

Донбасская национальная академия строительства и архитектуры

На правах рукописи

Бумага Алла Ивановна



**ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ФИЗИКО-МЕХАНИЧЕСКИХ
СВОЙСТВ КОМПОЗИЦИОННЫХ
СТРОИТЕЛЬНЫХ МАТЕРИАЛОВ В БН-ИСЧИСЛЕНИИ**

05.23.05 – Строительные материалы и изделия
05.01.01 – Прикладная геометрия, инженерная графика

Диссертация на соискание учёной степени кандидата
технических наук

Научный руководитель
Братчун Валерий Иванович
доктор технических наук, профессор

Научный руководитель
Конопацкий Евгений Викторович
кандидат технических наук, доцент

Идентичность всех экземпляров диссертации заверяю:

Ученый секретарь специализированного
диссертационного совета Д01.006.02



Я.В. Назим

Макеевка – 2016

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	5
РАЗДЕЛ 1. Состояние вопроса и выбор метода исследования	13
1.1 Существующие методы моделирования явлений и процессов, которые используются для математического описания и оптимизации составов композиционных строительных материалов	13
1.2 Обоснование выбора БН-исчисления в качестве математического аппарата для геометрического моделирования композиционных строительных материалов	18
1.3 Теоретические основы математического аппарата «БН-исчисление».	21
РАЗДЕЛ 2. Теоретические основы геометрического моделирования многокомпонентных систем	38
2.1 Существующие способы конструирования дуг кривых, которые проходят через наперед заданные точки	38
2.2 Известные способы конструирования дуг алгебраических кривых в БН-исчислении.....	40
2.3 Способ конструирования дуги кривой n -го порядка через заданные точки на основе полиномов Бернштейна	45
2.3.1 Общий подход к конструированию дуг кривых, которые проходят через наперед заданные точки, на основе полиномов Бернштейна	45
2.3.2 Дуга кривой 2-го порядка, проходящая через 3 наперед заданные точки	46
2.3.3 Дуга кривой 3-го порядка, проходящая через 4 наперед заданные точки	48
2.3.4 Дуга кривой 4-го порядка, проходящая через 5 наперед заданные точки	50
2.3.5 Дуга кривой 5-го порядка, проходящая через 6 наперед заданные точки	51
2.3.6 Дуга кривой 6-го порядка, проходящая через 7 наперед заданные точки	55

2.4 Конструирование дуг кривых, которые проходят через несобственные точки	62
2.4.1 Точечное уравнение дуги кривой 2-го порядка с одной несобственной точкой	62
2.4.2 Точечное уравнение дуги кривой 3-го порядка с двумя несобственными точками	65
2.5 Способ конструирования геометрических моделей многокомпонентных систем	82
2.5.1 Геометрическая сущность метода подвижного симплекса	83
2.5.2 Конструирование геометрических моделей многофакторных явлений и процессов методом подвижного симплекса	87
РАЗДЕЛ 3. Геометрическое моделирование и оптимизация параметров технологического процесса производства газобетона	94
3.1 Геометрическое моделирование зависимости предела прочности при сжатии образцов газобетона после тепловлажностной обработки от напряженности электростатического поля и длительности электрообработки.....	97
РАЗДЕЛ 4. Геометрическое моделирование и оптимизация состава композиционных строительных материалов на примере комбинированного заполнителя мелкозернистого бетона.....	103
4.1 Построение геометрической модели зависимости физико-механических свойств мелкозернистого бетона от состава комбинированного заполнителя из отходов промышленности.....	103
4.2 Оптимизация состава комбинированного заполнителя на основе геометрической модели зависимости физико-механических свойств мелкозернистого бетона.....	107
РАЗДЕЛ 5. Геометрическое моделирование физико-механических свойств композиционных строительных материалов	111
5.1 Геометрическая модель зависимости средней плотности и прочности цементно-песчаной матрицы от содержания химических добавок ...	111

5.2 Геометрическое моделирование физико-механических свойств дегтеполимербетона	114
5.3 Геометрическая модель зависимости предела прочности при сжатии от четырех факторов.....	120
ВЫВОДЫ	129
СПИСОК ИСПОЛЬЗУЕМЫХ ИСТОЧНИКОВ	131
Приложение А. Копии документов о внедрении результатов исследова- ний	149
Приложение Б. Анализ эффективности использования регрессивного анализа по сравнению с исходными данными на примере математиче- ского моделирования зависимости физико-механических свойств ком- позиционного строительного материала	153
Приложение В. Листинг программ из компьютерной апробации резуль- татов исследований в программном пакете <i>Maple</i>	158

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы. Важной составляющей современных исследований в любой отрасли науки и техники является экспериментально-статистическое проектирование составов, обработка и аналитическое описание, полученного в результате эксперимента массива данных. Особенно это актуально для исследования свойств многокомпонентных систем, к которым относятся искусственные композиционные строительные материалы (КСМ), для которых важной задачей является определение оптимального состава КСМ с целью получения проектируемых физико-механических свойств. Но перед проведением оптимизации состава КСМ необходимо удостовериться в адекватности полученных аналитических зависимостей. При исследовании свойств строительных композиционных материалов и оптимизации их состава в настоящее время у отечественных и зарубежных учёных широко используется экспериментально-статистическое моделирование, в котором используется лишь геометрическая интерпретация оптимальных областей составов и параметров технологических режимов. С другой стороны, если некоторому процессу или явлению поставить в соответствие геометрический объект, который получен на основе имеющегося экспериментального массива данных, можно получать результаты гораздо более высокого качества, чем те которые получены другими способами математического и компьютерного моделирования.

Степень разработанности темы. Известно, что полученная математическая модель оптимизируемого КСМ исчерпывающе полной быть не может. Она всегда ограничена и должна соответствовать исключительно целям моделирования, отражая ровно столько свойств исходного объекта, с проектируемым составом и структурой сколько необходимо для данного конкретного исследования. Поэтому при оценке эффективности моделирования всегда встаёт вопрос об адекватности полученных моделей. Для оценки адекватности моделей, полученных на основе методов математической статистики, используются соответствующие критерии адекватности, которые показывают, насколько полученная математическая модель отличается от значений экспериментальных данных. При большом массиве

экспериментальных данных, когда геометрически имеется облако точек, такой подход оправдан, поскольку позволяет оценить характер протекания процесса, но при небольшом количестве экспериментальных данных он даёт значительную погрешность. С другой стороны, методами геометрического моделирования, можно создавать геометрические объекты с проектируемыми свойствами. Геометрически это значит, что объект должен проходить через множество точек, каждая из которых соответствует своей ячейке из полученного экспериментальным путём массива данных. Преимуществом такого подхода является полное отсутствие отклонений от исходных данных, поскольку это условие закладывается изначально в свойства геометрического объекта уже на стадии его формирования.

Другим недостатком современных математических моделей, которые используются для исследования физико-механических свойств композиционных материалов при оптимизации состава и структуры КСМ, является сложность одновременного учета всех факторов, которые влияют на процессы взаимодействия компонентов. Как правило, на практике используют зависимость необходимых физико-механических свойств композиционных материалов от одного фактора с помощью графика функции и от двух факторов, которые представлены в виде номограмм с изолиниями, или в виде отсека поверхности. Если необходимо проанализировать математическую зависимость от нескольких факторов, то избыточные факторы фиксируются, и строится математическая зависимость от одного или двух факторов, затем выбираются оставшиеся факторы и весь этот процесс повторяется. То есть, все необходимые физико-механические свойства композиционного материала исследуются по очереди. В некоторых случаях, исследуемые по очереди факторы, представляются в виде диаграмм, с последующим наложением диаграмм друг на друга для определения оптимальной области решения задачи. Метод действительно достаточно эффективный, но, с точки зрения начертательной геометрии, при фиксации ряда параметров мы имеем дело с проекцией, которая подобна оригиналу, но всегда от него отличается. Другими словами, такой подход не включает в себя инвариантные свойства параллельного проецирования, что ведёт к искажению формы его диаграммы. При совмещении диаграмм имеет

место накопление ошибки, поскольку каждая отдельная диаграмма несет в себе какую-то часть погрешности, связанной с проецированием. Такой метод не позволяет точно оценить одновременное влияние всех факторов и, прежде всего, их взаимодействие, а также геометрическую область оптимального состояния оптимизируемой системы на физико-механические свойства исследуемого композиционного материала.

Исходя из этого, можно сделать вывод о необходимости дальнейших исследований и разработки новых эффективных способов моделирования зависимости физико-механических свойств композиционных материалов от состава, который позволяет учитывать одновременное влияние всех необходимых факторов на качество КСМ.

Теоретической базой для данных исследований стали работы ведущих научных школ под руководством:

- в области геометрического моделирования процессов и явлений: Верещаги В.М. [1], Вертинской Н.Д. [2,3,134], Гумен Н.С. [4], Найдыша А.В. [5], Подгорного А.Л. [6] и др.;

- в области БН-исчисления: Балюбы И.Г. [7,8-54], Бездитного А.А. [55], Верещаги В.М. [8,19,48,50,56,57], Горягина Б.Ф. [7,11,47,51-54,58-61], Давыденко И.П. [41,47,49,62-64], Конопацкого Е.В. [1,44-46,57,60,60,65,67-74], Кучеренко В.В. [76], Малютиной Т.П. [7,10,12-15,35,36,39,51,52,77], Найдыша А.В. [5,50,54,57,75,78-81], Найдыша В.М. [24-26,48,82], Полищука В.И. [7,10,44,46,51,54,73,74], Скидана И.А. [83] и др.;

- в области исследования физико-механических свойств КСМ: Братчуна В.И. [84-88,89], Зайченко Н.М. [90,91], Королева И.В. [92,93], Матвиенко В.А. [94,139], Соколова Б.Ф. [95], Фролова А.Ф. [96], Ефремова А.Н. [97], Золотарева В.А. [97-101] и др.

- в области экспериментально-статистического моделирования физико-механических свойств КСМ: Баженова Ю.М. [102], Вознесенского В.А. [103,104], Дворкина Л.И. [105,106,115], Дворкина О.Л. [105,106,115], Коваля С.В. [103,137],

Ляшенко Т.В. [102,104,135], Носова В.П. [136], Кровякова С.А. [107], Смирнова В.А. [108] и др.

Экспериментальной базой для проведения исследований стали диссертационные работы: Самойловой Е.Э. [109], Рыбалко И.Ф. [110], Ходуна В.Н. [111], Мартыновой В.Б. [112], Толчина С.М. [94,113] и Аль-Шамси Халед Али Саида [114].

Связь работы с научными программами, планами, темами. Работа выполнена по плану научно-исследовательских работ Донбасской национальной академии строительства и архитектуры Д-2-04-13 «Новые композиционные материалы для промышленного и дорожного строительства, которые отличаются повышенной долговечностью, пониженной ресурсоемкостью и энергоемкостью производства», номер государственной регистрации 0113U001920 (заказчик Министерство образования и науки Украины) (2013 - 2014 гг.) и К-2-09-11 «Создание графического и вычислительного аппарата для моделирования топографических линий и поверхностей и их взаимного положения в рамках специализации «землеустройство», номер государственной регистрации 0111U0081760 (2011 - 2015 гг.).

Целью исследования является разработка метода геометрического моделирования и аналитического описания физико-механических свойств композиционных строительных материалов в зависимости от их состава в БН-исчислении.

Задачи исследования:

- выполнить анализ существующих способов моделирования оптимальных составов и аналитического описания физико-механических свойств композиционных строительных материалов;
- разработать и исследовать в БН-исчислении способы аналитического определения дуг алгебраических кривых, проходящих через наперёд заданные точки, применительно к многокомпонентным КСМ;
- разработать в БН-исчислении способ использования полученных дуг алгебраических кривых для моделирования многопараметрических процессов как гео-

метрических объектов многомерного пространства методом подвижного симплекса конструктивно-функциональных КСМ;

- разработать геометрические модели физико-механических свойств композиционных строительных материалов в зависимости от составов КСМ;

- разработать способ математической оптимизации состава композиционных строительных материалов на примере оптимизации состава многокомпонентного заполнителя из отходов промышленности для получения проектируемых свойств мелкозернистого бетона;

- внедрить результаты исследований проектирования оптимальных концентрационных соотношений в технологию производства многокомпонентных эффективных КСМ для строительства зданий и сооружений, а также в учебный процесс Донбасской национальной академии строительства и архитектуры, при подготовке бакалавров по направлению 08.03.01 «Строительство» в дисциплинах «Физико-химическая механика строительных материалов», «Инженерная графика» и аспирантов по направлению подготовки 09.06.01 «Информатика и вычислительная техника» по дисциплине «Геометрическое моделирование процессов и явлений».

Объектом исследования является геометрическое моделирование сложных расчетных зависимостей факторов варьирования, влияющих на физико-механические свойства композиционных строительных материалов.

Предметом исследования являются оптимизированные многокомпонентные КСМ, как геометрические модели многофакторных сложных зависимостей переменных параметров в БН-исчислении.

Научная новизна полученных результатов:

- впервые предложен метод конструирования дуг кривых, проходящих через наперёд заданные точки, на основе полиномов Бернштейна;

- разработан в БН-исчислении метод конструирования геометрических объектов многомерного пространства, как упорядоченного множества точек методом подвижного симплекса для геометрического моделирования многопараметрических процессов и явлений;

– впервые предложен метод геометрического моделирования многокомпонентных систем, для реализации которого разработан способ формирования план-матрицы при проведении нового эксперимента и адаптации матрицы-планирования для существующих экспериментальных данных экспериментально-статистического моделирования КСМ оптимальных составов;

– впервые получена и оптимизирована геометрическая модель, описывающая влияние состава многокомпонентного заполнителя из техногенного сырья на физико-механические свойства мелкозернистого цементного бетона;

– впервые с помощью БН-исчисления получен комплекс геометрических и компьютерных моделей физико-механических свойств комплексно-модифицированного дегтеполимербетона в зависимости от состава матрицы КСМ.

Практическая и теоретическая значимость полученных результатов. Изложенные в диссертационной работе результаты позволили создать и внедрить в практику геометрические модели многопараметрических явлений и процессов, представленных в виде геометрических объектов многомерного пространства, что имеет большое значение при проектировании состава и исследовании физико-механических свойств многокомпонентных композиционных строительных материалов. Результаты работы внедрены в учебном процессе Донбасской национальной академии строительства и архитектуры, а также в ООО ГАК «Автомобильные дороги Украины».

Методы исследования. Поставленные в работе задачи решаются на основе математического аппарата моделирования явлений и процессов – БН-исчисления. Также используются методы начертательной, аналитической, синтетической, проективной и аффинной геометрии; компьютерные методы расчета и изображения геометрических форм с помощью программного пакета *Maple*.

На защиту выносятся:

– способ конструирования геометрических объектов, проходящих через наперед заданные точки, в БН-исчислении, как упорядоченного множества точек методом подвижного симплекса;

– способ геометрического и компьютерного моделирования многофакторных процессов и явлений, как геометрических объектов многомерного пространства, реализованный в БН-исчислении;

– комплекс геометрических и компьютерных моделей физико-механических свойств дегтебетона в зависимости от состава комплексно-модифицированной матрицы дегтеполимербетона для устройства долговечных покрытий нежестких дорожных одежд автомобильных дорог;

– оптимизирована геометрическая и компьютерная модель зависимости физико-механических свойств мелкозернистого цементного бетона от состава многокомпонентного заполнителя из техногенного сырья.

Достоверность и обоснованность результатов подтверждается соответствием результатов экспериментальных данных теоретическим, структурным превращением в оптимизируемых системах, аналитическими преобразованиями, а также построенными с помощью программного пакета *Maple* изображениями результатов исследований.

Личный вклад соискателя. В статьях, опубликованных в соавторстве, вклад соавторов ограничивался постановкой задач и контролем достоверности полученных результатов. Проведение исследований, получение аналитических и компьютерно-графических результатов осуществлено лично автором диссертации.

Апробация результатов диссертации. Основные положения диссертационной работы докладывались и обсуждались на: VI международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых Донбасской национальной академии строительства и архитектуры (г. Макеевка, 2007 г.); XXXIX Всеукраинской студенческой научно-технической конференции «Научно-технические достижения студентов - строительно-архитектурной отрасли Украины» Донбасской национальной академии строительства и архитектуры (г. Макеевка, 2013 г.); XV и XVI международной научно-практической конференции «Современные проблемы геометрического моделирования» (г. Мелитополь, 2013, 2014 гг.); IX, X Крымской международной научно-практической конференции «Геометрическое и компьютерное моделирование: энергоснабжение, экология, дизайн» (г. Симферополь,

2012, 2013 гг.); II международной научно-практической конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Прикладная геометрия, дизайн и объекты интеллектуальной собственности» (г. Киев, 2013 г.); международной научно-практической конференции «Вопросы образования и науки в XXI веке» (г. Тамбов, 2013 г.); международной научно-практической Интернет-конференции «Научные исследования и их практическое применение. Современное состояние и пути развития `2013» (г. Одесса, 2013 г.); XVIII юбилейной международной научно-практической конференции «Научные итоги: достижения, проекты, гипотезы» (г. Минеральные Воды, 2013 г.); XIII Международной конференции молодых ученых, аспирантов, студентов «Здания и конструкции с применением новых материалов и технологий» (г. Макеевка, 2014 г.); XV Международной конференции по математическому моделированию, посвящённая 160-летию со дня рождения Анри Пуанкаре (г. Херсон, 2014 г.), Всеукраинской научно-методической конференции «Исследование возможностей использования инновационных технологий в научной работе по прикладной геометрии в учебном процессе кафедр вузов, которые занимаются графической подготовкой студентов» (г. Луцк, 2015 г.), Международной конференции «Здания и сооружения с применением новых материалов и технологий» направление: «Высококачественные бетоны: материалы, конструкции, технологии» (г. Макеевка, ДонНАСА, 2015 г.).

Публикации. По результатам исследований опубликовано 20 печатных статей, в том числе 10 из них опубликованы в изданиях, входящих в перечень специализированных научных изданий, утвержденных МОН Украины; 2 - в изданиях, включенных в международные наукометрические базы; 6 публикаций – в материалах и тезисах конференций; 8 статей – без соавторов. Общий объем публикаций 8,4 п.л., из которых 5,4 п.л. принадлежат лично автору.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, пяти разделов, выводов и списка использованной литературы из 143 наименований на 19 страницах, трех приложений, содержит 165 страниц, в том числе 130 страниц основного текста, 33 рисунка, 10 таблиц.

РАЗДЕЛ 1

СОСТОЯНИЕ ВОПРОСА И ВЫБОР МЕТОДА ИССЛЕДОВАНИЙ

1.1 Существующие методы моделирования явлений и процессов, которые используются для математического описания и оптимизации составов композиционных строительных материалов

С давних времен человечество пыталось описывать процессы и явления живой природы с помощью аналитических зависимостей. Таким образом, было открыто много физических законов. С развитием технологических процессов появилась необходимость аналитического описания не только природных явлений и процессов, но и искусственных. Позже научное сообщество начало исследовать объекты познания на моделях с целью получения объяснений явлений и процессов, описания свойств, а также для предсказания поведения явлений и процессов, которые интересуют исследователя. В настоящее время понятие модели является многозначимым и зависит от многих факторов. В настоящее время по технологии моделирования и области применения выделяют следующие основные виды моделирования: информационное, компьютерное, математическое, математическое моделирование социально-исторических процессов, математико-картографическое, молекулярное, цифровое, логическое, педагогическое, психологическое, статистическое, структурное, физическое, экономикоматематическое, имитационное, эволюционное, графическое и геометрическое, натурное, метамоделирование.

Не исключением является и исследование физико-механических свойств бетонов в зависимости от состава композиционного материала [84-88, 97-101, 92,93, 95,96,109,110,111]. Проанализировав ряд диссертационных работ [110,109. 111], связанных с оптимизацией состава композиционных строительных материалов (КСМ) с использованием неорганических и органических веществ, в диссертационной работе установлено, что во всех проанализированных работах была исполь-

зована матрица планирования эксперимента для дальнейшего исследования свойств бетона с помощью экспериментально-статистических моделей, полученных на основе регрессионного анализа. Но такие экспериментально-статистические модели, несмотря на соответствие требуемым критериям адекватности, всё же дают значительную погрешность параметров оптимизации составов КСМ.

Достоинства и недостатки математических моделей на основе регрессионного анализа в литературе представлены в виде сравнения методов регрессионного анализа с другими статистическими методами и методами планирования эксперимента. К достоинствам регрессионного анализа можно отнести:

- простоту, гибкость и единообразие анализа и проектирования;
- прозрачность моделирования, то есть доступность для анализа всех промежуточных вычислений;
- регрессионный анализ является достаточно эффективным с точки зрения математической статистики и удобным для экспериментатора методом, позволяющим представить в компактной форме всю информацию о процессе, полученную из экспериментов;
- регрессионный анализ широко применяется в производственных условиях, так как при его использовании информацию о свойствах объекта получают без нарушений параметров технологического процесса.

Несмотря на эти преимущества метод регрессионного анализа имеет и достаточно существенные недостатки. Основными недостатками математических моделей, полученных с помощью классического регрессионного анализа, является корреляция между коэффициентами уравнения регрессии и трудности при оценке ошибки расчетного значения параметра оптимизации. Еще одним из недостатков классического регрессионного анализа, в основу которого положен метод наименьших квадратов, является недостаточная устойчивость к изменениям исходной информации. Недостатком линейных регрессионных моделей является низкая адаптивность, а нелинейных - сложность определения вида функциональной зависимости и трудоемкость определения параметров модели. Так, в идеальной рег-

регрессионной модели независимые переменные не коррелируют друг с другом. Однако сильная коррелируемость переменных является довольно частым явлением. Это приводит к увеличению ошибок уравнения, уменьшению точности оценивания, снижается эффективность использования регрессионной модели. Поэтому выбор независимых переменных, включаемых в регрессионную модель, должен быть очень тщательным.

Вообще, любой метод моделирования имеет свои преимущества и недостатки. На наш взгляд, большое значение имеет целесообразность применения того или иного метода для решения конкретной практической задачи. Например, при большом количестве экспериментальных данных, когда имеет место хаотическое облако точек, регрессионный анализ даёт очень хорошие результаты, что и было наглядно продемонстрировано в работах профессора Вознесенского В.А. [102-104] и его учеников [107], а также в работах профессоров Дворкина Л.И. и Дворкина О.Л. [105,106,115] и их учеников, профессора Ляшенко Т.В. [103,104,135]. Предложенные ими методы планирования эксперимента и экспериментально-статистические модели, полученные на их основе, позволяют не только отсеять ошибочную информацию, полученную в результате эксперимента, но и отследить основную тенденцию протекания процесса и изменения физико-механических свойств строительных материалов в зависимости от изменения значений факторов варьирования эксперимента.

Также заслуживает внимания способ наложения диаграмм критериев оптимизации составов, который встречается в работах многих учёных одесской школы профессора Вознесенского В.А. [102-107, 115, 135, 137]. В данном случае имеет место поэтапная фиксация факторов варьирования с последующим наложением диаграмм друг на друга для определения оптимальной области решения задачи. Метод действительно достаточно эффективный, но, с точки зрения начертательной геометрии, при фиксации ряда параметров мы имеем дело с проекцией, которая подобна оригиналу, но всегда от него отличается. Другими словами, такой подход не включает в себя инвариантные свойства параллельного проецирования, что ведёт к искажению формы его диаграммы. При совмещении диаграмм имеет

место накопление ошибки, поскольку каждая отдельная диаграмма несет в себе какую-то часть погрешности, связанной с проецированием.

При небольшом количестве экспериментальных данных использование экспериментано-статистического моделирования не является целесообразным, поскольку для применения методов математической статистики необходим именно большой массив статистического материала. При незначительном объёме экспериментальных данных достоверность полученных результатов, даже при высоких значениях критериев адекватности, не гарантируются самими методами математической статистики.

