рис. 1 представлены основные элементы стенда, не показаны чаша с измельчаемым продуктом и защитный кожух. В работе [6] приводится описание конструкции стенда, а также определены его основные массо-центровые характеристики. Конструктивно на роторе предполагается размещение пары ножей, что приводит к неравенству моментов инерции относительно главных поперечных осей, а это создаст переменные инерционные характеристики при колебании системы в поперечной плоскости.



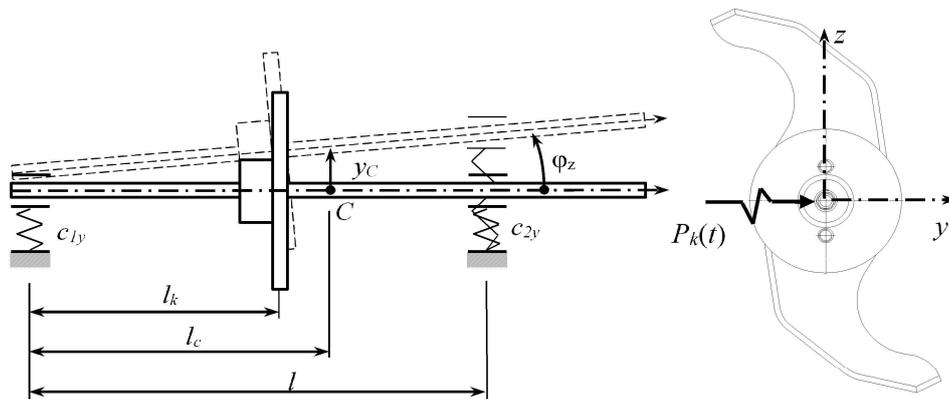


**Рисунок 1** – Модель стенда для исследования динамических усилий в приводе ножевого вала куттера:  
1 – стойки; 2 – подшипниковые узлы с датчиками давления; 3 – ножи куттера; 4 – фланец крепления ножей;  
5 – ножевой вал; 6 – приводной шкив.

**Целью работы** является исследование параметрических колебаний жесткого ротора на упругих опорах, для определения режимов параметрического резонанса.

#### МЕТОДЫ И МАТЕРИАЛЫ

Ротор будем рассматривать, как твердое тело на упругих опорах. Так как жесткость опор в вертикальном направлении, практически, на два порядка выше жесткости в горизонтальном направлении [6], ограничимся плоской задачей. Расчетная схема стенда представлена на рис. 2, здесь  $c_{ky}$ ,  $k = 1, 2$  – жесткость опор в поперечном направлении;  $l$  – расстояние между опорами;  $l_c$  – осевая координата центра масс подвижного узла;  $P_k(t)$  – активная нагрузка;  $l_k$  – осевая координата возмущающей силы.



**Рисунок 2** – Расчетная схема лабораторного стенда определения динамических усилий на приводе ножей куттера.

Кинетическую энергию поперечных колебаний ротора, с учетом упругой податливости опор, можно представить в виде

$$T = \frac{M\dot{y}_c^2}{2} + (I_1 \cos^2 \theta t + I_2 \sin^2 \theta t) \frac{\dot{\varphi}_z^2}{2}, \quad (1)$$

где  $M$  – масса ротора;  
 $\dot{y}_c$  – проекция вектора скорости центра масс на ось  $y$ ;  
 $\dot{\varphi}_z$  – угловые скорости относительно оси  $z$ ;  
 $\theta$  – угловая скорость ротора;

$I_1, I_2$  – главные моменты инерции в поперечном направлении.

Обобщенные силы по соответствующим перемещениям имеют вид

$$Q_y = -c_{1y}(y_c - \varphi_z l_c) - c_{2y}(y_c + \varphi_z(l - l_c)) + \sum P_k \cos \theta t;$$

$$Q_{\varphi_z} = c_{1y}(y_c - \varphi_z l_c)l_c - c_{2y}(y_c + \varphi_z(l - l_c))(l - l_c) + \sum P_k \cos \theta t (l_k - l_c).$$