Так, в работе Ходуна В.Н. [111] рассмотрено теоретическое и экспериментальное обоснование получения прочного дорожного дегтебетона для строительства покрытий на основе установления закономерностей формирования комплексно-модифицированной микроструктуры дегтебетона, представленной дьогтеполивинилхлоридным вяжущим (ДПВ) и минеральным порошком, поверхность которого активирована олигомером, содержащим функциональные группы карбамидо-формальдегидная смола (КФ-МТ), полимерсодержащие отходы производства эпоксидных смол (ПОЭС), эпоксидные смолы (ЭД).

Для исследования полученных экспериментальных данных был выполнен регрессионный анализ на ПЭВМ по программе, написанной языком *MathCAD* с использованием пакета *SURFER for Windows* и получены следующие уравнения регрессии в виде неполных полиномов второй степени:

$$Y_1(x_1, x_2, x_3) = 3,820 + 0,883x_1 + 0,553x_2 + 0,493x_3 + 0,229x_1x_2 + 0,1792x_1x_3 - 0,5867x_3^3. \quad (1.1)$$

Коэффициент корреляции $C = 0,812$.

$$Y_2(x_1, x_2, x_3) = 1,22 + 0,26x_1 + 0,14x_2 + 0,17x_3 - 0,21x_3^2. \quad (1.2)$$

Коэффициент корреляции $C = 0,987$.

$$Y_3(x_1, x_2, x_3) = 8,982 + 1,738x_1 + 1,013x_2 + 0,920x_3 + 0,287x_1x_2 + 0,254x_2x_3 + 0,346x_1x_3 - 1,228x_1^2 + 0,522x_2^2 - 0,778x_3^3. \quad (1.3)$$

Коэффициент корреляции $C = 0,906$, где Y_1, Y_2, Y_3 - параметры оптимизации – предел прочности при сжатии соответственно при 20°C (R_{20} – не менее 2,5 МПа), при 50°C (R_{50} – не менее 1,2 МПа), при 0°C (R_0 – не более 12 МПа); x_1, x_2, x_3 - факторы варьирования: x_1 - вязкость дегтя, x_2 - массовая концентрация поливинилхлорида в органическом вяжущем, x_3 - массовая концентрация, например, КФ-МТ на поверхности минерального порошка.

Как показано в [111], уравнение регрессии (1.1–1.3) проверены на адекватность и удовлетворяют критериям Фишера (дисперсия адекватности равна 0,018; коэффициент вариации равен 2,82; корреляционное соотношение от 0,802 до 0,987). Но подставив исходные значения x_1, x_2, x_3 и сравнив их с исходными данными значений Y_1, Y_2, Y_3 нами были установлены значительные отклонения от исходных данных, приведенных в [111]. Результаты анализа эффективности использования регрессионного анализа для математического описания зависимости физико-механических свойств асфальтобетона от его состава приведены в таблице 1.1.

Таблица 1.1 - Анализ эффективности использования регрессионного анализа по сравнению с исходными данными

№ п/п	\bar{Y}_1	Y_1	Откло нения, %	\bar{Y}_2	Y_2	От- клоне- ния, %	\bar{Y}_3	Y_3	Откло нения, %
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	7,1	9,96	28,7	3	4,30	30,3	0,9	1,34	33,0
2	5,6	13,2	57,6	2,2	5,00	56,0	0,7	1,51	53,8
3	5,8	10,00	42,0	2,4	4,06	40,9	0,8	1,26	36,7
4	12	14,25	15,8	5,4	5,15	4,9	1,6	1,51	5,7
5	9,2	10,30	10,7	3,8	4,25	10,5	1,3	1,30	0,3
6	7,3	13,88	47,4	2,9	4,91	41,0	1	1,47	32,1
7	8,7	13,52	35,7	3,8	5,20	27,0	1,2	1,55	22,8

Продолжение таблицы 1.1

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
8	4,9	9,30	47,3	1,8	3,98	54,8	1,5	1,26	18,9
9	9,7	12,00	19,2	4,5	4,95	9,0	1,5	1,48	1,2
10	5,3	11,70	54,7	2,7	4,75	43,2	0,95	1,44	34,1
11	11	14,02	21,5	4,8	5,29	9,2	1,4	1,57	10,6
12	7,5	10,29	27,1	3,1	4,41	29,7	1	1,36	26,3
13	8,6	11,82	27,2	3,8	4,59	17,3	1,2	1,39	13,6
14	7,3	11,32	35,5	2,9	4,66	37,8	0,9	1,43	37,0
15	10	11,86	15,7	4	4,85	17,5	1,3	1,46	11,0

В таблице: \bar{Y}_i – значение предела прочности при сжатии полученные во время эксперимента, которые являются исходными данными для регрессионного анализа; Y_i – значение предела прочности при сжатии полученные на основе уравнений регрессии.

Как видно из таблицы 1.1, отклонения достигают почти 60%. Сравнив результаты еще из диссертационных работ Самойловой Е.Э. [109], Рыбалко И.Ф. [110], Толчина С.М. [113] и Аль-Шамси Халед Али Саида [114] получены аналогичные результаты, которые приведены в приложении Б. Отсюда можно сделать вывод, что полученные в этих работах регрессионные модели являются не достаточно стойкими по отношению к исходным данным.

1.2 Обоснование выбора БН-исчисления в качестве математического аппарата для геометрического моделирования композиционных строительных материалов

Под моделью объекта понимается любой другой объект, отдельные свойства которого частично или полностью совпадают со свойствами исходного объекта. В данном случае нужно понимать, что полученная математическая модель исчерпывающе полной быть не может. Она всегда ограничена и должна соответствовать исключительно целям моделирования, отражая ровно столько свойств исходного

объекта, сколько необходимо для данного конкретного исследования. Поэтому при оценке эффективности моделирования всегда встаёт вопрос об адекватности полученных моделей. Оценка адекватности модели оценивается по близости результатов расчётов к экспериментальным данным. Для оценки адекватности моделей, полученных на основе методов математической статистики, используются соответствующие критерии адекватности (например, критерий Фишера), которые показывают, насколько полученная математическая модель отличается от значений экспериментальных данных. Исходя из выше сказанного, можно сделать вывод, что такие отклонения будут в любом случае в большей или меньшей степени. При большом массиве экспериментальных данных, когда геометрически имеется облако точек, такой подход оправдан, поскольку позволяет оценить характер протекания процесса, но при небольшом количестве экспериментальных данных он даёт достаточно большую погрешность. С другой стороны, методами геометрического моделирования, можно создавать геометрические объекты с наперед заданными свойствами. Геометрически это значит, что объект должен проходить через множество точек, каждая из которых соответствует своей ячейке из полученного экспериментальным способом массива данных. Преимуществом такого подхода является полное отсутствие отклонений от исходных данных, поскольку это условие было заложено изначально в свойства геометрического объекта уже на стадии его формирования.

Для геометрического моделирования явлений и процессов в работе был использован новый математический аппарат – точечное исчисление Балюбы-Найдыша (далее БН-исчисление) [7,8-54], особенностью которого является возможность определения геометрических объектов в пространстве различной размерности, в отличие от других методов, которые определяют геометрический объект с помощью проекций. Эта особенность БН-исчисления обусловлена тем, что в качестве параметра используется простое отношение трех точек, которое является инвариантом параллельного проецирования.

Основным элементом БН-исчисления есть точка, которая характеризуется рядом параметров. Количество параметров, которые определяют точку в про-

пространстве, зависит от размерности этого пространства. А любой геометрический объект является организованным множеством точек. Поэтому точечные уравнения, которые определяют геометрический объект в пространстве, справедливы для пространства любой размерности. Эта особенность БН-исчисления дает возможность представлять геометрические объекты в многомерном пространстве (имеется в виду аффинное многомерное пространство). Исходя из этого, можно сделать вывод, что геометрическая модель, представленная в БН-исчислении, по сути, является организованным множеством точек, которые зависят от нескольких, связанных между собой, текущих параметров.

Исходя из выше сказанного, можно выделить такие основные преимущества БН-исчисления, как аппарата геометрического моделирования:

1. БН-исчисление выбирает основным элементом точку, которая характеризуется несколькими параметрами. Количество параметров напрямую зависит от размерности пространства, в котором рассматривается геометрический объект. Например, для трехмерного пространства количество параметров равняется трем.

2. Точечные уравнения геометрических образов инвариантны относительно размерности пространства глобальной системы координат. То есть в качестве параметров выбираются такие параметры, которые являются инвариантными относительно параллельного проецирования (например, простое отношение трех точек прямой). Поэтому точечные уравнения справедливы для пространства любой размерности.

3. Точечное исчисление позволяет работать в локальном симплексе, а результат получать в глобальном симплексе. Причем, переход от локального симплекса к глобальному осуществляется автоматически.

4. БН-исчисление позволяет использовать функционалы для определения геометрических объектов. Например, с помощью функционалов $\frac{f(v) - f(1)}{f(0) - f(1)}$ и

$\frac{\varphi(v) - \varphi(0)}{\varphi(1) - \varphi(0)}$ можно определить дугу кривой AD :

$$M_{AD} = (A - C) \frac{f(v) - f(1)}{f(0) - f(1)} + (D - C) \frac{\varphi(v) - \varphi(0)}{\varphi(1) - \varphi(0)} + C, \quad (1.4)$$

В данном случае дуга кривой AD определяется двумя произвольными функциями $f(v)$ и $\varphi(v)$, которые определены при $0 \leq v \leq 1$ в симплексе CAD . Причем, при $v = 0$, имеем начало A дуги AD , а при $v = 1$, имеем ее конец D .

5. В БН-исчислении каждой геометрической операции соответствует аналитическая операция. Таким образом, БН-исчисление позволяет представить любой геометрический алгоритм построения объекта в аналитическом виде, или в виде точечного уравнения, или в виде расчетного алгоритма, который, по сути, является упорядоченным множеством точечных уравнений. Поэтому в точечных уравнениях сохраняется наглядный геометрический смысл параметров, который известен из геометрического алгоритма построения объекта. Эта особенность была потеряна для многих параметрических уравнений геометрических объектов в аналитической геометрии, которые были получены без использования геометрического алгоритма построения этих геометрических объектов.

6. Точечные уравнения, по сути, является символьной записью. Переходя к глобальной декартовой системе координат точечные уравнения заменяются на систему однотипных параметрических уравнений, количество которых зависит от размерности пространства глобальной системы координат. Поэтому точечные уравнения и расчетные алгоритмы на их основе легко программируются на ЭВМ.

7. В БН-исчислении был разработан специальный метод подвижного симплекса [63,69,74], который позволяет конструировать геометрические объекты любой сложности с наперед заданными характеристиками. Использование метода подвижного симплекса позволяет установить зависимость между несколькими параметрами, что, в свою очередь, позволяет моделировать многопараметрические явления и процессы, учитывая не только независимые параметры, но и параметры, которые зависят один от другого.

1.3 Теоретические основы математического аппарата «БН-исчисление»

Геометрические формы – это определенным образом организованные множества точек, которые необходимо определить вычислительными алгоритмами. Компьютер оперирует числами и операциями с ними. Чтобы привлечь к моделированию геометрических форм компьютерные технологии, точка представляется элементом арифметического пространства - как совокупность чисел, называемых параметрами, если в качестве исходных данных используется симплекс n – мерного пространства, или координатами точки, если используются системы координат. Фактически любая координата системы координат – это параметр, который определяет положение точки в этой системе координат. В качестве наглядной модели геометрического представления заданных точек арифметического пространства принята глобальная система координат, предложенная Р. Декартом. В глобальной системе координат (первичной системе отсчета) принято необходимое число локальных систем, которое задано симплексом точек геометрического алгоритма, в которых удобно работать, выбирая за основу аффинные вспомогательные подпространства.

Итак, в БН-исчислении, точка представляется системой проекций на оси глобальной или локальной системы координат, что позволяет получать параллельные проекции геометрической формы на подпространства и допускает по координатный расчет геометрической формы.

При выходе в пространство размерности больше трех вместо зрительной наглядности работает логическая наглядность обобщения и аналогии. Фундаментальные результаты в виде вычислительных формул БН-исчисления, должны представляться в таком виде, который позволяет выполнить обобщение в пространстве более высоких размерностей.

Обозначение точек

Организуя множества точек в отрезки прямых, плоские фигуры, дуги кривых, отсеки поверхностей можно составить различные геометрические формы. Образующий элемент - точка, в разных ситуациях выполняет разные функции. И все-таки, во всех алгоритмах существуют точки, выполняющие подобные, навсегда

закрепленные за ними функции. Выделяем общие и личные назначения точек, составляющих точечные алгоритмы [9].

Точки обозначаются большими латинскими буквами с индексами или без индексов снизу справа:

$$A, B, C, \dots, B_3, C_2, A_1, D_i, \dots, M, O, E, E_1, E_3. \quad (1.5)$$

Каждая точка находится в некотором пространстве размерности n . Например, при $n = 3$ все точки этого множества расположены в обычном трехмерном пространстве. Это значит, что каждая точка определяется тремя координатами в глобальной декартовой системе координат. Например:

$$C(x_C, y_C, z_C), A_2(x_2, y_2, z_2), M(x, y, z), E(1,1,1), E_3(0,0,1), O(0,0,0). \quad (1.6)$$

Обратим внимание. Все вычислительные формулы, полученные в БН-исчислении, справедливы как для $n \leq 3$, так и для $n > 3$.

Среди множества точек, которые используют в БН-исчислении, существуют особенные точки, выполняющие в вычислительном алгоритме особенные функции. Такие особенные точки имеют собственные названия и особенные, постоянно закрепленные за ними, обозначения.

Особенные точки точечного исчисления

$O(0,0,0)$ – нулевая точка, координаты которой равны нулю. Начальная точка в глобальной декартовой прямоугольной системе координат. В точечном исчислении играет роль нуля: $A - O = A$; $A \cdot O = O \cdot A = O$.

$E(1,1,1)$ – единичная точка, координаты которой равны единице. В точечном исчислении играет роль единицы:

$$A \cdot E = E \cdot A = A.$$

$E_1(1,0,0)$; $E_2(0,1,0)$; $E_3(0,0,1)$ – единичные точки осей декартовой системы координат (рис. 1.1).

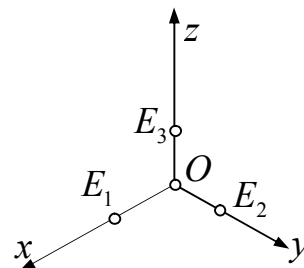


Рисунок 1.1. Глобальная декартовая система координат с декартовым симплексом

Для установления соответствия вычислительных формул и геометрического изображения в пространстве фиксируется при-

вычная глобальная декартова система координат декартовым симплексом: $|OE_1| = |OE_2| = |OE_3| = e$ – единица измерения по осям координат; OE_1 ; OE_2 ; OE_3 – взаимно-перпендикулярные оси координат. Заданные точки и полученные искомые формы изображаются в глобальной декартовой системе координат. В любой задаче существуют заданные точки, которые для БН-исчисления являются исходными данными. Это такие точки, координаты которых, заданы следующим образом: $(A(x_A, y_A, z_A), A_2(x_2, y_2, z_2), \dots)$.

$M(x, y, z)$ – текущая точка. Это некоторая переменная точка, которая может занимать каждое из положений некоторой геометрической формы, тем самым формируя ее. Она «движется» по этой форме заполняя ее точками до необходимой для практики плотности (густоты). Так, например, точка M отрезка A_1A_2 «движется» по отрезку, занимая любое положение от точки A_1 до точки A_2 . Точка M в вычислительном алгоритме выполняет роль пишущего (образующего) инструмента. Текущая точка M существует при описании прямой, плоскости, поверхности, объемной формы, др. Эта точка всегда имеет искомые координаты x, y, z, \dots и присутствует там, где необходимо образовывать форму своим движением. В БН-исчислении вычислительная формула явно или неявно выражает точку M через заданные точки и некоторые числа (параметры точечного исчисления t, p, q, \dots), что очень удобно для использования ЭВМ.

Соотношение $M = f(A, B, \dots, t, u, \dots)$, которое явно определяет текущую точку M геометрической формы с помощью заданных точек и параметров, называется точечным уравнением этой формы. В БН-исчислении геометрические формы определяются точечными уравнениями. Для каждой геометрической формы существует множество точечных уравнений, которые отличаются подбором параметров. Выбор параметров диктуется технологией изготовления данного изделия необходимой геометрической формы.

Параметр точечного исчисления

Особенностью точечного исчисления является то, что формулы этого исчисления выражают искомую точку через заданные точки и числа (параметры). Точ-

ки n -мерного пространства изображаются в декартовом симплексе $OE_1E_2E_3\dots$ глобальной системы координат. Получать искомые формулы целесообразно с помощью алгебраических (математических) операций над этими точками и числами. Принципиально важно, что полученные с помощью математических операций точки, после изображения их в глобальной системе координат, должны давать геометрическое решение поставленной геометрической задачи. Другими словами – геометрическая задача должна решаться вычислительными методами и геометрическая составляющая ее решению должна сводиться только к построению вычисленной точки по ее координатам. Точечная формула должна давать искомую точку, в которой определены ее n -декартовы координаты. Этого можно достичь только в том случае, если исчисление позволяет сделать по координатный расчет.

БН-исчисление основано на методе проекций. Особенность этого метода заключается в том, что определяется отдельно каждая проекция искомой точки на оси глобальной декартовой системы координат. С параметром, определяющим искомую точку пространства, можно выполнять математические действия, которые идентичны аналогичным математическим действиям с проекциями искомой точки. Это возможно только при определенном выборе параметра. Поскольку декартовое отображение точки пространства и ее проекций на координатные плоскости и оси координат формируются только операцией параллельного проецирования, то параметр, определяющий точку в БН-исчислении, должен быть инвариантом параллельного проектирования (простым соотношением трех точек прямой).

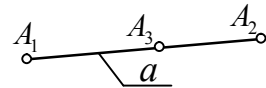


Рисунок 1.2. Простое отношение трех точек

Основополагающее утверждение. Параметр, который определяет точку в БН-исчислении, должен явно или неявно быть значением простого отношения трех точек прямой.

Определение. Простым отношением $A_1A_2A_3$ трех точек A_1, A_2, A_3 прямой a есть число, которое выражает отношение двух направлениях отрезков (рис. 1.2):

$$A_1 A_2 A_3 = \frac{A_1 A_3}{A_3 A_2} = \frac{A_1 - A_3}{A_3 - A_2}. \quad (1.7)$$

В практике вычислительной геометрии часто возникает необходимость преобразования простого отношения.

Определение. Преобразованием простого отношения трех точек прямой называется операция определения значения простого отношения при перестановке точек в его обозначении.

Для преобразования простого отношения достаточно знать два правила преобразования:

Правило 1. При перестановке первых двух членов в простом отношении трех точек прямой его значение меняется на обратное:

$$A_1 A_2 A_3 = \frac{1}{A_2 A_1 A_3} \leftrightarrow A_2 A_1 A_3 = \frac{1}{A_1 A_2 A_3}. \quad (1.8)$$

Правило 2. При перестановке последних двух членов в простом отношении трех точек прямой его значение увеличивается на единицу со сменой знака:

$$A_1 A_2 A_3 = -(1 + A_1 A_3 A_2) \leftrightarrow A_1 A_3 A_2 = -(1 + A_1 A_2 A_3). \quad (1.9)$$

Приведенные два формальные правила преобразования простого отношения трех точек прямой необходимы для ухода от зрительной наглядности (замена формальными операциями), которая отказывается служить в многомерной геометрии.

Понятия покоординатного расчета точек

Пусть заданы две точки: $A(x_A, y_A, z_A, \dots)$, $B(x_B, y_B, z_B, \dots)$. Уравнение прямой AB имеет вид: $\frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A} = \frac{z - z_A}{z_B - z_A} = \dots$. Легко заметить замечательную особенность этой формулы - идентичность выражений между знаками равенства независимо от размерности пространства. Если постоянное отношение разности координат точек принять как параметр t , то получим:

$$\frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A} = \frac{z - z_A}{z_B - z_A} = \dots = t, \quad (1.10)$$

а потом ввести удобную символьную запись этой системы покоординатных выражений: $\frac{M - A}{B - A} = t$, то получим компактную запись уравнения прямой в точечной форме. Обратим внимание, что система покоординатных уравнений позволяет выполнять алгебраические операции в точечной форме:

$$\frac{M - A}{B - A} = t \leftrightarrow M - A = (B - A)t \leftrightarrow M = (B - A)t + A. \quad (1.11)$$

Последнее точечное уравнение определяет точку A при значении $t=0$, точку B – при $t=1$, отрезок AB – при $0 \leq t \leq 1$. Делаем вывод, что точечное уравнение отрезка обеспечивается специальным набором параметра. Получение искомых точек с помощью точечных уравнений – определяет математический аппарат БН-исчисления. Параметр должен обеспечивать идентичность математических операций с точками, то есть с их координатами. Поскольку графическое изображение точки в декартовой системе координат основано на параллельном проецировании, то параметром t должен быть инвариант такого проецирования – простое отношение трех точек прямой. Представим наглядно последнее утверждение (рис. 1.3):

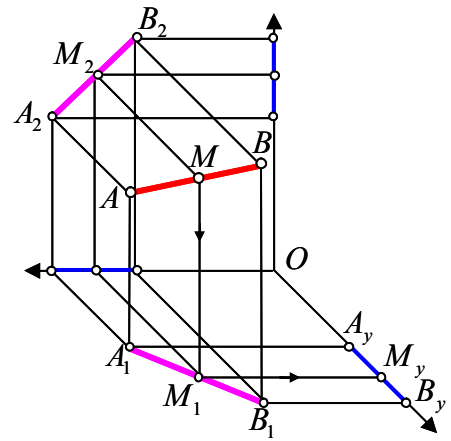


Рисунок 1.3. Наглядное изображение простого соотношения трех точек прямой

$$\frac{AM}{AB} = \frac{A_1M_1}{A_1B_1} = \frac{A_yM_y}{A_yB_y} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A} = t.$$

Зафиксируем значение параметра для разницы ординат. Аналогично можно записать значение параметра для разницы каждой n -ой координаты. Прямая AB определяется двумя проекциями A_1B_1 , A_2B_2 на координатные плоскости в начертательной геометрии или тремя проекциями на координатные оси – в БН-исчислении (рис 1.3). Для начертательной геометрии – геометрии плоских проекций объект n -пространства определяется количеством $(n-1)$ проекций, а для БН-исчисления объект определяется количеством n проекций.

Задания прямой, плоскости и пространства

Чтоб определить вычислительную формулу геометрической формы необходимо определить функционально текущую точку M этой формы через заданные точки и переменные параметры. Параметрами могут быть действительные числа, которые явно либо неявно представляют простое соотношение трех точек прямой.

Задания прямой AB

Пусть $t = \frac{AM}{AB} = -MBA$ – действительное число

(рис. 1.4), тогда точечное соотношение $M = (B - A)t + A$ при $t \in [-\infty, \infty]$ определяет прямую

AB . При $t = 0 \rightarrow M \equiv A$, при $t = 1 \rightarrow M \equiv B$, при $t \in [0, 1]$ точечное соотношение определяет отрезок AB . Уравнение отрезка AB прямой удобно еще задавать в виде: $M = A\bar{t} + Bt$, де $\bar{t} + t = 1 \rightarrow \bar{t} = 1 - t$.

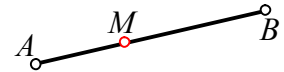


Рисунок 1.4. Задание прямой AB

Утверждение. Параметр t представляет собой ориентированную (направленную) длину отрезка AM измеренного единицей измерения AB .

Задания плоскости ABC

Определим точку M плоскости ABC (рис. 1.5)

тремя соотношениями: $p = \frac{MM_A}{AM_A}$; $q = \frac{MM_B}{BM_B}$; $r = \frac{MM_C}{CM_C}$,

тогда уравнение плоскости ABC примет такой вид:

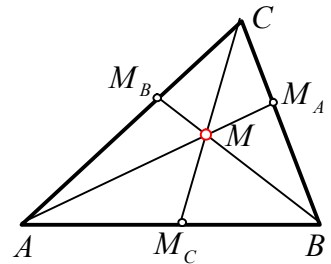


Рисунок 1.5. Задание плоскости ABC

$$M = Ap + Bq + Cr, \quad (1.12)$$

где $p + q + r = 1$.

Соотношение $p + q + r = 1$ будем называть условием принадлежности точки M к плоскости ABC . При позитивном значении p, q, r уравнение определяет внутреннюю часть плоскости, ограниченную треугольником ABC .

Исключив параметр r из соотношения $p + q + r = 1$ и подставив в уравнение (1.12), после преобразований получим уравнение плоскости в другом виде:

$$M = (A - C)p + (B - C)q + C. \quad (1.13)$$

Геометрически (рис. 1.6) параметр p выражает направленную длину отрезка CM_p , измеренную единицей CA , а q – длину отрезка CM_q , измеренную единицей CB . Фактически – это косоугольная (аффинная) система координат с началом в точке C . Если угол при точке C будет равен $\frac{\pi}{2}$, то получим частный случай – прямоугольную декартовую систему координат. Отсюда определим уравнение точки M_p и M_q :

$$\begin{aligned} \frac{CM_p}{CA} &= \frac{C - M_p}{C - A} = p \rightarrow M_p = (A - C)p + C. \\ \frac{CM_q}{CB} &= \frac{C - M_q}{C - B} = q \rightarrow M_q = (B - C)q + C. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Используя правило параллелограмма БН-исчисления, после преобразований, получим:

$$M = M_p + M_q - C = (A - C)p + (B - C)q + C. \quad (1.15)$$

Если параметры p, q, r выразить через плоскости соответствующих треугольников (рис. 1.7):

$$p = \frac{S_{MBC}}{S_{ABC}}; q = \frac{S_{AMC}}{S_{ABC}}; r = \frac{S_{ABM}}{S_{ABC}}, \text{ то получим другую,}$$

важную для практических приложений, форму точного уравнения плоскости:

$$M = \frac{As_{MBC} + Bs_{AMC} + Cs_{ABM}}{s_{MBC} + s_{AMC} + s_{ABM}}, \quad (1.16)$$

Обратим внимание, что указанные плоскости можно заменить пропорциональными величинами (так называемыми, однородными параметрами):

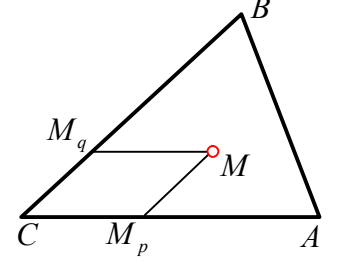


Рисунок 1.6. Задание плоскости ABC

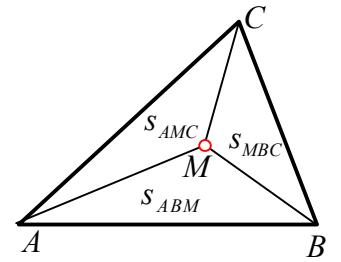


Рисунок 1.7. Задание плоскости ABC

$$M = \frac{Aa + Bb + Cc}{a + b + c}, \quad (1.17)$$

где a, b, c – действительные числа.

Если $a = b = c$, то имеем центр тяжести треугольника, если a, b, c пропорциональны длинам сторон l_{BC}, l_{AC}, l_{AB} – получим центр вписанной окружности.

Задание 3-мерного пространства ABCD

Определим точку M пространства $ABCD$ (рис. 1.8) отношениями:

$$p = \frac{MM_A}{AM_A}, q = \frac{MM_B}{BM_B}, r = \frac{MM_C}{CM_C}, s = \frac{MM_D}{DM_D},$$

где точки M_A, M_B, M_C, M_D принадлежат соответствующим плоскостям граней пирамиды $ABCD$. Принимая указанные отношения за параметры, получим уравнение 3-мерного пространства $ABCD$:

$$M = Ap + Bq + Cr + Ds, \text{ где } p + q + r + s = 1. \quad (1.18)$$

Исключив из соотношения $p + q + r + s = 1$ параметр s , получим уравнение 3-мерного пространства с начальной точкой D :

$$M = (A - D)p + (B - D)q + (C - D)r + D. \quad (1.19)$$

Аналогично уравнению плоскости (1.16), параметры p, q, r, s можно определить с помощью отношения соответствующих объемов ориентированных пирамид, на которые точка M делит пирамиду $ABCD$.

$$p = \frac{V_{MBCD}}{V_{ABCD}}, q = \frac{V_{AMCD}}{V_{ABCD}}, r = \frac{V_{ABMD}}{V_{ABCD}}, s = \frac{V_{ABCM}}{V_{ABCD}}.$$

Если пирамида $ABCD$ будет прямоугольной (с прямоугольным углом в точке D), то параметры p, q, r можно рассматривать как общие декартовы координаты

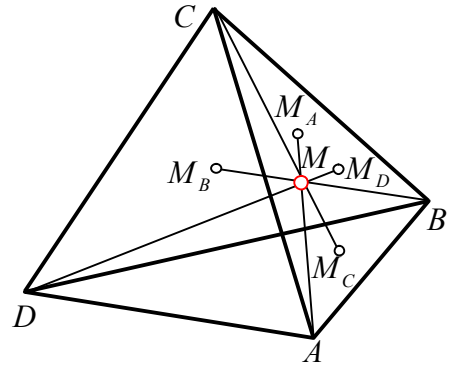


Рисунок 1.8. Задание пространства $ABCD$

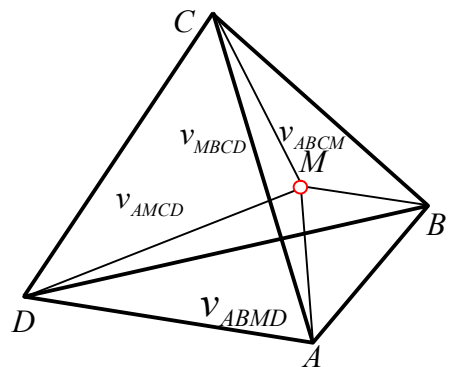


Рисунок 1.9. Задание пространства $ABCD$

наты в репере $DABC$ (D – начало координат; DA, DB, DC – единицы измерения по осям).

Изменяя ориентированные объемы $V_{MBCD}, V_{AMCD}, V_{ABMD}, V_{ABCM}$ (рис. 1.9) на соответствующие параметры a, b, c, d , получим точечные уравнения 3-мерного пространства в однородных параметрах:

$$M = \frac{Aa + Bb + Cc + Dd}{a + b + c + d}. \quad (1.20)$$

Использование ориентированных объемов, на которые разбивает тетраэдр текущая точка M , необходимо для решения практических задач.

О-теорема БН-исчисления

Утверждение. Произведение простых отношений трех точек по замкнутому m -стороннику, рассеченному прямой, равно единице при парном m и минус единице при нечетном m .

Пример. Пусть $m = 4$, тогда для четырехсторонника $A_1A_2A_3A_4$, рассеченного прямой a в точках $A^{12}, A^{23}, A^{34}, A^{41}$ (рис. 1.10), имеем следующее соотношение:

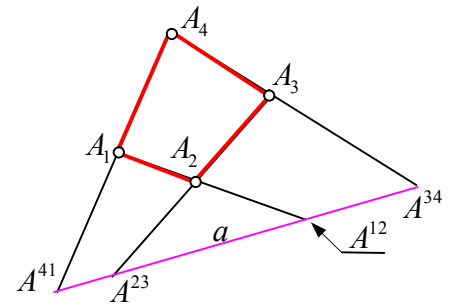


Рисунок 1.10. О-теорема

$$A_1A_2A^{12} \cdot A_2A_3A^{23} \cdot A_3A_4A^{34} \cdot A_4A_1A^{41} = (-1)^4 = 1. \quad (1.21)$$

При $m = 3$ будем иметь частный случай известный в геометрии как теорема Менелая.

S-теорема БН-исчисления

Пусть в симплексе ABC (рис. 1.11) заданы точки $A_1(p_1, q_1, r_1); A_2(p_2, q_2, r_2); A_3(p_3, q_3, r_3)$, которые определяются следующими точечными уравнениями:

$$A_1 = Ap_1 + Bq_1 + Cr_1;$$

$$A_2 = Ap_2 + Bq_2 + Cr_2; \quad A_3 = Ap_3 + Bq_3 + Cr_3. \text{ Тогда}$$

справедливым является следующее соотношение:

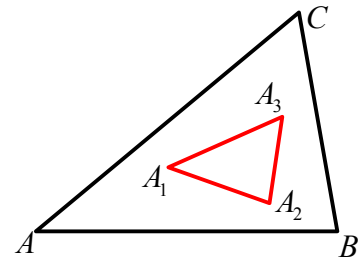


Рисунок 1.11. S-теорема

$$\frac{S_{123}}{S_{ABC}} = \begin{vmatrix} p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \\ p_3 & q_3 & r_3 \end{vmatrix}, \quad (1.22)$$

где S_{123} – площадь треугольника $A_1A_2A_3$; S_{ABC} – площадь треугольника ABC .

Поскольку выполняется условие принадлежности точки к плоскости: $p_i + q_i + r_i = 1$, то любой столбик определителя можно заменить столбиком единиц.

Утверждение. Площадь треугольника $A_1A_2A_3$, измеренного единицей площади симплекса ABC , равна определителю третьего порядка, составленного из параметров его вершин.

V-теорема БН-исчисления

Утверждение. Объем тетраэдра $A_1A_2A_3A_4$ (рис. 1.12), измеренного единицей объема симплекса $ABCD$, равна определителю четвертого порядка, составленного из параметров его вершин:

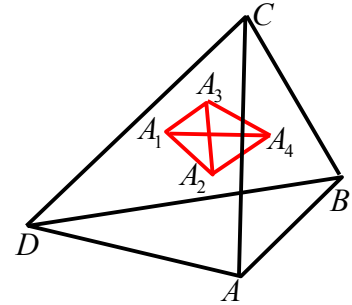


Рисунок 1.12. *V-теорема*

$$\frac{V_{1234}}{V_{ABCD}} = \begin{vmatrix} p_1 & q_1 & r_1 & s_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 & s_2 \\ p_3 & q_3 & r_3 & s_3 \\ p_4 & q_4 & r_4 & s_4 \end{vmatrix}, \quad (1.23)$$

где V_{1234} – объем тетраэдра $A_1A_2A_3A_4$; V_{ABCD} – объем симплекса $ABCD$; $A_1(p_1, q_1, r_1, s_1)$; $A_2(p_2, q_2, r_2, s_2)$; $A_3(p_3, q_3, r_3, s_3)$; $A_4(p_4, q_4, r_4, s_4)$.

Поскольку выполняется условие принадлежности точки к 3-мерному пространству: $p_i + q_i + r_i + s_i = 1$, то любой столбик определителя можно заменить столбиком единиц.

Значение определителя второго, третьего и четвертого порядков будем соответственно называть относительной длиной отрезка, относительной площадью треугольника, относительным объемом тетраэдра либо мерой соответствующего симплекса.

Метрический оператор трех точек

Особенность БН-исчисления состоит в том, что мерой (единицей измерения) геометрических форм расположенных в пространстве симплекса является геометрическая форма, образованная вершинами симплекса. Так, например, единицей измерения длин на прямой AB , является длина отрезка AB ; единицей площади в плоскости ABC , является площадь треугольника ABC ; единицы объема в пространстве $ABCD$, принимается объем тетраэдра $ABCD$, и т.д. Исторически складывалось так, что в геометрии приняты постоянные, строго фиксированные единицы измерения геометрических форм: длины, площади, объема, др. Чтоб ввести в рассмотрение эти постоянные единицы измерения вводится понятие метрического оператора трех точек [9].

Как было изложено выше, основу БН-исчисления составляют параметры текущей точки M :

– для прямой AB с текущей точкой M :

$$M = Ap + Bq, p + q = 1, \text{ де } p = \frac{MB}{AB}, q = \frac{AM}{AB}; \quad (1.24)$$

– для плоскости ABC :

$$M = Ap + Bq + Cr, p + q + r = 1, \text{ де } p = \frac{MM_A}{AM_A}, q = \frac{MM_B}{BM_B}, r = \frac{MM_C}{CM_C}; \quad (1.25)$$

– для пространства $ABCD$:

$$M = Ap + Bq + Cr + Ds, p + q + r + s = 1, \quad (1.26)$$

$$\text{де } p = \frac{MM_A}{AM_A}, q = \frac{MM_B}{BM_B}, r = \frac{MM_C}{CM_C}, s = \frac{MM_D}{DM_D}.$$

Во всех приведенных уравнениях параметры p, q, r, s являют собой отношения отрезков прямой. В геометрии параллельных проекций играет большую роль не только отношения отрезков, как простое отношение трех точек прямой, но и произведение двух направленных отрезков прямой, как метрический оператор трех точек. Пусть заданы три точки

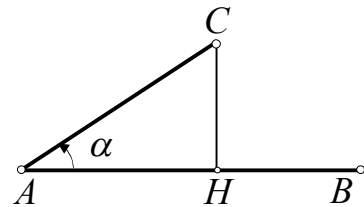


Рисунок 1.13. Определение метрического оператора трех точек прямой

A, B, C (рис. 1.13). Точка H – основа перпендикуляра, опущенного из точки C на прямую AB . Угол $0 \leq \alpha \leq \pi$ (угол с вершиной A , измеренный в направлении от точки B до точки C) характеризует положение точки C относительно прямой AB . Так, например, при $\alpha = 0$ – точка C принадлежит прямой AB ; при $\alpha > 0$ – точка C находится по одну, а при $\alpha < 0$ – по другую сторону от прямой AB . Окончательно можно предложить следующее определение метрического оператора трех точек прямой.

Определение. Метрическим оператором Σ_{BC}^A (читается: сигма BC при A) называется действительное число, которое равняется произведению длин направленных отрезков AH и AB :

$$\Sigma_{BC}^A = AH \cdot AB = \Sigma(B - A)(C - A). \quad (1.27)$$

Учитывая, что $AH = AC \cdot \cos \alpha$ имеем:

$$\Sigma_{BC}^A = AC \cdot AB \cdot \cos \alpha \quad (1.28)$$

Отсюда можно сделать вывод, что метрический оператор трех точек прямой численно равен скалярному произведению векторов.

Учитывая теорему косинусов для треугольника CAB , получим выражение метрического оператора трех точек прямой через квадраты длин:

$$\Sigma_{BC}^A = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2}. \quad (1.29)$$

Через координаты метрический оператор трех точек, как и скалярное произведение векторов, вычисляется по формуле:

$$\begin{aligned} \Sigma_{BC}^A &= \Sigma(B - A)(C - A) = \\ &= (x_B - x_A)(x_C - x_A) + (y_B - y_A)(y_C - y_A) + (z_B - z_A)(z_C - z_A) + \dots \end{aligned} \quad (1.30)$$

Обратим внимание на то, что метрический оператор трех точек прямой в геометрии проекций позволяет решать метрические задачи. Но в отличие от скалярного произведения векторов, метрический оператор трех точек прямой позволяет сделать обобщение на многомерное пространство.

Для треугольника ABC существуют три метрических оператора относительно каждой из его вершин:

$$\begin{aligned}
\Sigma_{BC}^A &= \Sigma^A = AB \cdot AH_C = AC \cdot AH_B; \\
\Sigma_{AC}^B &= \Sigma^B = BA \cdot BH_C = BC \cdot BH_A; \\
\Sigma_{AB}^C &= \Sigma^C = CA \cdot CH_B = CB \cdot CH_A.
\end{aligned} \tag{1.31}$$

Для работы с метрическими операторами очень полезно выделить их основные свойства.

Свойства метрического оператора трех точек прямой

1. Перестановка местами нижних индексов в обозначении метрического оператора не меняет его численного значения: $\Sigma_{BC}^A = \Sigma_{CB}^A$.
2. Если нижние индексы в метрическом операторе трех точек одинаковые, то его числовое значение равно квадрату длин отрезка: $\Sigma_{BB}^A = (AB)^2$.
3. Квадрат длины стороны треугольника равен сумме двух метрических операторов, верхние индексы которых указывают на вершины, которые определяют эту сторону: $\Sigma_{BC}^A + \Sigma_{AC}^B = \Sigma_{BB}^A = \Sigma_{AA}^B = (AB)^2$.
4. Если верхний индекс в обозначении метрического оператора трех точек совпадает с нижним, то его значение равно нулю: $\Sigma_{AB}^B = \Sigma_{AB}^A = 0$.
5. Треугольник ABC – прямоугольный, если метрический оператор при одной из его вершин равен нулю.

ВЫВОДЫ ПО РАЗДЕЛУ 1

1. Выполнен анализ способов экспериментально-математического моделирования свойств дегтеполимербетона с комплексно-модифицированной микроструктурой. Установлено, что для моделирования физико-механических свойств бетонов на органических вяжущих используется регрессионный анализ, который имеет ряд недостатков, что значительно влияет на адекватность полученных математических моделей.

2. Исследованы преимущества и недостатки регрессионного анализа. На примере трех диссертационных работ по оптимизации составов КСМ показано, что регрессионные модели являются недостаточно стойкими к изменению исходной информации и погрешность может достигать до 60% даже при высоких значениях коэффициентов корреляции.

3. Предложено и обосновано использование математического аппарата геометрического моделирования – БН-исчисления, который позволяет создавать многопараметрические модели процессов и явлений, как геометрических объектов в многомерном пространстве и не имеет недостатков регрессионного анализа.

4. Установлено, что основным элементом БН-исчисления является точка, которая характеризуется рядом параметров, количество которых зависит от размерности пространства. А любой геометрический объект является организованным множеством точек. Поэтому точечные уравнения, которые определяют геометрический объект в пространстве, справедливы для пространства любой размерности. Эта особенность БН-исчисления дает возможность представлять геометрические объекты в многомерном пространстве и эффективно использовать их для геометрического моделирования явлений и процессов.

5. Установлено, что в БН-исчислении реализован специальный метод подвижного симплекса, который позволяет конструировать геометрические объекты любой сложности с наперед заданными характеристиками. Использование метода подвижного симплекса позволяет установить зависимость между несколькими параметрами, что, в свою очередь, позволяет моделировать многопараметриче-

ские явления и процессы, учитывая не только независимые параметры, но и параметры, которые взаимозависят друг от друга.

6. Установлено, что уравнения и расчетные алгоритмы точечного БН-исчисления легко программируются на ЭВМ. Это позволяет уменьшить количество программных операций, модулей и процедур. Отсюда результат, полученный в БН-исчислении, по сути, уже является оптимизированным алгоритмом в программном понимании.

РАЗДЕЛ 2

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ МНОГОКОМПОНЕНТНЫХ СИСТЕМ

2.1 Существующие способы конструирования дуг кривых, которые проходят через наперед заданные точки

Для успешного моделирования многопараметрических явлений и процессов необходимо иметь набор дуг кривых линий, которые проходят через наперед заданные точки. Причем количество точек, через которые должна проходить заданная кривая, напрямую зависит от экспериментальных данных.

Задачу конструирования дуги кривой, которая будет проходить через наперед заданные точки, можно решить с помощью сплайнов [149]. Наиболее известные сплайны – те, которые состоят из фрагментов – алгебраических полиномов не выше заданной степени. Как правило, это кубические полиномы, либо полиномы нечетных степеней: первой, третьей (кубический), пятой степени. Более высокие степени используют редко из-за усложнения расчетов, описанных в предыдущем разделе. Основным их преимуществом является простота расчетов и анализа. Недостатком является то, что относительно мало реальных физических процессов соответствуют этой зависимости. К тому же недостатком кубических сплайнов является то, что они склонны осциллировать вблизи точки, которая существенно отличается от своих соседей. Чтобы избежать этого, используются более сложные сплайны. Например, сплайн Акимы, в отличие от кубического сплайна, в меньшей степени подвержен влиянию выбросов – на отрезках, которые граничат с выбросом, практически отсутствуют признаки осцилляции, но такие алгоритмы построения сплайнов являются достаточно сложными и требуют соблюдения дополнительных условий (для построения сплайна Акимы необходимо не меньше 5 точек).

Более эффективными являются экспоненциальные сплайны. Если гибкую металлическую линейку, зафиксированную в узлах, натянуть, то решением дифференциального уравнения будет не алгебраический полином, а экспонента. Поэтому такие сплайны называют также напряженными. Экспонента описывает много физических процессов в динамических системах. Недостатком является большая трудоемкость расчета.

Главным же недостатком сплайнов является то, что на каждом интервале функция описывается отдельным полиномом. Таким образом, для всего интервала необходимо построить полином. При увеличении степени сплайна повышается точность интерполяции, однако, увеличивается количество вычислений и порядок полинома.

Задачу конструирования дуги кривой, которая будет проходить через наперед заданные точки [150], также можно решить с помощью опуклых обводов [10, 72]. Но использование обводов тесно связано с порядком гладкости дуг кривых, которые стыкуются, что, в свою очередь, является отдельной научной до конца не решенной задачей. Кроме того, при использовании обводов получают целую группу уравнений для каждого интервала между двумя точками.

Еще один способ решения этой задачи есть использование полиномов Бернштейна. Так в работе [151] рассматриваются модифицированные сплайны на основе полиномов С.Н. Берштейна. Но использование таких модифицированных сплайнов тоже имеет определенные ограничения.

Если количество точек не велико, то можно использовать геометрические алгоритмы построения дуг кривых, которые проходят через наперед заданные точки, известные из аффинной, проективной либо синтетической геометрии. Но достаточно небольшое количество физических или технологических явлений и процессов которые можно описать с помощью известных кривых линий, чаще всего такие явления и процессы являются закономерными.

Особое значение во время моделирования явлений и процессов играет параболическая интерполяция. Парабола, благодаря оптическим ее свойствам, занимает особенное место в технических приложениях. Когда не нужен параболический

обвод, рационально проводить дугу параболы через четыре точки, одна с которых является несобственной. Более того, при конструировании отбивных отсеков поверхностей проходят через заданные точки, важно иметь возможность формирования на поверхности каждой отдельной дуги параболы. Однако возможность конструирования параболических дуг, которые проходят через наперед заданные точки, является очень ограниченной в прямоугольном декартовом симплексе. Более перспективным, в этом смысле, является использование аффинного симплекса, но это достаточно сложно при использовании уравнений параболы в той параметризации, которая известна из аналитической геометрии.

2.2 Известные способы конструирования дуг алгебраических кривых в БН-исчислении

Конструированием и исследованием свойств дуг алгебраических кривых в БН-исчислении занимались Балюба И.Г. [7,8-54], Горягин Б.Ф. [7,11,47,51-54,58-61] и Полищук В.И. [7,10,44,46,51,54, 73,74], что и было представлено в диссертационных исследованиях их учеников Давыденко И.П. [63] и Конопацкого Е.В. [65].

Кривые второго порядка являются наиболее исследованными и простыми в использовании. В БН-исчислении они используются не только для конструирования поверхностей оболочек и моделировании явлений и процессов, но и для конструирования новых дуг кривых более высокого порядка. Способ определения порядка дуг алгебраических кривых, определенных в БН-исчислении, был исследован в [61].

В диссертационной работе Конопацкого Е.В. [65] было предложено определение дуги кривой 2-го порядка отношением на медиане с помощью БН-исчисления. Рассмотрим алгоритм построения кривой второго порядка (рис. 2.1). Как известно из [148] кривая второго порядка однозначно будет определяться 5-ю точками, 5-ю касательными, либо их комбинациями. В нашем случае рассматривается дуга кривой второго порядка, проходящая через точку A и точку B и име-

ет две касательные в этих точках – AC и BC . Чтобы однозначно определить дугу кривой второго порядка зададим еще одну точку K , через которую будет проходить дуга кривой второго порядка.