На основе уравнения Лагранжа 2-го рода, получим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} M\ddot{y}_c + c_{1y}(y_c - \varphi_z l_c) + c_{2y}(y_c + \varphi_z(l - l_c)) = \sum P_k \cos \theta_k t; \\ \left(\frac{I_1 + I_2}{2} + \frac{I_1 - I_2}{2} \cos 2\theta t\right) \ddot{\varphi}_z - (I_1 - I_2)\theta \sin 2\theta t \dot{\varphi}_z - \\ -c_{1y}(y_c - \varphi_z l_c)l_c + c_{2y}(y_c + \varphi_z(l - l_c))(l - l_c) = \sum P_k \cos \theta t (l_k - l_c). \end{cases} \quad (2)$$

Представим систему (2) в безразмерных величинах

$$\begin{cases} \frac{d^2 \tilde{y}}{d\tau^2} + \frac{1 + \chi}{2} \tilde{y} + \frac{\chi(1 - \xi) - \xi}{2} \varphi_z = \sum \tilde{P}_k \cos \tilde{\theta}_k \tau; \\ (1 + \psi \cos 2\tilde{\theta} \tau) \frac{d^2 \varphi_z}{d\tau^2} - 2\psi \tilde{\theta} \sin 2\tilde{\theta} \tau \dot{\varphi}_z + \\ + \tilde{I}(\xi^2 + \chi(1 - \xi)^2) \varphi_z = \sum 2\tilde{I} \tilde{P}_k \cos \tilde{\theta}_k \tau (\xi_k - l_c). \end{cases} \quad (3)$$

где  $\tilde{y} = y_c/l$  – относительное перемещение;  
 $\chi = c_{2y}/c_{1y}$  – относительная жесткость;  
 $\theta = t\omega$  – безразмерное время,  $\omega = \sqrt{2c_{1y}/M}$ ;

$\tilde{\theta}_k = \theta_k/\omega$ ,  $\tilde{\theta} = \theta/\omega$  – безразмерная угловая скорость;  
 $\xi = l_c/l$ ,  $\xi_k = l_k/l$  – относительные координаты;  
 $\tilde{I} = Ml^2/(I_1 + I_2)$  – безразмерный момент инерции;  
 $\psi = (I_1 - I_2)/(I_1 + I_2)$ ;  $\tilde{P}_k = P_k/(Ml\omega^2)$  – безразмерная нагрузка.

В частном случае, если  $\psi = 0$ , систему (3) можно привести к уравнению

$$\frac{d^4 \tilde{y}}{d\tau^4} + \alpha \frac{d^2 \tilde{y}}{d\tau^2} + \beta \tilde{y} = \sum \left( \tilde{I}(\xi^2 + \chi(1 - \xi)^2) - \tilde{\theta}_k^2 - \tilde{I}(\xi_k - \xi)(\chi(1 - \xi) - \xi) \right) \tilde{P}_k \cos \tilde{\theta}_k \tau; \quad (5)$$

$$\varphi_z = \frac{2}{\chi(1 - \xi) - \xi} \left( \sum \tilde{P}_k \cos \tilde{\theta}_k \tau - \frac{d^2 \tilde{y}}{d\tau^2} - \frac{1 + \chi}{2} \tilde{y} \right), \quad (6)$$

здесь введены следующие обозначения

$$\alpha_y = \frac{1}{2} (2\tilde{I}(\xi^2 + \chi(1 - \xi)^2) + 1 + \chi);$$

$$\beta_y = \frac{1}{2} (\tilde{I}(\xi^2 + \chi(1 - \xi)^2)(1 + \chi) - \tilde{I}(\chi(1 - \xi) - \xi)^2).$$

Общее решение уравнения (5) можно представить в виде

$$\begin{aligned} \tilde{y}(\tau) = & A_1 \sin \tilde{\omega}_1 \tau + B_1 \cos \tilde{\omega}_1 \tau + A_2 \sin \tilde{\omega}_2 \tau + B_2 \cos \tilde{\omega}_2 \tau + \\ & + \sum \frac{\tilde{I}(\xi^2 + \chi(1 - \xi)^2) - \tilde{\theta}_k^2 - \tilde{I}(\xi_k - \xi)(\chi(1 - \xi) - \xi)}{\tilde{\theta}_k^4 - \alpha \tilde{\theta}_k^2 + \beta} \tilde{P}_k \cos \tilde{\theta}_k \tau, \end{aligned} \quad (7)$$

где  $\tilde{\omega}_1 = \sqrt{\frac{1}{2}(\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 4\beta})}$ ;  $\tilde{\omega}_2 = \sqrt{\frac{1}{2}(\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4\beta})}$ ,  
 $\omega_i = \tilde{\omega}_i \cdot \omega$  – собственные частоты поперечных колебаний.