В симплексе ABC построим медиану CT_1 . Определим точку K с помощью соотношения $K = (T_1 - C)f_C + C$. Это соотношение подобно инженерному дискриминанту. Для построения текущей точки M построим произвольную прямую из точки C (в нашем случае - CT). На пересечении этой прямой с прямыми AK и BK получим соответственно точки P и Q . Текущую точку M определим пересечением прямых AQ и BP .

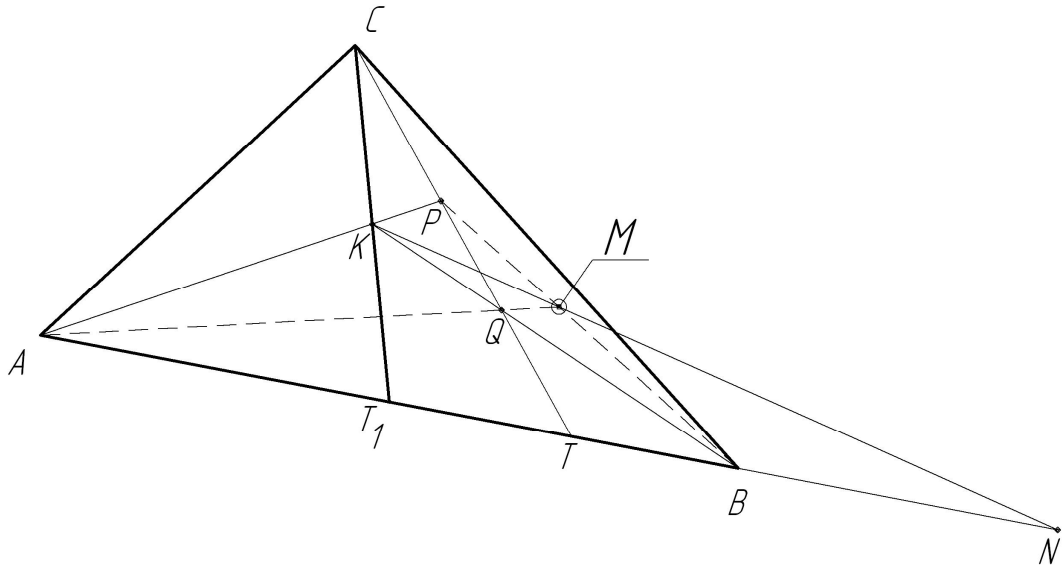


Рисунок 2.1. Геометрическая схема конструирования дуги кривой 2-го порядка

Рассмотрим четырехугольник $KPMQ$. Получим гармоничное соотношение четырех точек в соответствии с [148]:

$$ABTN = \frac{ATB}{ABN} = -1. \quad (2.1)$$

Определим текущий параметр t соотношением: $t = \frac{AT}{AB} = -TBA$. Используя уравнение (2.1) и правила преобразований простого отношения трех точек [10], получим:

$$\begin{aligned}
ABN = -\frac{t}{\bar{t}} &\Rightarrow N = A \frac{\bar{t}}{1-2t} - B \frac{t}{1-2t}; \\
T &= A\bar{t} + Bt; \\
K &= \left(\frac{A+B}{2} - C \right) f_c + C = (A-C) \frac{f_c}{2} + (B-C) \frac{f_c}{2} + C.
\end{aligned} \tag{2.2}$$

где $\bar{t} = 1 - t$.

Определим точку P , как пересечение прямых AK и CT . Отсюда имеем:

$$P = C\bar{u} + Tu = A\bar{t}u + Btu + C\bar{u}, \tag{2.3}$$

где $\bar{u} = 1 - u$.

Точки A , P и K принадлежат одной прямой AP , следовательно площадь треугольника APK должна равняться нулю. Согласно S -теореме БН-исчисления [5], определитель Δ_{APK} тоже должен быть равен нулю:

$$\Delta_{APK} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \bar{t}u & tu & \bar{u} \\ \frac{f_c}{2} & \frac{f_c}{2} & \bar{f}_c \end{vmatrix} = 0. \tag{2.4}$$

После определенных преобразований получим значение параметра u . Подставив это выражение в уравнение (2.3) получим уравнение точки P :

$$P = A \frac{\bar{t}f_c}{2\bar{t}f_c + f_c} + B \frac{tf_c}{2\bar{t}f_c + f_c} + C \frac{2\bar{t}f_c}{2\bar{t}f_c + f_c}. \tag{2.5}$$

Аналогичным образом определим точку M , как пересечение прямых KN и BP .

$$M = K\bar{u} + Nu = A \frac{f_c\bar{u} - 2\bar{t}f_c\bar{u} + 2\bar{t}u}{2-4t} + B \frac{f_c\bar{u} - 2\bar{t}f_c\bar{u} - 2tu}{2-4t} + C\bar{f}_c\bar{u}. \tag{2.6}$$

Площадь треугольника BMP должна равняться нулю, тогда согласно S -теоремы БН-исчисления $\Delta_{BMP} = 0$:

$$\Delta_{BMP} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{f_c \bar{u} - 2tf_c \bar{u} + 2\bar{t}u}{2-4t} & \frac{f_c \bar{u} - 2tf_c \bar{u} + 2tu}{2-4t} & \bar{f}_c \bar{u} \\ \frac{\bar{t}f_c}{2\bar{t}f_c + f_c} & \frac{tf_c}{2\bar{t}f_c + f_c} & \frac{2\bar{t}f_c}{2\bar{t}f_c + f_c} \end{vmatrix} = 0. \quad (2.7)$$

Окончательное уравнение дуги кривой второго порядка будет выглядеть следующим образом:

$$M = (A - C) \frac{f_c \bar{t}^2}{f_c(1-2t)^2 + 2t\bar{t}} + (B - C) \frac{f_c t^2}{f_c(1-2t)^2 + 2t\bar{t}} + C, \quad (2.8)$$

где $\bar{t} = 1 - t$.

Полученная дуга кривой второго порядка будет проходить через точки A, B, K , также она будет иметь касательные AC и BC соответственно в точках A и B . Изменяя соотношение на медиане f_c , можно получать различные дуги кривой второго порядка. Если $f_c = 0,5$, то уравнение (2.6) будет иметь следующий вид:

$$M = (A - C)\bar{t}^2 + (B - C)t^2 + C, \quad (2.9)$$

где $\bar{t} = 1 - t$.

Проанализировав уравнение (2.9), можно сделать вывод, что при $f_c = 0,5$ получим дугу параболы (либо кривую Безье второго порядка). Если $0 < f_c < 0,5$, то получим дугу гиперболы, а при $0,5 < f_c < 1$ - дугу эллипса. Итак предложенный алгоритм построения дуги кривой второго порядка можно использовать не только для параболической интерполяции, но и для эллиптической либо гиперболической, что позволяет варьировать видом дуги кривой для получения более адекватных моделей, в зависимости от характера протекания процесса.

К тому же, уравнение (2.9) можно получить, если рассматривать параболу второго порядка, как кривую одного отношения [65]. Понятие кривой одного отношения было введено Конопацким Е.В. в [65]. В БН-исчислении определение дуги параболы как кривой одного отношения было рассмотрено в работах Балюбы И.Г., Давыденко И.П. и Конопацкого Е.В. в [62, 63, 65, 45].

Рассмотрим известный алгоритм построения параболы, как кривой одного отношения, по двухцепной ломаной Бернштейна $A_1A_2A_3$ [63]. На цепях A_1A_3 и A_2A_3 возьмем точки B_1 и B_2 одноцепной ломаной, на которой зафиксируем текущую точку кривой M (рис. 2.2). Так как точки B_1 , B_2 и M разделяют цепи ломаной в одном и том же отношении t , то искомая кривая – парабола, является кривой Безье. Система линейных точечных уравнений, что определяют точку M , имеет вид:

$$\begin{cases} B_1 = A_1\bar{t} + A_3t, \\ B_2 = A_3\bar{t} + A_2t, \\ M = B_1\bar{t} + B_2t. \end{cases} \quad (2.10)$$

Исключая промежуточные точки B_1 и B_2 , получим уравнение параболы:

$$M = A_1\bar{t}^2 + 2A_3\bar{t}t + A_2t^2, \quad (2.11)$$

где $t \in [0; 1]$ – параметр, который определяет текущую точку M кривой; $\bar{t} = 1 - t$.

Кривая, которая определена уравнением (2.11), является дугой обвода, которая проходит через точки A_1 , A_2 , и имеет касательные A_1A_3 и A_2A_3 в этих точках. На этой основе можно получить параболические дуги кривых высших порядков.

Например, дугу кривой третьего порядка можно получить, используя следующий геометрический алгоритм построения.

Задана ломаная линия $A_1A_2A_3A_4$ (рис. 2.3). Плоская или пространственная это не имеет значения. Согласно со схемой имеем систему шести точечных линейных уравнений. Решив систему линейных точечных уравнений, получим уравнение кривой в следующем виде:

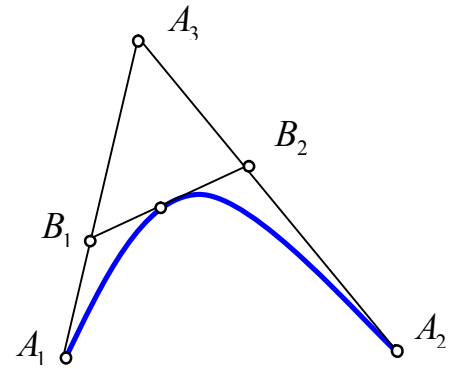


Рисунок 2.2. Геометрическая схема конструирования параболы 2-го порядка

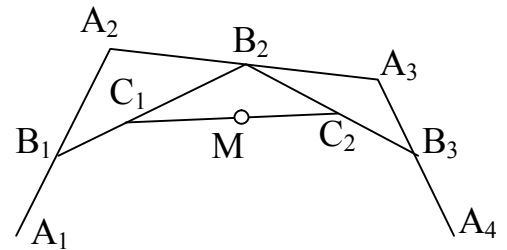


Рисунок 2.3. Конструирование 3-кривых линий

$$M = A_1 \bar{u}^3 + 3A_2 \bar{u}^2 u + 3A_3 \bar{u} u^2 + A_4 u^3. \quad (2.12)$$

В работе [65] получено общее уравнение и исследовано, с его помощью, m -кривые линии Бернштейна. Задана ломаная линия $A_1 A_2 \dots A_m$. Тогда m -кривая имеет такое точечное уравнение:

$$M = A_1 \bar{u}^m + A_2 C_m^1 \bar{u}^{m-1} u + A_3 C_m^2 \bar{u}^{m-2} u^2 + \dots + A_m C_m^{m-1} \bar{u} u^{m-1} + A_{m+1} u^m = \sum_{k=0}^m A_{k+1} C_m^k u^k \bar{u}^{m-k}. \quad (2.13)$$

где C_m^1, \dots, C_m^k – коэффициенты Бернштейна.

Если $u(t) = t$ и A_i принадлежат одной плоскости, то кривую, представленную точечным уравнением в [63] названо m -кривой Бернштейна. При $m = 3$, кривая Бернштейна превращается на кривую Безье [45]. В самом общем случае эта кривая $(m-1)$ -й кривизны m -мерного пространства.

Уравнение (2.13) можно использовать, как основу для конструирования дуг кривых, проходящих через наперед заданные точки. Что и было реализовано ниже.

2.3 Способ конструирования дуги кривой n -го порядка через заданные точки на основе полиномов Бернштейна

2.3.1 Общий подход к конструированию дуг кривых, проходящих через наперед заданные точки, на основе полиномов Бернштейна

Для геометрического моделирования явлений и процессов нужно иметь специальный набор дуг кривых, проходящих через наперёд заданные точки. В данном исследовании предложен новый способ определения дуг кривых n -го порядка, которые проходят через $n+1$ точек, на основе полиномов Бернштейна и уравнения (2.13), полученного в [63]. Суть этого способа заключается в следующем. Пусть задана ломаная линия $A_1 A_2 \dots A_n, A_{n+1}$. Тогда дуга кривой n -го порядка имеет такое точечное уравнение:

$$\begin{aligned}
M &= A_1 \bar{u}^n + A_2 C_n^1 \bar{u}^{n-1} u + A_3 C_n^2 \bar{u}^{n-2} u^2 + \dots + \\
&+ A_n C_n^{n-1} \bar{u} u^{n-1} + A_{n+1} u^n = \sum_{k=0}^n A_{k+1} C_n^k u^k \bar{u}^{n-k},
\end{aligned} \tag{2.14}$$

где C_n^1, \dots, C_n^k – коэффициенты Бернштейна; $\bar{u} = 1 - u$.

Если $u(t) = t$ и A_i принадлежат одной плоскости, то кривую, представленную точечным уравнением назовем n – кривой Бернштейна. Кривые вида $M = \sum_{k=0}^n A_{k+1} C_n^k t^k \bar{t}^{n-k}$, где $\bar{t} = 1 - t$, которые находятся в пространстве размерности n , в БН-исчислении называются n – параболами. В данном случае текущая точка дуги кривой M определяется точками заданной ломаной $A_1 A_2 \dots A_n, A_{n+1}$.

Переопределим точки ломаной линии $A_1 A_2 \dots A_n, A_{n+1}$ через точки $M_1 M_2 \dots M_n, M_{n+1}$, которые принадлежат дуге кривой, определенной с помощью уравнения (2.14) при $u(t) = t$, изменяя соответствующим образом значение параметра t от 0 до 1. Так при значении параметра $t = 0$ имеем начало дуги кривой – точку M_1 , а при $t = 1$ – конец дуги кривой – точку M_{n+1} . Особенностью такого определения является то, что значение параметра распределяется равномерно: $t_k = \frac{k}{n}$, где k меняется от 0 до n . Причем точке M_k соответствует значение параметра t_k . Таким образом получим систему $n+1$ уравнений с неизвестными $A_1 A_2 \dots A_n, A_{n+1}$. Решив эту систему уравнений методом Крамера и подставив в исходное уравнение, получим уравнение дуги кривой, проходящей через точки $M_1 M_2 \dots M_n, M_{n+1}$.

2.3.2 Дуга кривой 2-го порядка, проходящая через 3 наперед заданные точки

Как было сказано выше дуга кривой Бернштейна 2-го порядка получила название параболы 2-го порядка [43, 116]. Итак, дуга параболы 2-го порядка, соответственно к [63], определяется следующим уравнением:

$$M = A\bar{t}^2 + 2C\bar{t}t + Bt^2, \quad (2.15)$$

где $\bar{t} = 1 - t$.

Сконструируем дугу параболы 2-го порядка, проходящую через наперед заданные точки M_1, M_2, M_3 (рис. 2.4). При значении параметра $t = 0$ кривая проходит через точку $A \equiv M_1$ – начало дуги параболы, при $t = 1$ кривая проходит через точку $B \equiv M_3$ – конец дуги параболы. Принимаем значение $t = \frac{1}{2}$ при прохождении текущей точки через M_2 и получаем следующую систему уравнений:

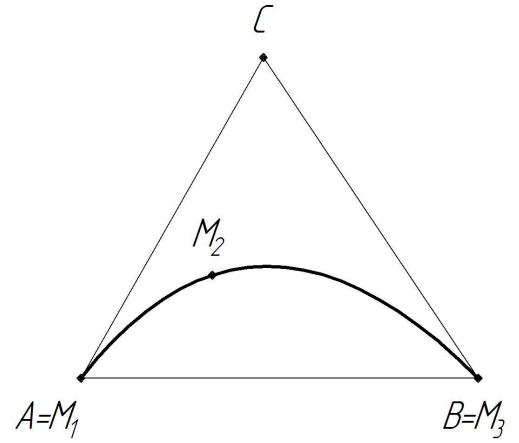


Рисунок 2.4. К конструированию дуги параболы 2-го порядка

$$\begin{cases} A = M_1, \\ A + 2C + B = 4M_2, \\ B = M_3. \end{cases} \quad (2.16)$$

Решим систему уравнений (2.16) методом Крамера. Поскольку первая точка A и последняя точка B уже известны, достаточно определить только промежуточную точку C . Для этого составляем и решаем следующие определители:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2. \quad (2.17)$$

$$\Delta_C = \begin{vmatrix} 1 & M_1 & 0 \\ 1 & 4M_2 & 1 \\ 0 & M_3 & 1 \end{vmatrix} = -M_1 + 4M_2 - M_3.$$

Определим точку C через точки M_1, M_2, M_3 :

$$C = \frac{\Delta_C}{\Delta} = -\frac{1}{2}M_1 + 2M_2 - \frac{1}{2}M_3. \quad (2.18)$$

Подставив значения точек A , B и C в уравнение (2.15), получим уравнение дуги параболы второго порядка, проходящую через 3 наперед заданные точки M_1 , M_2 , M_3 :

$$\begin{aligned} M &= M_1 \bar{t}^2 + 2 \left[-\frac{1}{2} M_1 + 2M_2 - \frac{1}{2} M_3 \right] \bar{t}t + M_3 t^2 = \\ &= M_1 (\bar{t}^2 - \bar{t}t) + 4\bar{t}tM_2 + M_3 (t^2 - \bar{t}t) = \\ &= M_1 \bar{t} (1 - 2t) + 4\bar{t}tM_2 + M_3 t (2t - 1). \end{aligned} \quad (2.19)$$

Полученное уравнение является основой для параболической интерполяции [56].

2.3.3 Дуга кривой 3-го порядка, проходящей через 4 наперед заданные точки

Аналогичным образом, используя предложенный в подразделе 2.3.1 способ, определим дугу параболы 3-го порядка [131], проходящую через наперед заданные точки M_1 , M_2 , M_3 , M_4 (рис. 2.5).

Дуга параболы третьего порядка, как дуга кривой Безье 3-го порядка, соответственно к [45] определяется следующим точечным уравнением:

$$M = A\bar{t}^3 + 3C_1\bar{t}^2t + 3C_2\bar{t}t^2 + Bt^3, \quad (2.20)$$

где $\bar{t} = 1 - t$.

Следует отметить, что при значении параметра $t = 0$ кривая проходит через точку $A \equiv M_1$ – начало дуги параболы, при $t = 1$ – через точку $B \equiv M_4$ – конец дуги параболы. Принимаем значение параметра $t = \frac{1}{3}$ при прохождении текущей точки через точку M_2 и значение $t = \frac{2}{3}$

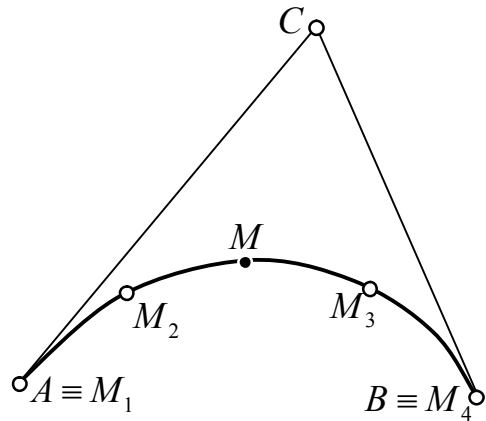


Рисунок 2.5. К конструированию дуги параболы 3-го порядка

параметра при прохождении через точку M_3 . Составим следующую систему точечных уравнений:

$$\begin{cases} A = M_1 \\ 8A + 12C_1 + 6C_2 + B = 27M_2 \\ A + 6C_1 + 12C_2 + 8B = 27M_3 \\ B = M_4 \end{cases} \quad (2.21)$$

Решим эту систему точечных уравнений методом Крамера относительно неизвестных A, C_1, C_2, B . Для этого сначала рассчитываем определитель, который состоит из коэффициентов системы уравнений (2.21):

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 12 & 6 & 1 \\ 1 & 6 & 12 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 108 \quad (2.22)$$

Первое и последнее уравнение в системе (2.21) уже решены, поэтому рассмотрим определители, которые относятся ко второму и третьему элементам системы.

Определим точку C_1 через M_1, M_2, M_3, M_4 :

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & M_1 & 0 & 0 \\ 8 & 27M_2 & 2 & 1 \\ 1 & 27M_3 & 4 & 8 \\ 0 & M_4 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -90M_1 + 27 \times 12M_2 - 27 \times 6M_3 + 36M_4. \quad (2.23)$$

$$C_1 = -\frac{5}{6}M_1 + 3M_2 - \frac{3}{2}M_3 + \frac{1}{3}M_4.$$

Аналогично определим точку C_2 :

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & M_1 & 0 \\ 8 & 4 & 27M_2 & 1 \\ 1 & 2 & 27M_3 & 8 \\ 0 & 0 & M_4 & 1 \end{vmatrix} = 36M_1 - 27 \times 6M_2 + 27 \times 12M_3 - 90M_4. \quad (2.24)$$

$$C_2 = \frac{1}{3}M_1 - \frac{3}{2}M_2 + 3M_3 - \frac{5}{6}M_4.$$

Подставив уравнение (2.21), (2.23) и (2.24) в уравнение (2.20) и после определенных преобразований получим уравнение дуги параболы 3-го порядка, проходящего через четыре наперед заданные точки M_1, M_2, M_3, M_4 :

$$\begin{aligned}
 M &= M_1 \bar{t}^3 + 3\bar{t}^2 t \left(-\frac{5}{6} M_1 + 3M_2 - \frac{3}{2} M_3 + \frac{1}{3} M_4 \right) + \\
 &+ 3 \left(\frac{1}{3} M_1 - \frac{3}{2} M_2 + 3M_3 - \frac{5}{6} M_4 \right) \bar{t} t^2 + M_4 t^3 = \\
 &= M_1 \left[\bar{t}^3 - 2,5\bar{t}^2 t + \bar{t} t^2 \right] + M_2 \left[9\bar{t}^2 t - 4,5\bar{t} t^2 \right] + \\
 &+ M_3 \left[-4,5\bar{t}^2 t + 9\bar{t} t^2 \right] + M_4 \left[\bar{t}^2 t - 2,5\bar{t} t^2 + t^3 \right].
 \end{aligned} \tag{2.25}$$

2.3.4 Дуга кривой 4-го порядка, проходящая через 5 наперед заданных точек

Рассмотрим проведение дуги параболы четвертого порядка через пять наперед заданных точек. В соответствии с [65] уравнение параболы 5-го порядка имеет вид:

$$M = A\bar{t}^4 + 4C_1\bar{t}^3 t + 6C_2\bar{t}^2 t^2 + 4C_3\bar{t} t^3 + Bt^4. \tag{2.26}$$

Нужно провести дугу параболы 4-го порядка через заданные точки M_1, M_2, M_3, M_4, M_5 . По аналогии с дугой параболы 3-го порядка при значении параметра $t = 0$ кривая проходит через точку $A \equiv M_1$, а при $t = 1$ – через точку $B \equiv M_5$. Примем значение параметра $t = \frac{1}{4}$ при прохождении текущей точки дуги через точку M_2 , соответственно $t = \frac{1}{2}$ при прохождении через точку M_3 и $t = \frac{3}{4}$ при прохождении через точку M_4 . Подставляя принятые значения параметров и уже известные точки в уравнение (2.27), получим следующую систему уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} M_2 = \frac{81}{256}M_1 + \frac{27}{64}C_1 + \frac{27}{128}C_2 + \frac{3}{64}C_3 + \frac{1}{256}M_5 \\ M_3 = \frac{1}{16}M_1 + \frac{1}{4}C_1 + \frac{3}{8}C_2 + \frac{1}{4}C_3 + \frac{1}{16}M_5 \\ M_4 = \frac{1}{256}M_1 + \frac{3}{64}C_1 + \frac{27}{128}C_2 + \frac{27}{64}C_3 + \frac{81}{256}M_5 \end{array} \right\} \quad (2.27)$$

Перенесем все известные точки в левую часть уравнения и проведем некоторые преобразования:

$$\left\{ \begin{array}{l} 256M_2 = 81M_1 + 108C_1 + 54C_2 + 12C_3 + M_5 \\ 16M_3 = M_1 + 4C_1 + 6C_2 + 4C_3 + M_5 \\ 256M_4 = M_1 + 108C_1 + 54C_2 + 12C_3 + 81M_5 \end{array} \right\} \quad (2.28)$$

Решив систему точечных уравнений (2.27) методом Крамера относительно неизвестных C_1 , C_2 , C_3 и подставив результаты в уравнение (2.26), после громоздких преобразований получим уравнение дуги параболы 4-го порядка, проходящую через пять точек:

$$\begin{aligned} M = M_1 \left(\bar{t}^4 - \frac{13}{3}\bar{t}^3t + \frac{13}{3}\bar{t}^2t^2 - \bar{t}t^3 \right) + M_2 \left(16\bar{t}^3t - \frac{64}{3}\bar{t}^2t^2 + \frac{16}{3}\bar{t}t^3 \right) + \\ + M_3 \left(-12\bar{t}^3t + 40\bar{t}^2t^2 - 12\bar{t}t^3 \right) + M_4 \left(\frac{16}{3}\bar{t}^3t - \frac{64}{3}\bar{t}^2t^2 + 16\bar{t}t^3 \right) + \\ + M_5 \left(-\bar{t}^3t + \frac{13}{3}\bar{t}^2t^2 - \frac{13}{3}\bar{t}t^3 + t^4 \right). \end{aligned} \quad (2.29)$$

2.3.5 Дуга кривой 5-го порядка, проходящая через 6 наперед заданных точек

Точечное уравнение дуги кривой пятого порядка, проходящей через 6 точек имеет следующий вид:

$$M = A\bar{t}^5 + 5C_1\bar{t}^4t + 10C_2\bar{t}^3t^2 + 10C_3\bar{t}^2t^3 + 5C_4\bar{t}t^4 + Bt^5, \quad (2.30)$$

Принимаем, что все шесть точек расположены на одинаковых расстояниях одна от другой, установим следующее соответствие между точками A_i и значениями параметра t . При $t=0$ имеем точку $M_1 \equiv A$, при $t=\frac{1}{5}$ имеем точку M_2 , при $t=\frac{2}{5}$ имеем точку M_3 , при $t=\frac{3}{5}$ имеем точку M_4 , при $t=\frac{4}{5}$ имеем точку M_5 и при $t=1$ имеем точку $M_6 \equiv B$.

Подставив значения параметра t в уравнение (2.30), получим:

$$\left\{ \begin{array}{l} M_1 = A, \\ M_2 = A\left(\frac{4}{5}\right)^5 + 5C_1\left(\frac{4}{5}\right)^4\left(\frac{1}{5}\right) + 10C_2\left(\frac{4}{5}\right)^3\left(\frac{1}{5}\right)^2 + 10C_3\left(\frac{4}{5}\right)^2\left(\frac{1}{5}\right)^3 + 5C_4\left(\frac{4}{5}\right)\left(\frac{1}{5}\right)^4 + B\left(\frac{1}{5}\right)^5, \\ M_3 = A\left(\frac{3}{5}\right)^5 + 5C_1\left(\frac{3}{5}\right)^4\left(\frac{2}{5}\right) + 10C_2\left(\frac{3}{5}\right)^3\left(\frac{2}{5}\right)^2 + 10C_3\left(\frac{3}{5}\right)^2\left(\frac{2}{5}\right)^3 + 5C_4\left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{2}{5}\right)^4 + B\left(\frac{2}{5}\right)^5, \\ M_4 = A\left(\frac{2}{5}\right)^5 + 5C_1\left(\frac{2}{5}\right)^4\left(\frac{3}{5}\right) + 10C_2\left(\frac{2}{5}\right)^3\left(\frac{3}{5}\right)^2 + 10C_3\left(\frac{2}{5}\right)^2\left(\frac{3}{5}\right)^3 + 5C_4\left(\frac{2}{5}\right)\left(\frac{3}{5}\right)^4 + B\left(\frac{3}{5}\right)^5, \\ M_5 = A\left(\frac{1}{5}\right)^5 + 5C_1\left(\frac{1}{5}\right)^4\left(\frac{4}{5}\right) + 10C_2\left(\frac{1}{5}\right)^3\left(\frac{4}{5}\right)^2 + 10C_3\left(\frac{1}{5}\right)^2\left(\frac{4}{5}\right)^3 + 5C_4\left(\frac{1}{5}\right)\left(\frac{4}{5}\right)^4 + B\left(\frac{4}{5}\right)^5, \\ M_6 = B. \end{array} \right. \quad (2.31)$$

Перенесем все известные точки в левую часть уравнения и проведем некоторые преобразования.

$$\left\{ \begin{array}{l} M_1 = A, \\ 3125M_2 = 1024A + 1280C_1 + 640C_2 + 160C_3 + 20C_4 + B, \\ 3125M_3 = 243A + 810C_1 + 1080C_2 + 720C_3 + 240C_4 + 32B, \\ 3125M_4 = 32A + 240C_1 + 720C_2 + 1080C_3 + 810C_4 + 243B, \\ 3125M_5 = A + 20C_1 + 160C_2 + 640C_3 + 1280C_4 + 1024B, \\ M_6 = B. \end{array} \right. \quad (2.32)$$

Решим систему линейных уравнений (2.32) методом Крамера относительно неизвестных точек C_1, C_2, C_3, C_4 и подставим полученные зависимости в уравнение (2.30). Для этого рассчитаем следующие определители:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1024 & 1280 & 640 & 160 & 20 & 1 \\ 243 & 810 & 1080 & 720 & 240 & 32 \\ 32 & 240 & 720 & 1080 & 810 & 243 \\ 1 & 20 & 160 & 640 & 1280 & 1024 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2700000000000 \quad (2.33)$$

Определим точку C_1 :

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & M_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1024 & 3125M_2 & 640 & 160 & 20 & 1 \\ 243 & 3125M_3 & 1080 & 720 & 240 & 32 \\ 32 & 3125M_4 & 720 & 1080 & 810 & 243 \\ 1 & 3125M_5 & 160 & 640 & 1280 & 1024 \\ 0 & M_6 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -346500000000M_1 + \quad (2.34)$$

$$+3125 \cdot 432000000M_2 - 3125 \cdot 432000000M_3 + 3125 \cdot 288000000M_4 -$$

$$-3125 \cdot 108000000M_5 + 54000000000M_6.$$

$$C_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -\frac{77}{60}M_1 + 5M_2 - 5M_3 + \frac{10}{3}M_4 - \frac{5}{4}M_5 + \frac{1}{5}M_6.$$

Аналогичным образом определим точку C_2 :

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & M_1 & 0 & 0 & 0 \\ 1024 & 1280 & 3125M_2 & 160 & 20 & 1 \\ 243 & 810 & 3125M_3 & 720 & 240 & 32 \\ 32 & 240 & 3125M_4 & 1080 & 810 & 243 \\ 1 & 20 & 3125M_5 & 640 & 1280 & 1024 \\ 0 & 0 & M_6 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 302625000000M_1 - \quad (2.35)$$

$$-3125 \cdot 522000000M_2 + 3125 \cdot 1062000000M_3 - 3125 \cdot 828000000M_4 +$$

$$+3125 \cdot 333000000M_5 - 173250000000M_6.$$

$$C_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{269}{240}M_1 - \frac{145}{24}M_2 + \frac{295}{24}M_3 - \frac{115}{12}M_4 + \frac{185}{48}M_5 - \frac{77}{120}M_6.$$

Далее определим точку C_3 :

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & M_1 & 0 & 0 \\ 1024 & 1280 & 640 & 3125M_2 & 20 & 1 \\ 243 & 810 & 1080 & 3125M_3 & 240 & 32 \\ 32 & 240 & 720 & 3125M_4 & 810 & 243 \\ 1 & 20 & 160 & 3125M_5 & 1280 & 1024 \\ 0 & 0 & 0 & M_6 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -173250000000M_1 +$$

$$+3125 \cdot 333000000M_2 - 3125 \cdot 828000000M_3 + 3125 \cdot 1062000000M_4 -$$

$$-3125 \cdot 522000000M_5 + 302625000000M_6. \quad (2.36)$$

$$C_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = -\frac{77}{120}M_1 + \frac{185}{48}M_2 - \frac{115}{12}M_3 + \frac{295}{24}M_4 - \frac{145}{24}M_5 + \frac{269}{240}M_6.$$

И наконец, определим точку C_4 :

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & M_1 & 0 \\ 1024 & 1280 & 640 & 160 & 3125M_2 & 1 \\ 243 & 810 & 1080 & 720 & 3125M_3 & 32 \\ 32 & 240 & 720 & 1080 & 3125M_4 & 243 \\ 1 & 20 & 160 & 640 & 3125M_5 & 1024 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & M_6 & 1 \end{vmatrix} = 540000000000M_1 -$$

$$-3125 \cdot 1080000000M_2 + 3125 \cdot 2880000000M_3 - 3125 \cdot 4320000000M_4 +$$

$$+3125 \cdot 4320000000M_5 - 346500000000M_6. \quad (2.37)$$

$$C_4 = \frac{\Delta_4}{\Delta} = \frac{1}{5}M_1 - \frac{5}{4}M_2 + \frac{10}{3}M_3 - 5M_4 + 5M_5 - \frac{77}{60}M_6.$$

Подставим значения точек C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 в уравнение (2.30), получим уравнение дуги параболы 5-го порядка, проходящей через 6 наперед заданных точек:

$$M = M_1 \bar{t}^5 + 5 \left[-\frac{77}{60}M_1 + 5M_2 - 5M_3 + \frac{10}{3}M_4 - \frac{5}{4}M_5 + \frac{1}{5}M_6 \right] \bar{t}^4 t +$$

$$+ 10 \left[\frac{269}{240}M_1 - \frac{145}{24}M_2 + \frac{295}{24}M_3 - \frac{115}{12}M_4 + \frac{185}{48}M_5 - \frac{77}{120}M_6 \right] \bar{t}^3 t^2 +$$

$$+ 10 \left[-\frac{77}{120}M_1 + \frac{185}{48}M_2 - \frac{115}{12}M_3 + \frac{295}{24}M_4 - \frac{145}{24}M_5 + \frac{269}{240}M_6 \right] \bar{t}^2 t^3 +$$

$$+ 5 \left[\frac{1}{5}M_1 - \frac{5}{4}M_2 + \frac{10}{3}M_3 - 5M_4 + 5M_5 - \frac{77}{60}M_6 \right] \bar{t} t^4 + M_6 t^5. \quad (2.38)$$

Преобразуем и укоротим полученное уравнение:

$$\begin{aligned}
M = & M_1 [\bar{t}^5 - 6,4\bar{t}^4t + 11,2\bar{t}^3t^2 - 6,4\bar{t}^2t^3 + \bar{t}t^4] + \\
& + M_2 [25\bar{t}^4t - 60,4\bar{t}^3t^2 + 38,5\bar{t}^2t^3 - 6,3\bar{t}t^4] + \\
& + M_3 [-25\bar{t}^4t + 122,9\bar{t}^3t^2 - 95,8\bar{t}^2t^3 + 16,7\bar{t}t^4] + \\
& + M_4 [16,7\bar{t}^4t - 95,8\bar{t}^3t^2 + 122,9\bar{t}^2t^3 - 25\bar{t}t^4] + \\
& + M_5 [-6,3\bar{t}^4t + 38,5\bar{t}^3t^2 - 60,4\bar{t}^2t^3 + 25\bar{t}t^4] + \\
& + M_6 [\bar{t}^4t - 6,4\bar{t}^3t^2 + 11,2\bar{t}^2t^3 - 6,4\bar{t}t^4 + t^5].
\end{aligned} \tag{2.39}$$

2.3.6 Дуга кривой 6-го порядка, проходящей через 7 наперед заданных точек

Точечное уравнение дуги кривой Бернштейна 6-го порядка, проходящей через 7 точек $(A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7)$, имеет следующий вид:

$$M_A = A\bar{t}^6 + 6C_1\bar{t}^5t + 15C_2\bar{t}^4t^2 + 20C_3\bar{t}^3t^3 + 15C_4\bar{t}^2t^4 + 6C_5\bar{t}t^5 + Bt^6, \tag{2.40}$$

где $\bar{t} = 1 - t$.

Поскольку все 7 точек расположены на одинаковых расстояниях одна от другой, установим следующее соответствие между точками A_i и значениями параметра t . При $t = 0$ имеем точку $A_1 \equiv A$, при $t = \frac{1}{6}$ имеем точку A_2 , при $t = \frac{1}{3}$ имеем точку A_3 , при $t = \frac{1}{2}$ имеем точку A_4 , при $t = \frac{2}{3}$ имеем точку A_5 , при $t = \frac{5}{6}$ имеем точку A_6 и при $t = 1$ имеем точку $A_7 \equiv B$.

Значения параметра t для определения точек A_1 и A_7 уже известны, поэтому определим при каких значениях C_i - коэффициентов уравнение (2.40), дуга кривой будет проходить через точки A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 . Для этого подставим значения параметра t , которое соответствует точке A_i в уравнение (2.40).

$$\left\{ \begin{aligned}
A_2 &= A \left(\frac{5}{6} \right)^6 + 6C_1 \left(\frac{5}{6} \right)^5 \left(\frac{1}{6} \right) + 15C_2 \left(\frac{5}{6} \right)^4 \left(\frac{1}{6} \right)^2 + 20C_3 \left(\frac{5}{6} \right)^3 \left(\frac{1}{6} \right)^3 + \\
&+ 15C_4 \left(\frac{5}{6} \right)^2 \left(\frac{1}{6} \right)^4 + 6C_5 \left(\frac{5}{6} \right) \left(\frac{1}{6} \right)^5 + B \left(\frac{1}{6} \right)^6, \\
A_3 &= A \left(\frac{2}{3} \right)^6 + 6C_1 \left(\frac{2}{3} \right)^5 \left(\frac{1}{3} \right) + 15C_2 \left(\frac{2}{3} \right)^4 \left(\frac{1}{3} \right)^2 + 20C_3 \left(\frac{2}{3} \right)^3 \left(\frac{1}{3} \right)^3 + \\
&+ 15C_4 \left(\frac{2}{3} \right)^2 \left(\frac{1}{3} \right)^4 + 6C_5 \left(\frac{2}{3} \right) \left(\frac{1}{3} \right)^5 + B \left(\frac{1}{3} \right)^6, \\
A_4 &= A \left(\frac{1}{2} \right)^6 + 6C_1 \left(\frac{1}{2} \right)^5 + 15C_2 \left(\frac{1}{2} \right)^4 + 20C_3 \left(\frac{1}{2} \right)^3 + \\
&+ 15C_4 \left(\frac{1}{2} \right)^2 + 6C_5 \left(\frac{1}{2} \right) + B \left(\frac{1}{2} \right)^6, \\
A_5 &= A \left(\frac{1}{3} \right)^6 + 6C_1 \left(\frac{1}{3} \right)^5 \left(\frac{2}{3} \right) + 15C_2 \left(\frac{1}{3} \right)^4 \left(\frac{2}{3} \right)^2 + 20C_3 \left(\frac{1}{3} \right)^3 \left(\frac{2}{3} \right)^3 + \\
&+ 15C_4 \left(\frac{1}{3} \right)^2 \left(\frac{2}{3} \right)^4 + 6C_5 \left(\frac{1}{3} \right) \left(\frac{2}{3} \right)^5 + B \left(\frac{2}{3} \right)^6, \\
A_6 &= A \left(\frac{1}{6} \right)^6 + 6C_1 \left(\frac{1}{6} \right)^5 \left(\frac{5}{6} \right) + 15C_2 \left(\frac{1}{6} \right)^4 \left(\frac{5}{6} \right)^2 + 20C_3 \left(\frac{1}{6} \right)^3 \left(\frac{5}{6} \right)^3 + \\
&+ 15C_4 \left(\frac{1}{6} \right)^2 \left(\frac{5}{6} \right)^4 + 6C_5 \left(\frac{1}{6} \right) \left(\frac{5}{6} \right)^5 + B \left(\frac{5}{6} \right)^6.
\end{aligned} \right. \quad (2.41)$$

Перенесем все известные точки в правую часть уравнений, а неизвестные – в левую. После определенных преобразований получим:

$$\left\{ \begin{aligned}
A &= A_1, \\
15625A + 18750C_1 + 9375C_2 + 2500C_3 + 375C_4 + 30C_5 + B &= 46656A_2, \\
64A + 192C_1 + 240C_2 + 160C_3 + 60C_4 + 12C_5 + B &= 729A_3, \\
A + 6C_1 + 15C_2 + 20C_3 + 15C_4 + 6C_5 + B &= 64A_4, \\
A + 12C_1 + 60C_2 + 160C_3 + 240C_4 + 192C_5 + 64B &= 729A_5, \\
A + 30C_1 + 375C_2 + 2500C_3 + 9375C_4 + 18750C_5 + 15625B &= 46656A_6, \\
B &= A_7.
\end{aligned} \right. \quad (2.42)$$

Решим систему линейных уравнений (2.42) методом Крамера относительно неизвестных C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 и подставим полученные зависимости в уравнение (2.40).

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 15625 & 18750 & 9375 & 2500 & 375 & 30 & 1 \\ 64 & 192 & 240 & 160 & 60 & 12 & 1 \\ 1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1 \\ 1 & 12 & 60 & 160 & 240 & 192 & 64 \\ 1 & 30 & 375 & 2500 & 9375 & 18750 & 15625 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \quad (2.43)$$

$$= 13604889600000.$$

Определим точку C_1 :

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & M_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 15625 & 46656M_2 & 9375 & 2500 & 375 & 30 & 1 \\ 64 & 729M_3 & 240 & 160 & 60 & 12 & 1 \\ 1 & 64M_4 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1 \\ 1 & 729M_5 & 60 & 160 & 240 & 192 & 64 \\ 1 & 46656M_6 & 375 & 2500 & 9375 & 18750 & 15625 \\ 0 & M_7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \quad (2.44)$$

$$= -19727089920000M_1 + 46656 \times 17496000000M_2 -$$

$$-729 \times 1399680000000M_3 + 64 \times 14171760000000M_4 -$$

$$-729 \times 699840000000M_5 + 46656 \times 3499200000M_6 - 22674816000000M_7.$$

$$C_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -\frac{29}{20}M_1 + 6M_2 - \left(\frac{15}{2}\right)M_3 + \frac{20}{3}M_4 - \left(\frac{15}{4}\right)M_5 + \left(\frac{6}{5}\right)M_6 - \frac{1}{6}M_7.$$

Далее определим точку C_2 :

$$\begin{aligned}
\Delta_2 = & \begin{vmatrix} 1 & 0 & M_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 15625 & 18750 & 46656M_2 & 2500 & 375 & 30 & 1 \\ 64 & 192 & 729M_3 & 160 & 60 & 12 & 1 \\ 1 & 6 & 64M_4 & 20 & 15 & 6 & 1 \\ 1 & 12 & 729M_5 & 160 & 240 & 192 & 64 \\ 1 & 30 & 46656M_6 & 2500 & 9375 & 18750 & 15625 \\ 0 & 0 & M_7 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \\
& = 20588732928000M_1 - 46656 \times 2589408000M_2 + \\
& + 729 \times 375114240000M_3 - 64 \times 4364902080000M_4 + \\
& + 729 \times 229547520000M_5 - 46656 \times 1189728000M_6 + \\
& + 7890835968000M_7.
\end{aligned} \tag{2.45}$$

$$\begin{aligned}
C_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \\
= \frac{227}{150}M_1 - \frac{222}{25}M_2 + \frac{201}{10}M_3 - \frac{308}{15}M_4 + \frac{123}{10}M_5 - \frac{102}{25}M_6 + \frac{29}{50}M_7.
\end{aligned}$$

Определим точку C_3 :

$$\begin{aligned}
\Delta_3 = & \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & M_1 & 0 & 0 & 0 \\ 15625 & 18750 & 9375 & 46656M_2 & 375 & 30 & 1 \\ 64 & 192 & 240 & 729M_3 & 60 & 12 & 1 \\ 1 & 6 & 15 & 64M_4 & 15 & 6 & 1 \\ 1 & 12 & 60 & 729M_5 & 240 & 192 & 64 \\ 1 & 30 & 375 & 46656M_6 & 9375 & 18750 & 15625 \\ 0 & 0 & 0 & M_7 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \\
& = -15441549696000M_1 + 46656 \times 2204496000M_2 - \\
& - 729 \times 390510720000M_3 + 64 \times 6377292000000M_4 - \\
& - 729 \times 390510720000M_5 + 46656 \times 2204496000M_6 - \\
& - 15441549696000M_7.
\end{aligned} \tag{2.46}$$

$$\begin{aligned}
C_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \\
= -\frac{227}{200}M_1 + \frac{189}{25}M_2 - \frac{837}{40}M_3 + 30M_4 - \frac{837}{40}M_5 + \frac{189}{25}M_6 - \frac{227}{200}M_7.
\end{aligned}$$

Далее определим точку C_4 :

$$\begin{aligned}
\Delta_4 = & \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & M_1 & 0 & 0 \\ 15625 & 18750 & 9375 & 2500 & 46656M_2 & 30 & 1 \\ 64 & 192 & 240 & 160 & 729M_3 & 12 & 1 \\ 1 & 6 & 15 & 20 & 64M_4 & 6 & 1 \\ 1 & 12 & 60 & 160 & 729M_5 & 192 & 64 \\ 1 & 30 & 375 & 2500 & 46656M_6 & 18750 & 15625 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & M_7 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \\
& = 7890835968000M_1 - 46656 \times 11897280000M_2 + \\
& + 729 \times 229547520000M_3 - 64 \times 4364902080000M_4 + \\
& + 729 \times 375114240000M_5 - 46656 \times 2589408000M_6 + \\
& + 20588732928000M_7.
\end{aligned} \tag{2.47}$$

$$\begin{aligned}
C_4 = \frac{\Delta_4}{\Delta} = \\
= \frac{29}{50}M_1 - \frac{102}{25}M_2 + \frac{123}{10}M_3 - \frac{308}{15}M_4 + \frac{201}{10}M_5 - \frac{222}{25}M_6 + \frac{227}{150}M_7.
\end{aligned}$$

И наконец, определим точку C_5 :

$$\begin{aligned}
\Delta_5 = & \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & M_1 & 0 \\ 15625 & 18750 & 9375 & 2500 & 375 & 46656M_2 & 1 \\ 64 & 192 & 240 & 160 & 60 & 729M_3 & 1 \\ 1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 64M_4 & 1 \\ 1 & 12 & 60 & 160 & 240 & 729M_5 & 64 \\ 1 & 30 & 375 & 2500 & 9375 & 46656M_6 & 15625 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & M_7 & 1 \end{vmatrix} = \\
& = -2267481600000M_1 + 46656 \times 349920000M_2 - \\
& - 729 \times 69984000000M_3 + 64 \times 1417176000000M_4 - \\
& - 729 \times 139968000000M_5 + 46656 \times 1749600000M_6 - \\
& - 19727089920000M_7.
\end{aligned} \tag{2.48}$$

$$\begin{aligned}
C_5 = \frac{\Delta_5}{\Delta} = \\
= -\frac{1}{6}M_1 + \frac{6}{5}M_2 - \frac{15}{4}M_3 + \frac{20}{3}M_4 - \frac{15}{2}M_5 + 6M_6 - \frac{29}{20}M_7.
\end{aligned}$$