Если не рассматривать собственные колебания системы, то первые члены выражения (7) можно в расчет не брать. С учетом зависимости (6) выражение для углов поворота можно представить в виде

$$\varphi_z(\tau) = \frac{2}{\chi(1-\xi)-\xi} \sum \left( 1 + \frac{I(\xi^2 + \chi(1-\xi)^2) - \tilde{\theta}_k^2 - I(\xi_k - \xi)(\chi(1-\xi) - \xi)}{\tilde{\theta}_k^4 - \alpha \tilde{\theta}_k^2 + \beta} \left( \tilde{\theta}_k^2 - \frac{1+\chi}{2} \right) \right) \tilde{P}_k \cos \tilde{\theta}_k \tau. \quad (8)$$

### РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

Для проектной конструкции стенда [6] параметры системы принимают значения:

$$\chi = 1; \xi = 0,651; \tilde{I} = 3,891; \psi = 0,15; \omega = 5036 \text{ с}^{-1}; \tilde{\omega}_1 = 0,927; \tilde{\omega}_2 = 1,504.$$

В качестве возмущающей силы возьмем гармоническую нагрузку за счет статической неуравновешенности системы – смещения центра масс на величину допуска на радиальное биение (40 мкм)

$$\tilde{P}(\tau) = \tilde{P}_1 \cos \tilde{\theta}_1 \tau; \tilde{P}_1 = 1,27 \cdot 10^{-4} \tilde{\theta}^2; \tilde{\theta}_1 = \tilde{\theta}; \xi_1 = \xi.$$

Для численного расчета системы (3) использовался метод Адамса на интервале  $– [0, 40 \pi / \tilde{\theta}]$  с разбивкой на 1 000 шагов. Начальные условия приняты на основе аналитических решений (7), (8):

$$\tilde{y}(0) = \frac{I(\xi^2 + \chi(1-\xi)^2) - \tilde{\theta}_k^2}{\tilde{\theta}_k^4 - \alpha \tilde{\theta}_k^2 + \beta} \tilde{P}_k; \varphi_z(0) = \frac{2}{\chi(1-\xi) - \xi} \left( 1 + \frac{I(\xi^2 + \chi(1-\xi)^2) - \tilde{\theta}_k^2}{\tilde{\theta}_k^4 - \alpha \tilde{\theta}_k^2 + \beta} \left( \tilde{\theta}_k^2 - \frac{1+\chi}{2} \right) \right) \tilde{P}_k;$$

$$\left. \frac{d\tilde{y}}{d\tau} \right|_{\tau=0} = 0; \left. \frac{d\varphi_z}{d\tau} \right|_{\tau=0} = 0.$$

На графиках (рис. 3) показаны зависимости амплитудных значений относительных перемещений и углов поворота, сплошная линия соответствует численным решениям системы (3), штриховая линия построена по аналитическим зависимостям (7), (8).

Детальное исследование поведения системы в точках локальных максимумов графиков (рис. 3) пока-

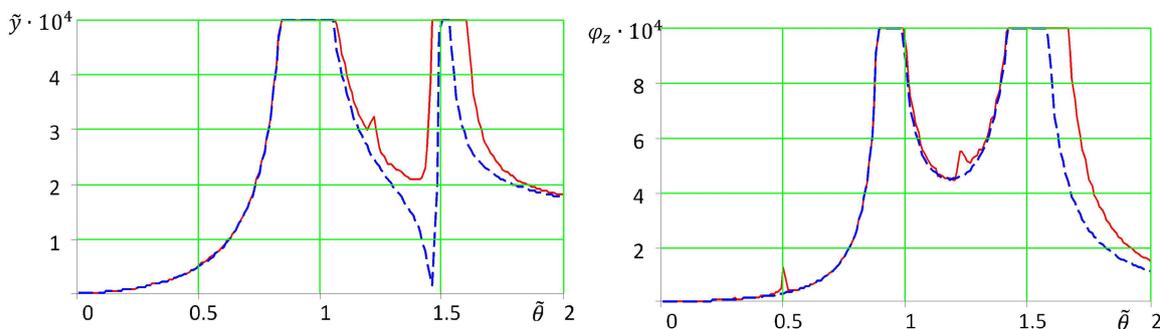


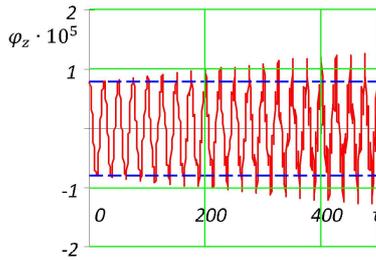
Рисунок 3 – Зависимости амплитудных перемещений и углов поворота от относительной скорости.