Подставим значения точек C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 в уравнение (2.40):

$$\begin{aligned}
M = M_1 \bar{t}^6 + 6 & \left[-\frac{29}{20} M_1 + 6 M_2 - \left(\frac{15}{2} \right) M_3 + \right. \\
& \left. + \frac{20}{3} M_4 - \left(\frac{15}{4} \right) M_5 + \left(\frac{6}{5} \right) M_6 - \frac{1}{6} M_7 \right] \bar{t}^5 t + \\
& + 15 \left[\frac{227}{150} M_1 - \frac{222}{25} M_2 + \frac{201}{10} M_3 - \frac{308}{15} M_4 + \right. \\
& \left. + \frac{123}{10} M_5 - \frac{102}{25} M_6 + \frac{29}{50} M_7 \right] \bar{t}^4 t^2 + \\
& + 20 \left[-\frac{227}{200} M_1 + \frac{189}{25} M_2 - \frac{837}{40} M_3 + \right. \\
& \left. + 30 M_4 - \frac{837}{40} M_5 + \frac{189}{25} M_6 - \frac{227}{200} M_7 \right] \bar{t}^3 t^3 + \\
& + 15 \left[\frac{29}{50} M_1 - \frac{102}{25} M_2 + \frac{123}{10} M_3 - \frac{308}{15} M_4 + \right. \\
& \left. + \frac{201}{10} M_5 - \frac{222}{25} M_6 + \frac{227}{150} M_7 \right] \bar{t}^2 t^4 + \\
& + 6 \left[-\frac{1}{6} M_1 + \frac{6}{5} M_2 - \frac{15}{4} M_3 + \right. \\
& \left. + \frac{20}{3} M_4 - \frac{15}{2} M_5 + 6 M_6 - \frac{29}{20} M_7 \right] \bar{t} t^5 + M_7 t^6.
\end{aligned} \tag{2.49}$$

Преобразуем полученное уравнение:

$$\begin{aligned}
M = M_1 & \left[\bar{t}^6 - 8,7 \bar{t}^5 t + 22,7 \bar{t}^4 t^2 - 22,7 \bar{t}^3 t^3 + 8,7 \bar{t}^2 t^4 - \bar{t} t^5 \right] + \\
& + M_2 \left[36 \bar{t}^5 t - 133,2 \bar{t}^4 t^2 + 151,2 \bar{t}^3 t^3 - 61,2 \bar{t}^2 t^4 + 7,2 \bar{t} t^5 \right] + \\
& + M_3 \left[-45 \bar{t}^5 t + 301,5 \bar{t}^4 t^2 - 418,5 \bar{t}^3 t^3 + 184,5 \bar{t}^2 t^4 - 22,5 \bar{t} t^5 \right] + \\
& + M_4 \left[40 \bar{t}^5 t - 308 \bar{t}^4 t^2 + 600 \bar{t}^3 t^3 - 308 \bar{t}^2 t^4 + 40 \bar{t} t^5 \right] + \\
& + M_5 \left[-22,5 \bar{t}^5 t + 184,5 \bar{t}^4 t^2 - 418,5 \bar{t}^3 t^3 + 301,5 \bar{t}^2 t^4 - 45 \bar{t} t^5 \right] + \\
& + M_6 \left[7,2 \bar{t}^5 t - 61,2 \bar{t}^4 t^2 + 151,2 \bar{t}^3 t^3 - 133,2 \bar{t}^2 t^4 + 36 \bar{t} t^5 \right] + \\
& + M_7 \left[-\bar{t}^5 t + 8,7 \bar{t}^4 t^2 - 22,7 \bar{t}^3 t^3 + 22,7 \bar{t}^2 t^4 - 8,7 \bar{t} t^5 + t^6 \right].
\end{aligned} \tag{2.50}$$

Воспользуемся программным пакетом *Maple* для построения и исследования полученного уравнения кривой Бернштейна. Результаты исследований приведены на рисунке 2.6. Экспериментальным путем установлено, что дуги кривых, построенные предложенным в подразделе 2.3.1 методом, могут осциллировать, как пока-

зано на рисунке 2.6а, особенно дуги кривых более чем 3-го порядка. Но при определенном расположении точек в плоскости предложенная методика дает принятый результат, без осцилляций, как показано на рисунке 2.6б. Это объясняется тем, что дуга кривой n -го порядка в общем случае принадлежит к n -му пространству. Эти дуги кривых могут существовать и в пространстве меньшей размерности, но в качестве проекций, а при проектировании форма кривой меняется. Но точечные уравнения, полученные в результате исследований, являются инвариантными относительно размерности пространства и разработаны для геометрического моделирования многопараметрических явлений и процессов, модели которых располагаются в многомерном пространстве. Поэтому точечные уравнения, предложенные в данном диссертационном исследовании, являются справедливыми для построения адекватных моделей явлений и процессов, но представить их в многомерном пространстве не удастся. Даже если использовать эпюр Радищева, то дуги кривых, которые расположены в многомерном пространстве, будут изображаться в качестве искаженных проекций дуг кривых.

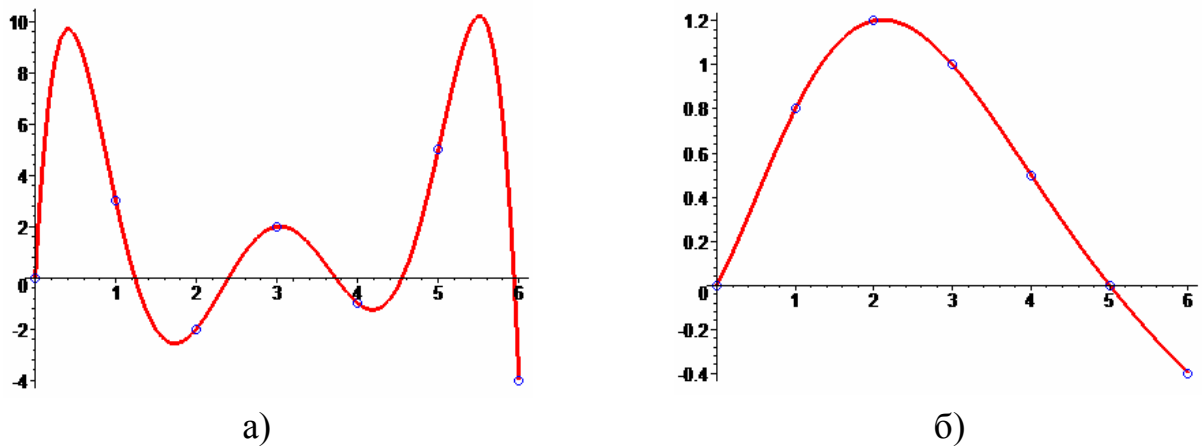


Рисунок 2.6. Дуга кривой 6-го порядка, проходящей через 7 наперед заданных точек

с одной несобственной точкой

Несобственную точку C_∞ определим как направление прямой CT_C :

$$T_c = (B - A)t_c + A. \quad (2.51)$$

$$t_c = \frac{T_c A}{BA} = \frac{CK}{BK} \rightarrow \frac{C-K}{B-K} = t_c \rightarrow K = B \frac{-t_c}{\frac{1}{t_c}} + C \frac{1}{\frac{1}{t_c}}, \quad (2.52)$$

где $\bar{t}_C = 1 - t_C$.

$$t = \frac{TA}{BA} \rightarrow \frac{T-A}{B-A} = t \rightarrow T = (B-A)t + A. \quad (2.53)$$

Согласно геометрической схемы (рис. 2.7) прямые KT_C и TN параллельны. Учитывая, что треугольники AKT_C и ATN аффинно-равны, получим следующие соотношения:

$$\frac{KT_c}{NT} = \frac{T_c A}{TA}. \quad (2.54)$$

Из соотношения (2.54) определим точку N :

$$\begin{aligned} \frac{K - T_c}{N - T} &= \frac{T_c - A}{T - A}, \\ N &= \frac{(K - T_c)(T - A)}{T_c - A} + T. \end{aligned} \quad (2.55)$$

Подставляем значения точек K, T и T_c в уравнение (2.55) и после определенных преобразований, получим уравнение точки N :

$$N = A \frac{(t_c - t)}{t_c} + B \frac{-t}{t_c} + C \frac{t}{t_c t_c}. \quad (2.56)$$

Или в другом виде:

$$N = (A - C) \frac{(t_c - t)}{t_c} + (B - C) \frac{-t}{t_c} + C. \quad (2.57)$$

Аналогично треугольники ABN и BTM подобны. Исходя из этого, получим следующее соотношение:

$$\frac{TB}{AB} = \frac{MB}{NB}. \quad (2.58)$$

Подставляем значения точек N, T в соотношение (2.58) и после определенных преобразований, получим уравнение точки M :

$$\begin{aligned} \frac{T - B}{A - B} &= \frac{M - B}{N - B}, \\ M &= A \frac{\bar{t}(t_c - t)}{t_c} + B \frac{t(t - t_c)}{\bar{t}_c} + C \frac{t\bar{t}}{t_c \bar{t}_c}. \end{aligned} \quad (2.59)$$

Утверждение. Дуга параболы 2-го порядка, которая определяется точками A, C_∞, C, B , описывается уравнением:

$$\begin{aligned} M &= A \frac{\bar{t}(t_c - t)}{t_c} + B \frac{t(t - t_c)}{\bar{t}_c} + C \frac{t\bar{t}}{t_c \bar{t}_c} = \\ &= (A - C) \frac{\bar{t}(t_c - t)}{t_c} + (B - C) \frac{t(t - t_c)}{\bar{t}_c} + C. \end{aligned} \quad (2.60)$$

где A, C, B – точки, через которые проходит дуга параболы;

$0 \leq t \leq 1$ – параметр, который определяет дугу параболы;

$\bar{t} = 1 - t$ – дополнение параметра t до единицы;

t_C – значение параметра, который определяет несобственную точку дуги параболы;

$\bar{t}_C = 1 - t_C$ – дополнение параметра t_C до единицы.

Представим уравнение (2.60) в параметрическом виде:

$$\begin{aligned} x_M &= (x_A - x_C) \frac{\bar{t}(t_C - t)}{t_C} + (x_B - x_C) \frac{t(t - t_C)}{\bar{t}_C} + x_C, \\ y_M &= (y_A - y_C) \frac{\bar{t}(t_C - t)}{t_C} + (y_B - y_C) \frac{t(t - t_C)}{\bar{t}_C} + y_C, \\ z_M &= (z_A - z_C) \frac{\bar{t}(t_C - t)}{t_C} + (z_B - z_C) \frac{t(t - t_C)}{\bar{t}_C} + z_C, \\ &\dots \end{aligned} \quad (2.61)$$

При практическом применении полученное уравнение можно упростить, если принять параметр $t_C = \frac{1}{2}$. Это позволяет наилучшим образом приспособить точку C_∞ к дискретной опуклости. Тогда уравнение (2.60) принимает следующий вид:

$$M = (A - C)\bar{t}(1 - 2t) + (B - C)t(2t - 1) + C. \quad (2.62)$$

Представим полученное уравнение в параметрической форме:

$$\begin{aligned} x_M &= (x_A - x_C)\bar{t}(1 - 2t) + (x_C - x_B)t(1 - 2t) + x_C, \\ y_M &= (y_A - y_C)\bar{t}(1 - 2t) + (y_C - y_B)t(1 - 2t) + y_C, \\ z_M &= (z_A - z_C)\bar{t}(1 - 2t) + (z_C - z_B)t(1 - 2t) + z_C, \\ &\dots \end{aligned} \quad (2.63)$$

Следует отметить, что уравнение (2.62) полностью совпадает с уравнением (2.19), но представлено в другой форме. Отсюда можно сделать вывод, про одинаковые геометрические свойства полученных уравнений дуг парабол 2-го порядка.

2.4.2 Точечное уравнение дуги кривой 3-го порядка с двумя несобственными точками

Определим вершины трехмерного симплекса $A_1A_2A_3A_4$, как точки, принадлежащие кривой 3-го порядка (рис. 2.8). Тогда пары прямых A_1A_2 и A_3A_4 , A_1A_4 и A_2A_3 составляют пары противоробер, то есть скрещивающихся прямых. Также кривая третьего порядка будет проходить через точки A_5 и A_6 .

Определим точки H_{12} , K_{23} и F_{34} , которые принадлежат соответственно ребрам A_1A_2 , A_2A_3 и A_3A_4 , с помощью трех параметров:

$$\begin{aligned} H_{12} &= A_1h + A_2\bar{h}; \\ K_{23} &= A_2k + A_3\bar{k}; \\ F_{34} &= A_3f + A_4\bar{f}. \end{aligned} \tag{2.64}$$

Точку L_{41} на ребре A_1A_4 определим, как пересечение прямой A_1A_4 с плоскостью $H_{12}K_{23}F_{34}$. Для этого на ребре A_1A_4 зададим текущую точку P :

$$P = A_4l + A_1\bar{l}. \tag{2.65}$$

Находим объем пирамиды $H_{12}K_{23}F_{34}L_{41}$, который должен равняться нулю. Согласно ν -теореме БН-исчисления [5], получим:

$$\begin{vmatrix} \bar{l} & 0 & 0 & l \\ 0 & k & \bar{k} & 0 \\ 0 & 0 & f & \bar{f} \\ h & \bar{h} & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0. \tag{2.66}$$

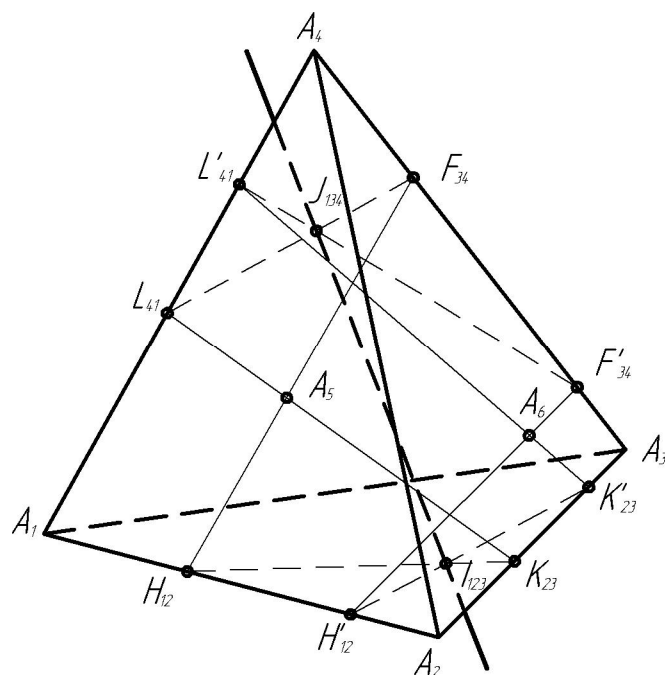


Рисунок 2.8. Построение пересечения прямой с гранями тетраэдра

Отсюда находим параметр l :

$$l = \frac{\overline{k}h\overline{f}}{k\overline{h}\overline{f} + khf}; \quad \overline{l} = 1 - l = \frac{khf}{k\overline{h}\overline{f} + khf}. \quad (2.67)$$

Подставляем значения параметров (2.67) в уравнение (2.65), получаем:

$$L_{41} = A_1 \frac{khf}{k\overline{h}\overline{f} + khf} + A_4 \frac{\overline{k}h\overline{f}}{k\overline{h}\overline{f} + khf}. \quad (2.68)$$

Аналогичным образом определяем точки H'_{12} , F'_{34} , K'_{23} и L'_{41} :

$$\begin{aligned} H'_{12} &= A_1 h' + A_2 \overline{h}'; \quad F'_{34} = A_3 f' + A_4 \overline{f}'; \quad K'_{23} = A_2 k' + A_3 \overline{k}'; \\ L'_{41} &= A_1 \frac{k'h'f'}{\overline{k}'\overline{h}'\overline{f}' + k'h'f'} + A_4 \frac{\overline{k}'\overline{h}'\overline{f}'}{\overline{k}'\overline{h}'\overline{f}' + k'h'f'}. \end{aligned} \quad (2.69)$$

Точка I_{123} принадлежит плоскости $A_1 A_2 A_3$. Определим точку I_{123} , как пересечение прямых $H_{12}K_{23}$ и $H'_{12}K'_{23}$ в локальном симплексе $A_1 A_2 A_3$. Для этого на прямой $H_{12}K_{23}$ определим текущую точку P , с помощью параметра u :

$$P = H_{12}u + K_{23}\overline{u} = A_1 hu + A_2 (\overline{h}u + k\overline{u}) + A_3 \overline{k}\overline{u}, \text{ де } \overline{u} = 1 - u. \quad (2.70)$$

Тогда для определения точки I_{123} площадь треугольника $PH'_{12}K'_{23}$ должна равняться нулю. Согласно s -теореме БН-исчисления [5], получим:

$$\begin{vmatrix} hu & \overline{h}u + k\overline{u} & \overline{k}\overline{u} \\ h' & \overline{h}' & 0 \\ 0 & k' & \overline{k}' \end{vmatrix} = 0. \quad (2.71)$$

Определим значение параметра u из соотношения (2.71):

$$u = \frac{h'k - h'k'}{h\overline{k}' - h'\overline{k}}. \quad (2.72)$$

Далее определяем \overline{u} :

$$\overline{u} = 1 - u = \frac{h\overline{k}' - h'\overline{k}'}{h\overline{k}' - h'\overline{k}}. \quad (2.73)$$

Подставляем выражения (2.72) и (2.73) в уравнение (2.70) и после определенных преобразований получим:

$$I_{123} = A_1 h \frac{h'k - h'k'}{h\overline{k}' - h'\overline{k}} + A_2 \frac{kh - h'k' + kk'(h' - h) + hh'(k' - k)}{h\overline{k}' - h'\overline{k}} + A_3 \overline{k} \frac{h\overline{k}' - h'\overline{k}'}{h\overline{k}' - h'\overline{k}}. \quad (2.74)$$

Аналогичным образом определим точку J_{134} , как пересечение прямых $L_{41}F_{34}$ и $L'_{41}F'_{34}$ в локальном симплексе $A_1A_3A_4$. Для этого на прямой $L_{41}F_{34}$ определим текущую точку P , с помощью параметра u :

$$P = L_{41}u + F_{34}\bar{u} = A_1 \frac{k h f}{\overline{k h f} + k h f} u + A_3 \bar{u} f + A_4 \left(\frac{\overline{k h f}}{\overline{k h f} + k h f} u + \bar{u} \bar{f} \right), \text{ де } \bar{u} = 1 - u. \quad (2.75)$$

Тогда для определения точки J_{134} площадь треугольника $PL'_{41}F'_{34}$ должна равняться нулю. Согласно s -теоремы БН-исчисления [10], получим:

$$\begin{vmatrix} \frac{k h f}{\overline{k h f} + k h f} u & \bar{u} f & \frac{\overline{k h f}}{\overline{k h f} + k h f} u + \bar{u} \bar{f} \\ \frac{k' h' f'}{\bar{k}' \bar{h}' \bar{f}' + k' h' f'} & 0 & \frac{\bar{k}' \bar{h}' \bar{f}'}{\bar{k}' \bar{h}' \bar{f}' + k' h' f'} \\ 0 & f' & \bar{f}' \end{vmatrix} = 0. \quad (2.76)$$

Отсюда находим параметр u .

$$u = \frac{k' h' (\overline{k h f} + k h f) (f - f')}{k' h' \bar{f} f (1 - k - h) - k h \bar{f}' f' (1 - h' - k')}. \quad (2.77)$$

Теперь находим \bar{u} :

$$\bar{u} = 1 - u = \frac{\overline{k h f} k' h' f' - k h \bar{f}' \bar{k}' \bar{h}' \bar{f}'}{k' h' \bar{f} f (1 - k - h) - k h \bar{f}' f' (1 - h' - k')}. \quad (2.78)$$

Подставим выражения (2.77) и (2.78) в уравнение (2.75) и после определенных преобразований получим:

$$\begin{aligned} J_{134} = & A_1 \frac{k h k' h' (f - f')}{k' h' \bar{f} (1 - k - h) - k h \bar{f}' (1 - h' - k')} + \\ & + A_3 \frac{\overline{k h f} k' h' f' - k h \bar{f}' \bar{k}' \bar{h}' \bar{f}'}{k' h' \bar{f} (1 - k - h) - k h \bar{f}' (1 - h' - k')} + \\ & + A_4 \frac{\overline{k h f} k' h' - k h \bar{k}' \bar{h}' \bar{f}'}{k' h' \bar{f} (1 - k - h) - k h \bar{f}' (1 - h' - k')} \bar{f}'. \end{aligned} \quad (2.79)$$

Теперь рассмотрим геометрический алгоритм построения текущей точки дуги кривой 3-го порядка методом подвижного симплекса (рис. 2.9). Параметрическая точка T , двигаясь по прямой A_1A_3 , создает подвижный симплекс $TI_{123}J_{134}$, который вращается вокруг оси

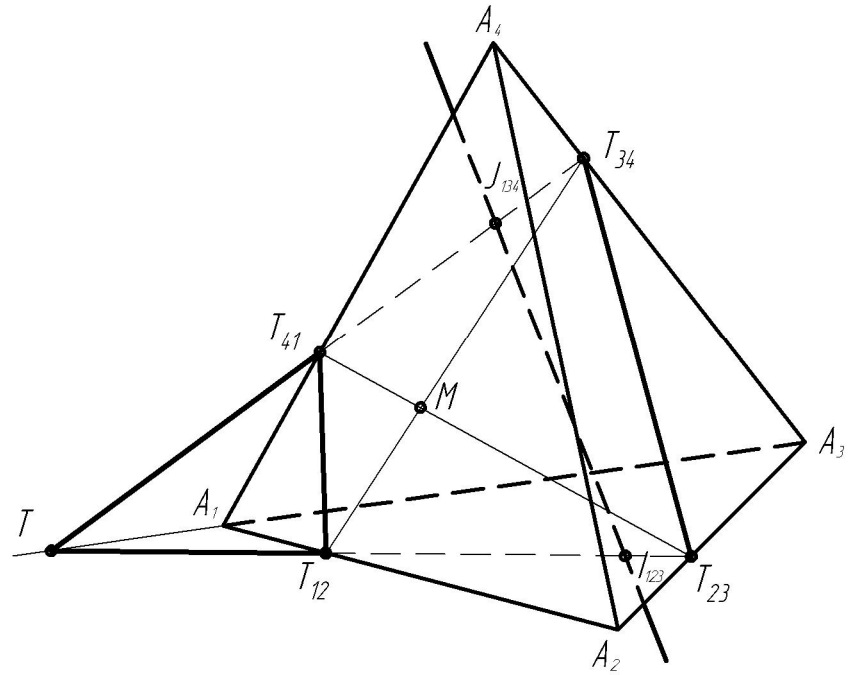


Рисунок 2.9. Геометрический алгоритм построения текущей точки дуги кривой 3-го порядка

соответственно точки T_{12} , T_{23} , T_{34} и T_{41} . Текущую точку M кривой третьего порядка определим, как пересечение двух прямых $T_{12}T_{34}$ и $T_{23}T_{41}$.

Определим точку T с помощью следующего точечного уравнения:

$$T = A_1 \bar{t} + A_3 t. \quad (2.80)$$

Теперь определим точку T_{12} , как пересечение прямых A_1A_2 и TI_{123} . Для этого на прямой TI_{123} определим текущую точку P , с помощью параметра u :

$$P = Tu + I_{123}\bar{u} = A_1 \left(\bar{t}u + \frac{h'k - h'k'}{h\bar{k}' - h'k} h\bar{u} \right) + A_2 \frac{kh - h'k' + kk'(h' - h) + hh'(k' - k)}{h\bar{k}' - h'k} \bar{u} + A_3 \left(\bar{k} \frac{h\bar{k}' - h'k'}{h\bar{k}' - h'k} \bar{u} + tu \right). \quad (2.81)$$

Площадь треугольника A_1A_2P должна равняться нулю. Согласно s -теоремы БН-исчисления, получим:

$$\begin{vmatrix} \bar{t}u + \frac{h'k - h'k'}{h\bar{k}' - h'k} h\bar{u} & \frac{kh - h'k' + kk'(h' - h) + hh'(k' - k)}{h\bar{k}' - h'k} \bar{u} & \bar{k} \frac{h\bar{k}' - h'k'}{h\bar{k}' - h'k} \bar{u} + tu \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0. \quad (2.82)$$

Отсюда определим параметр u :

$$u = \frac{\bar{k}(h\bar{k}' - h'k')}{\bar{k}(h\bar{k}' - h'k') - t(h\bar{k}' - h'k)}. \quad (2.83)$$

Теперь находим \bar{u} :

$$\bar{u} = 1 - u = \frac{-t(h\bar{k}' - h'k')}{\bar{k}(h\bar{k}' - h'k') - t(h\bar{k}' - h'k)}. \quad (2.84)$$

Подставляем выражения (2.83) и (2.84) в уравнение (2.81):

$$\begin{aligned} T_{12} = A_1 \bar{t}_{12} + A_2 t_{12} = A_1 \frac{(h\bar{k}' - h'k')\bar{k}\bar{t} - (h'k - h'k')ht}{\bar{k}(h\bar{k}' - h'k') - t(h\bar{k}' - h'k)} + \\ + A_2 \frac{h'k' - kh - kk'(h' - h) - hh'(k' - k)}{\bar{k}(h\bar{k}' - h'k') - t(h\bar{k}' - h'k)} t. \end{aligned} \quad (2.85)$$

Аналогичным образом находим T_{23} точку пересечения прямых A_2A_3 и PI_{123} . Площадь треугольника A_2A_3P должна равняться нулю. Согласно s -теоремы БН-исчисления, получим:

$$\begin{vmatrix} \bar{t}u + \frac{h'k - h'k'}{h\bar{k}' - h'k} h\bar{u} & \frac{kh - h'k' + kk'(h' - h) + hh'(k' - k)}{h\bar{k}' - h'k} \bar{u} & \bar{k} \frac{h\bar{k}' - h'k'}{h\bar{k}' - h'k} \bar{u} + tu \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0. \quad (2.86)$$

Найдем параметр u :

$$u = \frac{(h'k - h'k')h}{(h'k - h'k')h - (h\bar{k}' - h'k)\bar{t}}. \quad (2.87)$$

Теперь находим \bar{u} :

$$\bar{u} = 1 - u = \frac{-(h\bar{k}' - h'k)\bar{t}}{(h'k - h'k')h - (h\bar{k}' - h'k)\bar{t}}. \quad (2.88)$$

Подставляем выражения (2.87) и (2.88) в уравнение (2.85):

$$T_{23} = A_2 \bar{t}_{23} + A_3 t_{23} = A_2 \frac{-kh + h'k' - kk'(h' - h) - hh'(k' - k)}{(h'k - h'k')h - (h\bar{k}' - h'\bar{k})\bar{t}} \bar{t} +$$

$$+ A_3 \frac{(h'k - h'k')ht - (h\bar{k}' - h'\bar{k})\bar{k}\bar{t}}{(h'k - h'k')h - (h\bar{k}' - h'\bar{k})\bar{t}}. \quad (2.89)$$

Определим точку T_{34} , как пересечение прямых TJ_{134} и A_3A_4 в симплексе $A_1A_3A_4$.

$$P = Tu + J_{134}\bar{u} = A_1 \left(\frac{khk'h'(f - f')}{k'h'\bar{f}(1 - k - h) - kh\bar{f}'(1 - h' - k')} \bar{u} + \bar{t}u \right) +$$

$$+ A_3 \left(\frac{\bar{k}h\bar{f}k'h'f' - kh\bar{f}\bar{k}'\bar{h}'\bar{f}'}{k'h'\bar{f}(1 - k - h) - kh\bar{f}'(1 - h' - k')} \bar{u} + tu \right) +$$

$$+ A_4 \frac{\bar{k}h\bar{f}k'h' - kh\bar{k}'\bar{h}'\bar{f}}{k'h'\bar{f}(1 - k - h) - kh\bar{f}'(1 - h' - k')} \bar{f}'\bar{u}. \quad (2.90)$$

Площадь треугольника A_3A_4P должна равняться нулю. Согласно s -теореме БН-исчисления, получим:

$$\begin{vmatrix} \frac{khk'h'(f - f')}{k'h'\bar{f}(1 - k - h) - kh\bar{f}'(1 - h' - k')} \bar{u} + \bar{t}u & \frac{\bar{k}h\bar{f}k'h'f' - kh\bar{f}\bar{k}'\bar{h}'\bar{f}'}{k'h'\bar{f}(1 - k - h) - kh\bar{f}'(1 - h' - k')} \bar{u} + tu & \frac{\bar{k}h\bar{f}k'h' - kh\bar{k}'\bar{h}'\bar{f}}{k'h'\bar{f}(1 - k - h) - kh\bar{f}'(1 - h' - k')} \bar{f}'\bar{u} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0. \quad (2.91)$$

Найдем параметр u :

$$u = \frac{khk'h'(f - f')}{khk'h'(f - f') - \bar{t}k'h'\bar{f}(1 - k - h) + \bar{t}kh\bar{f}'(1 - h' - k')}. \quad (2.92)$$

Теперь находим \bar{u} :

$$\bar{u} = 1 - u = \frac{\bar{t}kh\bar{f}'(1 - h' - k') - \bar{t}k'h'\bar{f}(1 - k - h)}{khk'h'(f - f') - \bar{t}k'h'\bar{f}(1 - k - h) + \bar{t}kh\bar{f}'(1 - h' - k')}. \quad (2.93)$$

Подставляем выражения (2.92) и (2.93) в уравнение (2.90):

$$\begin{aligned}
T_{34} &= A_3 \bar{t}_{34} + A_4 t_{34} = \\
&= A_3 \frac{khk'h'(f-f')t - \bar{t}(\bar{khfk'h'f' - khfk'h'h'f'})}{khk'h'(f-f') - \bar{t}k'h'f'(1-k-h) + \bar{t}khf'(1-h'-k')} + \\
&+ A_4 \frac{\bar{f}'(khk'h'h'f' - \bar{khfk'h'h'})}{khk'h'(f-f') - \bar{t}k'h'f'(1-k-h) + \bar{t}khf'(1-h'-k')} \bar{t}.
\end{aligned} \tag{2.94}$$

Аналогичным образом определим точку T_{41} . При этом площадь треугольника $A_1 A_4 P$ должна равняться нулю. Согласно s -теоремы БН-исчисления, получим:

$$\begin{vmatrix}
\frac{khk'h'(f-f')}{\begin{bmatrix} k'h'f'(1-k-h) - \\ -khf'(1-h'-k') \end{bmatrix}} \bar{u} + \bar{t}u & \frac{\bar{khfk'h'f' - khfk'h'h'f'}}{\begin{bmatrix} k'h'f'(1-k-h) - \\ -khf'(1-h'-k') \end{bmatrix}} \bar{u} + tu & \frac{\bar{khfk'h' - khk'h'h'f'}}{\begin{bmatrix} k'h'f'(1-k-h) - \\ -khf'(1-h'-k') \end{bmatrix}} \bar{f}' \bar{u} \\
1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1
\end{vmatrix} = 0. \tag{2.95}$$

Найдем параметр u :

$$u = \frac{\bar{khfk'h'f' - khfk'h'h'f'}}{\bar{khfk'h'f' - khfk'h'h'f' - tk'h'f'(1-k-h) + tkhf'(1-h'-k')}}. \tag{2.96}$$

Теперь находим \bar{u} :

$$\bar{u} = 1 - u = \frac{khf'(1-h'-k') - k'h'f'(1-k-h)}{\bar{khfk'h'f' - khfk'h'h'f' - tk'h'f'(1-k-h) + tkhf'(1-h'-k')}} t. \tag{2.97}$$

Подставляем выражения (2.96) и (2.97) в уравнение (2.94):

$$\begin{aligned}
T_{41} &= A_4 \bar{t}_{41} + A_1 t_{41} = \\
&= A_1 \frac{\bar{t}(\bar{khfk'h'f' - khfk'h'h'f'}) - tkhk'h'(f-f')}{\bar{khfk'h'f' - khfk'h'h'f' - tk'h'f'(1-k-h) + tkhf'(1-h'-k')}} + \\
&+ A_4 \frac{\bar{t}f'(khk'h'h'f' - \bar{khfk'h'h'})}{\bar{khfk'h'f' - khfk'h'h'f' - tk'h'f'(1-k-h) + tkhf'(1-h'-k')}}.
\end{aligned} \tag{2.98}$$

Определим текущую точку M кривой 3-го порядка, как пересечение прямых $T_{12}T_{34}$ и $T_{23}T_{41}$. Для этого на прямой $T_{12}T_{34}$ определим текущую точку Q :

$$Q = T_{12}\bar{u} + T_{34}u = A_1 \bar{t}_{12}\bar{u} + A_2 t_{12}\bar{u} + A_3 \bar{t}_{34}u + A_4 t_{34}u. \tag{2.99}$$

Площадь треугольника $QT_{23}T_{41}$ должна равняться нулю. Составим матрицу параметров:

$$\begin{pmatrix} \bar{t}_{12}\bar{u} & t_{12}\bar{u} & \bar{t}_{34}u & t_{34}u \\ 0 & \bar{t}_{23} & t_{23} & 0 \\ t_{41} & 0 & 0 & \bar{t}_{41} \end{pmatrix} = 0. \quad (2.100)$$

Вычеркиваем первый столбик матрицы. Полученный определитель должен равняться нулю.

$$\begin{vmatrix} t_{12}\bar{u} & \bar{t}_{34}u & t_{34}u \\ \bar{t}_{23} & t_{23} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{t}_{41} \end{vmatrix} = 0. \quad (2.101)$$

Отсюда находим параметр u :

$$u = \frac{t_{12}t_{23}}{t_{12}t_{23} + \bar{t}_{23}\bar{t}_{34}}. \quad (2.102)$$

Тогда точечное уравнение дуги кривой 3-го порядка будет иметь следующий вид:

$$M = A_1 \frac{\bar{t}_{12}\bar{t}_{23}\bar{t}_{34}}{t_{12}t_{23} + \bar{t}_{23}\bar{t}_{34}} + A_2 \frac{t_{12}\bar{t}_{23}\bar{t}_{34}}{t_{12}t_{23} + \bar{t}_{23}\bar{t}_{34}} + A_3 \frac{t_{12}t_{23}\bar{t}_{34}}{t_{12}t_{23} + \bar{t}_{23}\bar{t}_{34}} + A_4 \frac{t_{12}t_{23}t_{34}}{t_{12}t_{23} + \bar{t}_{23}\bar{t}_{34}}. \quad (2.103)$$

Либо в другой, более традиционной для БН-исчисления, форме:

$$\begin{aligned} M = & (A_1 - A_4) \frac{\bar{t}_{12}\bar{t}_{23}\bar{t}_{34}}{t_{12}t_{23} + \bar{t}_{23}\bar{t}_{34}} + (A_2 - A_4) \frac{t_{12}\bar{t}_{23}\bar{t}_{34}}{t_{12}t_{23} + \bar{t}_{23}\bar{t}_{34}} + \\ & + (A_3 - A_4) \frac{t_{12}t_{23}\bar{t}_{34}}{t_{12}t_{23} + \bar{t}_{23}\bar{t}_{34}} + A_4. \end{aligned} \quad (2.104)$$

На основе геометрической схемы конструирования дуги кривой 3-го порядка, проходящей через 6 точек (рис. 2.10), получим новую геометрическую схему конструирования кривой 3-го порядка с двумя несобственными точками.

Определим вершины трехмерного симплекса $A_1A_2A_3A_4$, как точки, принадлежащие кривой 3-го порядка (рис. 2.10). Тогда пары прямых A_1A_2 и A_3A_4 , A_1A_4 и A_2A_3 составляют пары противорребер.

Определим точки L_{41} , K_{23} и F_{34} , принадлежащие соответственно ребрам A_1A_4 , A_2A_3 и A_3A_4 , с помощью трех параметров:

$$L_{41} = A_4 l + A_1 \bar{l} ; \quad K_{23} = A_2 k + A_3 \bar{k} ; \quad F_{34} = A_3 f + A_4 \bar{f} . \quad (2.105)$$

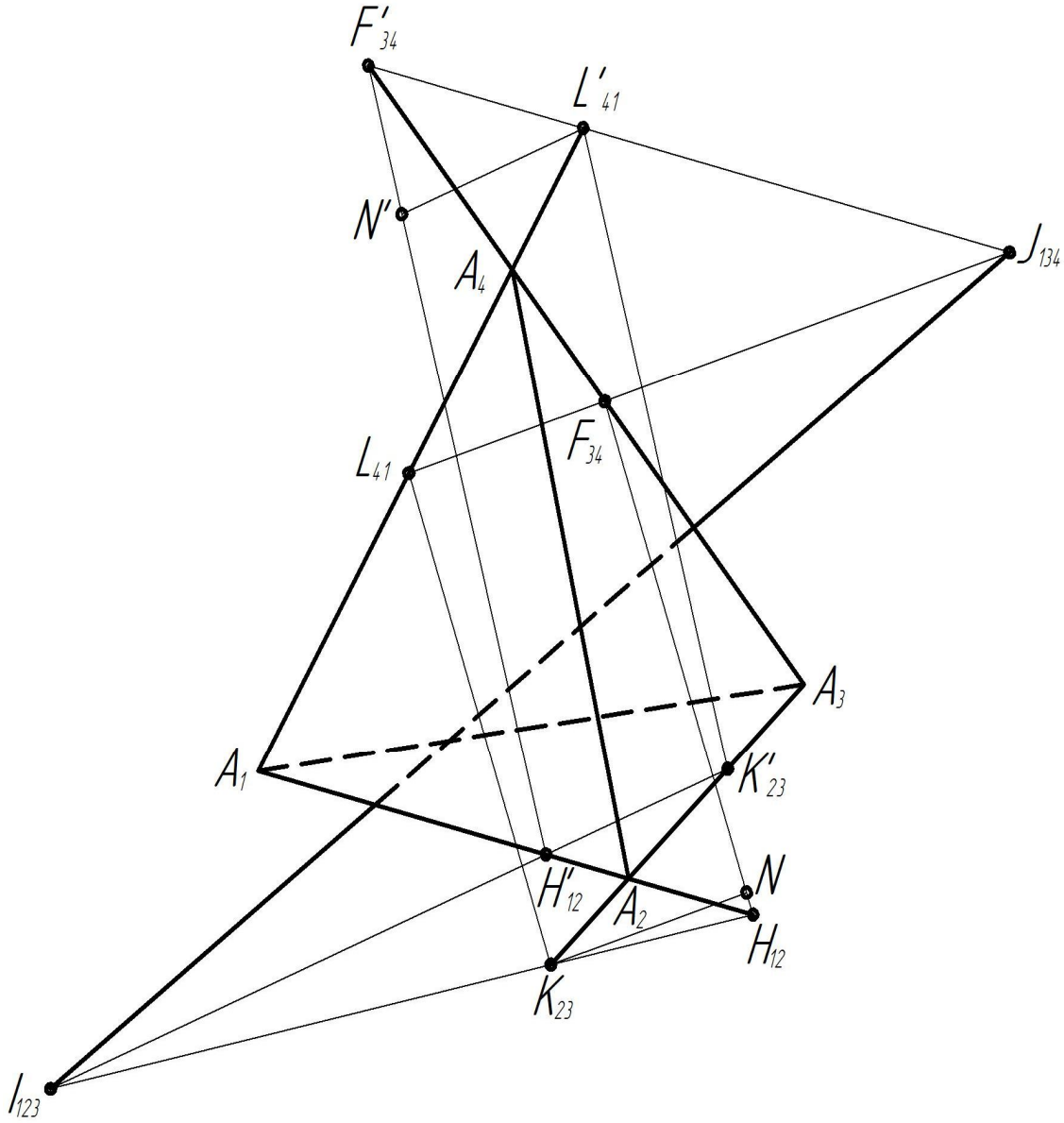


Рисунок 2.10. Построение пересечения прямой с гранями тетраэдра

Учитывая, что прямые $K_{23}L_{41}$ и $H_{12}F_{34}$ параллельны, получим следующее соотношение:

$$\begin{aligned} H_{12} &= F_{34}\bar{u} + Nu = F_{34} + K_{23}u - L_{41}u = \\ &= -A_1\bar{l}u + A_2ku + A_3(\bar{k}u + f) + A_4(\bar{f} - lu). \end{aligned} \quad (2.106)$$

Определим значение параметра u по условию принадлежности точки H_{12} плоскости $A_1A_2A_3$. Согласно s -теоремы БН-исчисления, имеем:

$$\begin{vmatrix} -\bar{l}u & ku & \bar{k}u + f & \bar{f} - lu \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow u = \frac{\bar{f}}{l}. \quad (2.107)$$

Подставим значение параметра u в уравнение (2.106):

$$H_{12} = A_1 \frac{-\bar{f}l}{l} + A_2 \frac{\bar{f}k}{l} + A_3 \frac{\bar{f}k + fl}{l}. \quad (2.108)$$

Аналогичным образом определим точку F'_{34} , принадлежащую плоскости $A_1A_3A_4$.

$$\begin{aligned} H'_{12} &= A_1 h' + A_2 \bar{h}'; \quad L'_{41} = A_4 l' + A_1 \bar{l}'; \quad K'_{23} = A_2 k' + A_3 \bar{k}'; \\ F'_{34} &= H'_{12} \bar{u} + N' u = H'_{12} + L'_{41} u - K'_{23} u = \\ &= A_1 (h' + \bar{l}' u) + A_2 (\bar{h}' - k' u) - A_3 \bar{k}' u + A_4 l' u. \end{aligned} \quad (2.109)$$

Определим значение параметра u по условию принадлежности точки F'_{34} плоскости $A_1A_3A_4$. Согласно s -теоремы БН-исчисления, имеем:

$$\begin{vmatrix} h' + \bar{l}' u & \bar{h}' - k' u & -\bar{k}' u & l' u \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow u = \frac{\bar{h}'}{k'}. \quad (2.110)$$

Подставим значение параметра u в уравнение (2.109):

$$F'_{34} = A_1 \frac{h'k' + \bar{h}'\bar{l}'}{k'} + A_3 \frac{-\bar{h}'\bar{k}'}{k'} + A_4 \frac{\bar{h}'l'}{k'}. \quad (2.111)$$

Точка I_{123} принадлежит плоскости $A_1A_2A_3$. Определим точку I_{123} , как пересечение прямых $H_{12}K_{23}$ и $H'_{12}K'_{23}$ в локальном симплексе $A_1A_2A_3$. Для этого на прямой $H_{12}K_{23}$ определим текущую точку I_{123} , с помощью параметра u :

$$I_{123} = H_{12}u + K_{23}\bar{u} = A_1 \frac{-\bar{f}lu}{l} + A_2 \frac{\bar{f}ku + kl\bar{u}}{l} + A_3 \frac{\bar{f}ku + flu + k\bar{l}\bar{u}}{l}. \quad (2.112)$$

Тогда для определения точки I_{123} площадь треугольника $I_{123}H'_{12}K'_{23}$ должна равняться нулю. Согласно s -теоремы БН-исчисления, получим:

$$\begin{vmatrix} -\bar{f}l & \bar{f}ku + kl\bar{u} & \bar{f}ku + flu + \bar{k}l\bar{u} \\ l & l & l \\ h' & \bar{h}' & 0 \\ 0 & k' & \bar{k}' \end{vmatrix} = 0, \quad (2.113)$$

$$u = \frac{-h'l(k - k')}{\bar{f}h'k'\bar{l} + h'(k - k')(\bar{f} - l) - fh'k'l},$$

$$\bar{u} = \frac{\bar{f}h'k'\bar{l} + \bar{f}h'(k - k') - fh'k'l}{\bar{f}h'k'\bar{l} + h'(k - k')(\bar{f} - l) - fh'k'l}.$$

Подставим значение параметра u в уравнение (2.112) и получим уравнение точки I_{123} в симплексе $A_1A_2A_3$:

$$\begin{aligned} I_{123} = & A_1 \frac{\bar{f}h'\bar{l}(k - k')}{\bar{f}h'k'\bar{l} + h'(k - k')(\bar{f} - l) - fh'k'l} + \\ & + A_2 \frac{k(\bar{f}h'k'\bar{l} - fh'k'l)}{\bar{f}h'k'\bar{l} + h'(k - k')(\bar{f} - l) - fh'k'l} + \\ & + A_3 \frac{\bar{f}h'k\bar{k}'\bar{l} - fh'l(k - k') - fh'k\bar{k}'l}{\bar{f}h'k'\bar{l} + h'(k - k')(\bar{f} - l) - fh'k'l}. \end{aligned} \quad (2.114)$$

Аналогичным образом определим точку J_{134} , как пересечение прямых $L_{41}F_{34}$ и $L'_{41}F'_{34}$ в локальном симплексе $A_1A_3A_4$. Для этого на прямой $L_{41}F_{34}$ определим текущую точку J_{134} , с помощью параметра u :

$$J_{134} = L_{41}u + F_{34}\bar{u} = A_1\bar{l}u + A_3f\bar{u} + A_4(lu + \bar{f}\bar{u}). \quad (2.115)$$

Тогда для определения точки J_{134} площадь треугольника $J_{134}L'_{41}F'_{34}$ должна равняться нулю. Согласно s -теореме БН-исчисления, получим:

$$\begin{vmatrix} \bar{l}u & f\bar{u} & lu + f\bar{u} \\ \bar{l}' & 0 & l' \\ \frac{h'k' + \bar{h}'\bar{l}'}{k'} & \frac{-\bar{h}'\bar{k}'}{k'} & \frac{\bar{h}'l'}{k'} \end{vmatrix} = 0, \quad (2.116)$$

$$u = \frac{fh'k'l' - f\bar{h}'\bar{k}'\bar{l}'}{\bar{h}'\bar{k}'(l-l') - f\bar{h}'\bar{k}'\bar{l}' + fh'k'l'},$$

$$\bar{u} = \frac{\bar{h}'\bar{k}'(l-l')}{\bar{h}'\bar{k}'(l-l') - f\bar{h}'\bar{k}'\bar{l}' + fh'k'l'}.$$

Подставим значение параметра u в уравнение (2.115) и получим уравнение точки J_{134} в симплексе $A_1A_3A_4$:

$$\begin{aligned} J_{134} = & A_1 \frac{\bar{l}(fh'k'l' - f\bar{h}'\bar{k}'\bar{l}')}{\bar{h}'\bar{k}'(l-l') - f\bar{h}'\bar{k}'\bar{l}' + fh'k'l'} + \\ & + A_3 \frac{f\bar{h}'\bar{k}'(l-l')}{\bar{h}'\bar{k}'(l-l') - f\bar{h}'\bar{k}'\bar{l}' + fh'k'l'} + \\ & + A_4 \frac{l'(fh'k'l' - f\bar{h}'\bar{k}'\bar{l}')}{\bar{h}'\bar{k}'(l-l') - f\bar{h}'\bar{k}'\bar{l}' + fh'k'l'}. \end{aligned} \quad (2.117)$$

Теперь рассмотрим геометрический алгоритм построения текущей точки дуги кривой 3-го порядка с двумя несобственными точками методом подвижного симплекса (рис. 2.11). Параметрическая точка T , двигаясь по прямой A_1A_3 , образует подвижный симплекс $TI_{123}J_{134}$, который вращается вокруг оси $I_{123}J_{134}$. Этот симплекс пересекаясь с противорребрами тетраэдра образует соответственно точки T_{12} , T_{23} , T_{34} и T_{41} . Текущую точку M кривой третьего порядка определим, как пересечение двух прямых $T_{12}T_{34}$ и $T_{23}T_{41}$.

Определим точку T следующим точечным уравнением:

$$T = A_1\bar{t} + A_3t. \quad (2.118)$$

Теперь определим точку T_{12} , как пересечение прямых A_1A_2 и TI_{123} . Для этого на прямой TI_{123} определим текущую точку T_{12} , с помощью параметра t_{12} :

$$T_{12} = Tt_{12} + I_{123}\bar{t}_{12}. \quad (2.119)$$

где p_{12} , q_{12} , r_{12} - соответствующие параметры из уравнения (2.120).