зало, что в большинстве случаев наблюдалось монотонное нарастание амплитуды колебаний с разной интенсивностью, как например, на графике рис. 4, это соответствует резонансному режиму. Однако отдельные случаи имели свою специфику, например, при относительной частоте  $\tilde{\theta} = 1,45$  амплитудные значения относительных перемещений хоть и многократно превышали величины, полученные для линейной модели (7) (на графиках рис. 5 и рис. 6 амплитудные значения показаны штриховой линией), но их изменение носит гармонический характер (рис. 5).

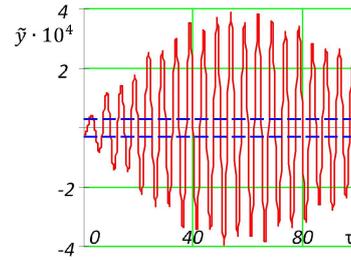
### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На основе проведенного исследования динамики жесткого ротора на упругих опорах можно сделать следующие выводы:

- 1) при относительной угловой скорости  $\tilde{\theta} < 0,2$ , различие динамических реакций в системах с жесткими и упругими опорами не превышает 5 %;
- 2) для случаев, когда моменты инерции ротора относительно главных поперечных осей не равны, воз-



**Рисунок 4** – Зависимость углов поворота при частоте  $\tilde{\theta} = 0,3$ .



**Рисунок 5** – Зависимость относительных перемещений при частоте  $\tilde{\theta} = 1,45$ .

можно возникновение параметрического резонанса на частотах, которые значительно ниже собственных частот упругих колебаний системы;

3) результаты моделирования для линейной и нелинейной постановки задачи дают близкие значения на диапазоне до первой собственной частоты, за исключением зон параметрического резонанса, для высоких частот наблюдается более существенное различие, как по числовым значениям амплитуд, так и по характеру поведения самих функций.

Следует отметить, что работа привода станда предполагается на частоте не более 3 000 об/мин, что соответствует относительной частоте  $\tilde{\theta}_{max} = 0,062$ , т. е. на до резонансных режимах. Тем не менее, при сборке конструкции станда, реальные жесткости опор могут существенно отличаться от теоретических, что потребует уточнения расчетных параметров модели. При аппроксимации периодической нагрузки рядом Фурье, возможен резонанс для отдельных коэффициентов разложения, что может потребовать доработки модели с учетом затухания колебаний. В перспективе планируется рассмотреть колебание вала ротора, как упругого стержня с двумя степенями свободы. Применение балочных моделей для исследования динамики конструкций разного назначения рассмотрено в статьях [7, 8].

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гольдин, А. С. Вибрация роторных машин / А. С. Гольдин. – Москва : Машиностроение, 1999. – 344 с. – Текст : непосредственный.
2. Muszynska, A. Rotordynamics / A. Muszynska. – Boca Raton, London, New York, Singapore : Taylor & Francis, 2005. – 1128 p. – Текст : непосредственный.
3. Кельзон, А. С. Динамика роторов в упругих опорах / А. С. Кельзон, Ю. П. Циманский, В. И. Яковлев. – Москва : Наука, 1982. – 280 с. – Текст : непосредственный.
4. Дормидонтов, Н. Е. Динамика ротора с учётом особенностей моделирования деформации опор / Н. Е. Дормидонтов, А. В. Иванов. – Текст : непосредственный // Труды НПО Энергомаш имени академика В. П. Глушко. – 2022. – № S38-39. – С. 80–93.
5. Артюнин, А. И. Применение метода разделения движений для исследования динамики роторной системы с гибким ротором и маятниковым автобалансином / А. И. Артюнин, Г. Г. Алхунсаев, К. В. Серебренников. – Текст : непосредственный // Известия высших учебных заведений. Машиностроение. – 2005. – № 9. – С. 8–14.
6. Царенко, С. Н. Разработка станда для определения динамических нагрузок в элементах узла ножевого вала куттера / С. Н. Царенко, Е. А. Голованев. – Текст : непосредственный // Техническая эксплуатация водного транспорта: проблемы и пути развития: материалы Шестой Всероссийской научно-технической конференции, Петропавловск-Камчатский, 9–10 ноября 2023 г. – Петропавловск-Камчатский : КамчатГТУ, 2024. – С. 24–27.
7. Виноградова, Т. Н. О расчете балочных железобетонных конструкций на действие кратковременных динамических нагрузок / Т. Н. Виноградова, А. А. Гречко. – Текст : электронный // Вестник Донбасской национальной академии строительства и архитектуры. – Выпуск 2020-4(144) Научно-технические достижения студентов строительной-архитектурной отрасли. – С. 56–61. – URL: [http://donnasa.ru/publish\\_house/journals/vestnik/2020/2020-4\(144\)/st\\_11\\_vinogradova\\_grechko.pdf](http://donnasa.ru/publish_house/journals/vestnik/2020/2020-4(144)/st_11_vinogradova_grechko.pdf) (дата обращения: 20.02.2024). – ISSN 2519-2817.
8. Фоменко, С. А. Методы определения частотных характеристик статически неопределимых систем / С. А. Фоменко. – Текст : электронный // Вестник Донбасской национальной академии строительства и архитектуры. – Выпуск 2020-3(143) Здания и сооружения с применением новых материалов и технологий. – С. 54–59. – URL: [http://donnasa.ru/publish\\_house/journals/vestnik/2020/2020-3\(143\)/st\\_10\\_fomenko.pdf](http://donnasa.ru/publish_house/journals/vestnik/2020/2020-3(143)/st_10_fomenko.pdf) (дата обращения: 20.02.2024). – ISSN 2519-2817.

Получена 05.04.2024

Принята 23.04.2024

SERGEY TSARENKO, EVGENY GOLOVANEV  
INVESTIGATION OF PARAMETRIC OSCILLATIONS OF A RIGID ROTOR ON  
ELASTIC SUPPORTS

Federal State Budget Educational Institution of Higher Education Kamchatka State Technical University, Russian Federation, Kamchatka Territory, Petropavlovsk-Kamchatsky

**Abstract.** The paper studies the dynamics of a rigid rotor on elastic supports for the case of a variable moment of inertia in the transverse direction. The mathematical model of the rotor is represented by a system of differential equations with variable coefficients. The calculated dependences are presented using dimensionless quantities. The solution of the system of equations is obtained numerically by the Adams method. For the special case of a rotary system, when the moment of inertia is constant, an analytical solution has been found. The calculation results for the two models are compared. It has been established that there may be cases of parametric resonance at frequencies that are significantly lower than the natural oscillation frequencies. A condition has been obtained under which it is possible to replace elastic supports with absolutely rigid ones. The simulation results for the linear and nonlinear formulation of the problem showed a similar behavior of displacement functions in the frequency range up to the first natural frequency, with the exception of parametric resonance zones.

**Keywords:** rotary dynamics, dynamic loads, laboratory bench, vibrations of elastic systems, parametric vibrations, resonance.

**Царенко Сергей Николаевич** – доктор физико-математических наук, доцент; профессор кафедры технологических машин и оборудования федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования Камчатского государственного технического университета. Научные интересы: динамика и устойчивость упругих систем.

**Голованев Евгений Алексеевич** – магистрант кафедры технологических машин и оборудования федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования Камчатского государственного технического университета. Научные интересы: расчет и проектирование машин и аппаратов пищевых систем.

**Tsarenko Sergey** – D. Sc. (Physical and Mathematical Sciences), Associate Professor; Professor, of the Department of Technological Machines and Equipment, Federal State Budget Educational Institution of Higher Education Kamchatka State Technical University. Scientific interests: dynamics and stability of elastic systems.

**Golovanev Evgeny** – master's student, Technological Machines and Equipment Department, Federal State Budget Educational Institution of Higher Education Kamchatka State Technical University. Scientific interests: calculation and design of machines and devices of food systems.