Раскроем определитель (2.121):

$$r_{12} = tt_{12} + \frac{\overline{fh'kk'l} - fh'l(k-k') - fh'kk'l}{\overline{fh'k'l} + h'(k-k')(\overline{f} - l) - fh'k'l} \overline{t}_{12} = 0. \quad (2.122)$$

Решим уравнение (2.122) относительно параметра t_{12} :

$$\begin{aligned} t_{12} &= \frac{-(\overline{fh'kk'l} - fh'l(k-k') - fh'kk'l)}{h'(k-k')(\overline{f}t - lt + fl) + (fh'k'l - \overline{fh'k'l})(\overline{k} - t)}, \\ \overline{t}_{12} &= \frac{t(\overline{fh'k'l} + h'(k-k')(\overline{f} - l) - fh'k'l)}{h'(k-k')(\overline{f}t - lt + fl) + (fh'k'l - \overline{fh'k'l})(\overline{k} - t)}. \end{aligned} \quad (2.123)$$

Подставим значение параметра t_{12} в уравнение (2.119):

$$\begin{aligned} T_{12} &= T \frac{-(\overline{fh'kk'l} - fh'l(k-k') - fh'kk'l)}{h'(k-k')(\overline{f}t - lt + fl) + (fh'k'l - \overline{fh'k'l})(\overline{k} - t)} + \\ &+ I_{123} \frac{t(\overline{fh'k'l} + h'(k-k')(\overline{f} - l) - fh'k'l)}{h'(k-k')(\overline{f}t - lt + fl) + (fh'k'l - \overline{fh'k'l})(\overline{k} - t)}. \end{aligned} \quad (2.124)$$

Аналогичным образом определим точки T_{23} , T_{34} и T_{41} с помощью соответствующих параметров t_{23} , t_{34} и t_{41} .

$$T_{23} = Tt_{23} + I_{123}\overline{t}_{23}. \quad (2.125)$$

Подставив уравнения (2.114) и (2.118) в (2.125) получим:

$$\begin{aligned} T_{23} &= A_1 \left[\overline{t}t_{23} + \frac{\overline{fh'l}(k-k')}{\overline{fh'k'l} + h'(k-k')(\overline{f} - l) - fh'k'l} \overline{t}_{23} \right] + \\ &+ A_2 \frac{k(\overline{fh'k'l} - fh'k'l)}{\overline{fh'k'l} + h'(k-k')(\overline{f} - l) - fh'k'l} \overline{t}_{23} + \\ &+ A_3 \left[tt_{23} + \frac{\overline{fh'kk'l} - fh'l(k-k') - fh'kk'l}{\overline{fh'k'l} + h'(k-k')(\overline{f} - l) - fh'k'l} \overline{t}_{23} \right]. \end{aligned} \quad (2.126)$$

Площадь треугольника $A_2 A_3 T_{23}$ должна равняться нулю. Согласно s -теореме БН-исчисления имеем:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ p_{23} & q_{23} & r_{23} \end{vmatrix} = 0, \quad (2.127)$$

где p_{23} , q_{23} , r_{23} - соответствующие параметры из уравнения (2.126).

Раскроем определитель (2.127):

$$p_{23} = \bar{t}t_{23} + \frac{\bar{f}h'\bar{l}(k-k')}{\bar{f}h'\bar{k}'\bar{l} + h'(k-k')(\bar{f}-l) - fh'k'l} \bar{t}_{23} = 0. \quad (2.128)$$

Решим уравнение (2.128) относительно параметра t_{23} :

$$\begin{aligned} t_{23} &= \frac{-\bar{f}h'\bar{l}(k-k')}{\bar{t}[\bar{f}h'\bar{k}'\bar{l} + h'(k-k')(\bar{f}-l) - fh'k'l] + \bar{f}h'\bar{l}(k-k')}, \\ \bar{t}_{23} &= \frac{\bar{t}[\bar{f}h'\bar{k}'\bar{l} + h'(k-k')(\bar{f}-l) - fh'k'l] + 2\bar{f}h'\bar{l}(k-k')}{\bar{t}[\bar{f}h'\bar{k}'\bar{l} + h'(k-k')(\bar{f}-l) - fh'k'l] + \bar{f}h'\bar{l}(k-k')}. \end{aligned} \quad (2.129)$$

Подставим значение параметра t_{23} в уравнение (2.126):

$$\begin{aligned} T_{23} &= T \frac{-\bar{f}h'\bar{l}(k-k')}{\bar{t}[\bar{f}h'\bar{k}'\bar{l} + h'(k-k')(\bar{f}-l) - fh'k'l] + \bar{f}h'\bar{l}(k-k')} + \\ &+ I_{123} \frac{\bar{t}[\bar{f}h'\bar{k}'\bar{l} + h'(k-k')(\bar{f}-l) - fh'k'l] + 2\bar{f}h'\bar{l}(k-k')}{\bar{t}[\bar{f}h'\bar{k}'\bar{l} + h'(k-k')(\bar{f}-l) - fh'k'l] + \bar{f}h'\bar{l}(k-k')}. \end{aligned} \quad (2.130)$$

Определим точку T_{34} с помощью параметра t_{34} .

$$T_{34} = Tt_{34} + J_{134}\bar{t}_{34}. \quad (2.131)$$

Подставив уравнения (2.117) и (2.130) в (2.131) получим:

$$\begin{aligned} T_{34} &= A_1 \left[\bar{t}t_{34} + \frac{\bar{l}(fh'k'l - \bar{f}h'\bar{k}'\bar{l})}{\bar{h}'\bar{k}'(l-l') - \bar{f}h'\bar{k}'\bar{l} + fh'k'l} \bar{t}_{34} \right] + \\ &+ A_3 \left[tt_{34} + \frac{\bar{f}h'\bar{k}'(l-l')}{\bar{h}'\bar{k}'(l-l') - \bar{f}h'\bar{k}'\bar{l} + fh'k'l} \bar{t}_{34} \right] + \\ &+ A_4 \cdot \frac{l(fh'k'l - \bar{f}h'\bar{k}'\bar{l})}{\bar{h}'\bar{k}'(l-l') - \bar{f}h'\bar{k}'\bar{l} + fh'k'l} \bar{t}_{34}. \end{aligned} \quad (2.132)$$

Площадь треугольника $A_4 A_3 T_{34}$ должна равняться нулю. Согласно s -теореме БН-исчисления имеем:

$$\begin{vmatrix} p_{34} & q_{34} & r_{34} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad (2.133)$$

где p_{34} , q_{34} , r_{34} - соответственно параметры из уравнения (2.132).

Раскроем определитель (2.133):

$$p_{34} = \bar{t}t_{34} + \frac{\bar{l}(fh'k'l' - \bar{f}\bar{h}'\bar{k}'\bar{l}')}{\bar{h}'\bar{k}'(l-l') - \bar{f}\bar{h}'\bar{k}'\bar{l}' + fh'k'l'}\bar{t}_{34} = 0. \quad (2.134)$$

Решим уравнение (2.134) относительно параметра t_{34} :

$$\begin{aligned} t_{34} &= \frac{-\bar{l}(fh'k'l' - \bar{f}\bar{h}'\bar{k}'\bar{l}')}{(\bar{t} - \bar{l})(fh'k'l' - \bar{f}\bar{h}'\bar{k}'\bar{l}') + \bar{t}\bar{h}'\bar{k}'(l-l')}, \\ \bar{t}_{34} &= \frac{\bar{t}(fh'k'l' - \bar{f}\bar{h}'\bar{k}'\bar{l}') + \bar{t}\bar{h}'\bar{k}'(l-l')}{(\bar{t} - \bar{l})(fh'k'l' - \bar{f}\bar{h}'\bar{k}'\bar{l}') + \bar{t}\bar{h}'\bar{k}'(l-l')}. \end{aligned} \quad (2.135)$$

Подставим значение параметра t_{34} в уравнение (2.131):

$$\begin{aligned} T_{34} &= T \frac{-\bar{l}(fh'k'l' - \bar{f}\bar{h}'\bar{k}'\bar{l}')}{(\bar{t} - \bar{l})(fh'k'l' - \bar{f}\bar{h}'\bar{k}'\bar{l}') + \bar{t}\bar{h}'\bar{k}'(l-l')} + \\ &+ I_{134} \frac{\bar{t}(fh'k'l' - \bar{f}\bar{h}'\bar{k}'\bar{l}') + \bar{t}\bar{h}'\bar{k}'(l-l')}{(\bar{t} - \bar{l})(fh'k'l' - \bar{f}\bar{h}'\bar{k}'\bar{l}') + \bar{t}\bar{h}'\bar{k}'(l-l')}. \end{aligned} \quad (2.136)$$

Определим точку T_{41} с помощью параметра t_{41} .

$$T_{41} = Tt_{41} + J_{134}\bar{t}_{41}. \quad (2.137)$$

Подставив уравнения (2.117) и (2.118) в (2.137) получим:

$$\begin{aligned} T_{41} &= A_1 \left[\bar{t}t_{41} + \frac{\bar{l}(fh'k'l' - \bar{f}\bar{h}'\bar{k}'\bar{l}')}{\bar{h}'\bar{k}'(l-l') - \bar{f}\bar{h}'\bar{k}'\bar{l}' + fh'k'l'}\bar{t}_{41} \right] + \\ &+ A_3 \left[tt_{41} + \frac{\bar{f}\bar{h}'\bar{k}'(l-l')}{\bar{h}'\bar{k}'(l-l') - \bar{f}\bar{h}'\bar{k}'\bar{l}' + fh'k'l'}\bar{t}_{41} \right] + \\ &+ A_4 \cdot \frac{l'(fh'k'l' - \bar{f}\bar{h}'\bar{k}'\bar{l}')}{\bar{h}'\bar{k}'(l-l') - \bar{f}\bar{h}'\bar{k}'\bar{l}' + fh'k'l'}\bar{t}_{41}. \end{aligned} \quad (2.138)$$

Площадь треугольника $T_{41}A_4A_1$ должна равняться нулю. Согласно s -теоремы

БН-исчисления имеем:

$$\begin{vmatrix} p_{41} & q_{41} & r_{41} \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad (2.139)$$

где p_{41} , q_{41} , r_{41} - соответствующие параметры из уравнения (2.138).

Раскроем определитель (2.139):

$$q_{41} = tt_{41} + \frac{f\bar{h}'\bar{k}'(l-l')}{\bar{h}'\bar{k}'(l-l') - f\bar{h}'\bar{k}'\bar{l}' + fh'k'l'}\bar{t}_{41} = 0. \quad (2.140)$$

Решим уравнение (2.140) относительно параметра t_{41} :

$$\begin{aligned} t_{41} &= \frac{-f\bar{h}'\bar{k}'(l-l')}{\bar{h}'\bar{k}'(l-l')(t-f) - t(f\bar{h}'\bar{k}'\bar{l}' - fh'k'l')}, \\ \bar{t}_{41} &= \frac{\bar{h}'\bar{k}'(l-l')(t-2f) - t(f\bar{h}'\bar{k}'\bar{l}' - fh'k'l')}{\bar{h}'\bar{k}'(l-l')(t-f) - t(f\bar{h}'\bar{k}'\bar{l}' - fh'k'l')}. \end{aligned} \quad (2.141)$$

Подставим значение параметра t_{41} в уравнение (2.137):

$$\begin{aligned} T_{41} &= T \frac{-f\bar{h}'\bar{k}'(l-l')}{\bar{h}'\bar{k}'(l-l')(t-f) - t(f\bar{h}'\bar{k}'\bar{l}' - fh'k'l')} + \\ &+ I_{134} \frac{\bar{h}'\bar{k}'(l-l')(t-2f) - t(f\bar{h}'\bar{k}'\bar{l}' - fh'k'l')}{\bar{h}'\bar{k}'(l-l')(t-f) - t(f\bar{h}'\bar{k}'\bar{l}' - fh'k'l')}. \end{aligned} \quad (2.142)$$

Определим текущую точку M дуги кривой 3-го порядка, как пересечение прямых $T_{12}T_{34}$ и $T_{23}T_{41}$ в подвижном симплексе $TI_{123}J_{134}$. Для этого на прямой $T_{12}T_{34}$ определим точку M с помощью параметра u :

$$M = T_{12}\bar{u} + T_{34}u = I_{123}\bar{t}_{12}\bar{u} + J_{134}\bar{t}_{34}u + T(t_{34}u + t_{12}\bar{u}). \quad (2.143)$$

Площадь треугольника $MT_{23}T_{41}$ должна равняться нулю. Согласно s -теоремы БН-исчисления, имеем:

$$\begin{vmatrix} \bar{t}_{12}\bar{u} & \bar{t}_{34}u & t_{34}u + t_{12}\bar{u} \\ \bar{t}_{23} & 0 & t_{23} \\ 0 & \bar{t}_{41} & t_{41} \end{vmatrix} = 0. \quad (2.144)$$

Отсюда определим параметр u :

$$u = \frac{(t_{12} - t_{23})\bar{t}_{41}}{(t_{41} - t_{34})\bar{t}_{23} + (t_{12} - t_{23})\bar{t}_{41}}, \quad \bar{u} = \frac{(t_{41} - t_{34})\bar{t}_{23}}{(t_{41} - t_{34})\bar{t}_{23} + (t_{12} - t_{23})\bar{t}_{41}}. \quad (2.145)$$

Подставим значение параметра u в уравнение (2.143). После определенных преобразований получим уравнение дуги кривой 3-го порядка с двумя несобственными точками в симплексе $TI_{123}J_{134}$:

$$\begin{aligned} M = & I_{123} \frac{(t_{41} - t_{34})\bar{t}_{12}\bar{t}_{23}}{(t_{41} - t_{34})\bar{t}_{23} + (t_{12} - t_{23})\bar{t}_{41}} + \\ & + J_{134} \frac{(t_{12} - t_{23})\bar{t}_{34}\bar{t}_{41}}{(t_{41} - t_{34})\bar{t}_{23} + (t_{12} - t_{23})\bar{t}_{41}} + \\ & + T \frac{(t_{12} - t_{23})t_{34}\bar{t}_{41} + (t_{41} - t_{34})t_{12}\bar{t}_{23}}{(t_{41} - t_{34})\bar{t}_{23} + (t_{12} - t_{23})\bar{t}_{41}}. \end{aligned} \quad (2.146)$$

Переходим к симплексу $A_1A_2A_3A_4$. Для этого подставим уравнения (2.114), (2.117), (2.123), (2.129), (2.135) и (2.141) в (2.146). Поскольку искомое уравнение является достаточно сложным и большим, представим результат в виде расчетного алгоритма.

1. Определяем точки I_{123} и J_{134} соответственно из уравнений (2.114) и (2.117).
2. Находим точку T из уравнения (2.80).
3. Определяем точки T_{12} , T_{23} , T_{34} и T_{41} с помощью соответствующих параметров t_{12} , t_{23} , t_{34} и t_{41} из уравнений (2.124), (2.130), (2.136) и (2.142).
4. Находим уравнение дуги кривой 3-го порядка с двумя несобственными точками с помощью уравнения (2.146).

2.5 Способ конструирования геометрических моделей многокомпонентных систем

Используя свойства БН-исчисления, в работах [47,63,74] был разработан метод подвижного симплекса, сущность которого состоит в возможности создания новых пространственных форм, используя геометрические объекты симплекса пространства, который, в свою очередь, движется в пространстве по каким-то за-

конам. Если симплекс пространства будет подвижным, то есть каким-то образом менять свое положение в пространстве, то он становится прообразом новых пространственных форм. Предложенный в [47,63,74] метод по своему смыслу похож на кинематический способ создания пространственных форм. Однако он представляет собой более широкое понятие и допускает обобщение на пространство более высоких размерностей.

2.5.1 Геометрическая сущность метода подвижного симплекса

Для более детального понимания предложенного способа, сначала рассмотрим понятие симплекса пространства. Симплекс либо n -мерный тетраэдр (от лат. Simplex – простой) – геометрическая фигура, которая является n -мерным обобщением треугольника. В общем случае, симплекс – это выпуклая оболочка $n+1$ точек, которые не принадлежат ни одной гиперплоскости n -мерного Эвклидова пространства. Эти точки называются вершинами симплекса. Для БН-исчисления вершины симплекса являются исходными данными. Как видно из определения, симплекс непосредственно связан с размерностью пространства, в котором рассматриваются геометрические объекты. Так симплекс двух точек образует одномерное пространство – линию. Симплекс трех точек образует двумерное пространство – плоскость. Симплекс четырех точек образует трехмерное пространство и т.д.

Далее на примерах рассмотрим, как можно использовать метод подвижного симплекса для образования новых геометрических объектов.

Метод подвижного симплекса одномерного пространства

Рассмотрим геометрический алгоритм образования такого простого и, вместе с тем, широко используемого пространственного образа, как круг. Выберем произвольную прямую – одномерный симплекс двух точек и будем вращать ее вокруг одной из вершин симплекса, тогда другая вершина симплекса опишет дугу круга. Таким образом, методом подвижного симплекса одномерного пространства мож-

но задать круг, причем положение этого круга в пространстве более высоких размерностей будет зависеть от параметров (координат) вершин симплекса, заданного в определенном пространстве.

В подразделе 2.2 диссертационной работы было рассмотрено определение дуги параболы 2-го порядка, как кривой одного отношения, соответственно к геометрической схеме конструирования дуги параболы 2-го порядка (рис. 2.2). В этом случае прямая B_1B_2 – одномерный симплекс двух точек B_1 и B_2 , движется по определенным законам: вершина симплекса B_1 движется по прямой A_1A_3 в направлении точки A_3 , а вершина симплекса B_2 движется по прямой A_3A_2 в направлении точки A_2 . В свою очередь, в подвижном симплексе B_1B_2 движется точка M по закону прямо связанным с законом движения точек B_1 и B_2 . Совокупность движения подвижного симплекса B_1B_2 и точки M в нем создает новый пространственный образ – дугу параболы 2-го порядка, который определен в двумерном пространстве.

К аналогичным примерам можно отнести конструирование любой дуги кривой линии в непрерывной геометрии, при условии существования непрерывного геометрического алгоритма конструирования дуги кривой. Также можно отметить, что все разнообразие движения одномерного симплекса сводится либо к вращению этого пространства вокруг одной из вершин симплекса (фиксируется одна из вершин симплекса), либо к движению всего симплекса (обеих вершин) в пространстве более высокой размерности (в частности, в двумерном пространстве) по определенному закону движения.

Во втором разделе было рассмотрено несколько примеров использования метода подвижного симплекса одномерного пространства для конструирования дуг алгебраических кривых, проходящих через наперед заданные точки, не только по известным ранее геометрическим алгоритмам образования этих дуг кривых, а и предложены новые геометрические схемы конструирования дуг кривых с наперед заданными свойствами.

Метод подвижного симплекса двумерного пространства

Для двумерного пространства, симплекс которого определяется тремя точками, движение симплекса может совершаться тремя способами. В общем случае движение симплекса может осуществляться в трехмерном пространстве (или в пространстве более высоких размерностей) по определенному закону, когда все вершины симплекса движутся независимо друг от друга. Если зафиксировать одну из вершин симплекса, то получим вращение этого симплекса вокруг точки – фиксированной вершины в трехмерном пространстве. Если зафиксировать две вершины симплекса, то получим вращение симплекса вокруг оси в трехмерном пространстве, причем осью будет фиксированная сторона симплекса.

Зададим в подвижном симплексе плоскости отрезок прямой либо дугу кривой. Тогда, двигаясь вместе с симплексом, этот отрезок либо дуга опишет поверхность, то есть двухпараметрическое множество точек, определенных в трехмерном пространстве. Причем один из параметров будет управлять движением симплекса плоскости в трехмерном пространстве, а другие – движением отрезка прямой либо дуги кривой в симплексе плоскости. Таким образом, используя отрезок прямой в качестве прообраза, можно аналитически определить линейчатые поверхности.

Обобщение метода подвижного симплекса для многомерного пространства

Под многомерным пространством подразумевается аффинное пространство с размерностью более трех. Симплекс такого пространства соответственно будет определяться с помощью минимум четырех точек, и зависеть, непосредственно, от размерности самого пространства. Соответствующим образом изменится и количество способов движения подвижного симплекса, которое зависит от количества зафиксированных (либо, наоборот, подвижных) вершин симплекса. Например, для одномерного подвижного симплекса, у которого количество вершин, которые определяют симплекс, равен двум, количество способов движения этого же

симплекса также равно двум, для двумерного – трем, для четырехмерного – четырем и т.д.

Рассмотрим применение метода подвижного симплекса в БН-исчислении. В общем случае, точечные уравнения геометрических объектов представляют собой комбинацию арифметических операций между вершинами симплекса и функциональными зависимостями (в отдельном случае, может быть действительное число) при них, которые определяют положение точки в пространстве избранного симплекса. Вершины симплекса определяются параметрами (координатами), количество которых зависит от размерности пространства. А в зависимости от количества переменных параметров, которые входят в состав функциональной зависимости изменяется и геометрическая сущность предложенного объекта в следующем соответствии: однопараметрическое множество – линия, двухпараметрическое – поверхность, трехпараметрическое – гиперповерхность и т.д.

Например, если полученное точечное уравнение дуги кривой рассматривать в другом симплексе (поменять координаты вершин симплекса), то автоматически состоится аффинное преобразование дуги кривой. Изменение координат вершин симплекса, через которые задана кривая, геометрически означает движение кривой в трехмерном пространстве, что позволяет формировать сегменты поверхности движением симплекса, порождая тем самым новый способ конструирования сегмента поверхности. В соответствии с рекомендациями специалистов из прикладной геометрии такой способ конструирования поверхностей получил название – метод подвижного (переменного) симплекса. Но во время развития метода, стало понятным, что под подвижным симплексом можно использовать не только симплекс плоскости (двухмерный симплекс), но и симплекс пространства любой размерности. А практическая реализация этого метода для многомерного пространства, возможна в БН-исчислении, поскольку точечные уравнения допускают реализацию в пространствах с размерностью выше трех. Эта особенность метода подвижного симплекса в данной диссертационной работе реализована для геометрического моделирования многопараметрических явлений и процессов, который приведен ниже.

2.5.2 Конструирование геометрических моделей многофакторных явлений и процессов методом подвижного симплекса

На основе метода подвижного симплекса [47,63,74], суть которого была проанализирована выше, автором разработан общий подход к геометрическому моделированию явлений и процессов, который позволяет организовывать геометрический объект из множества точек, выбирая опорные контуры геометрического объекта и управляя движением текущих точек, составляющих геометрического объекта, который конструируется. Так однопараметрическим множеством точек в двумерном пространстве является линия (рис. 2.12а), которая может быть представлена, как однопараметрический процесс и определяется в общем случае следующим точечным уравнением:

$$P_1 = (A_1 - C_1)p_1(u) + (B_1 - C_1)q_1(u) + C_1. \quad (2.147)$$

Следует отметить, что характер процесса напрямую зависит от выбора произвольных функций $p_1(u)$ и $q_1(u)$, зависящих в свою очередь, от геометрической схемы построения процесса, которая составляется на основе тщательного анализа экспериментальных данных исследований.

Соответственно, двухпараметрическим множеством точек в трехмерном пространстве является отсек поверхности (рис. 2.12б), который может быть представлен как двухпараметрический процесс. Причем, текущие точки P_1 и P_2 определяют две опорные линии сегмента поверхности с помощью параметра u . Текущая точка Q_1 , двигаясь с помощью параметра v , определяет образующую линию сегмента поверхности. Таким образом, сегмент поверхности является организованным множеством точек, которые определяются двумя параметрами: u и v . Аналитическое представление такого множества точек в БН-исчислении определяется с помощью следующей последовательности точечных уравнений:

$$\begin{cases} P_1 = (A_1 - C_1)p_1(u) + (B_1 - C_1)q_1(u) + C_1, \\ P_2 = (A_2 - C_2)p_2(u) + (B_2 - C_2)q_2(u) + C_2, \\ Q_1 = (P_1 - C_2)\varphi(v) + (P_2 - C_2)f(v) + C_2. \end{cases} \quad (2.148)$$

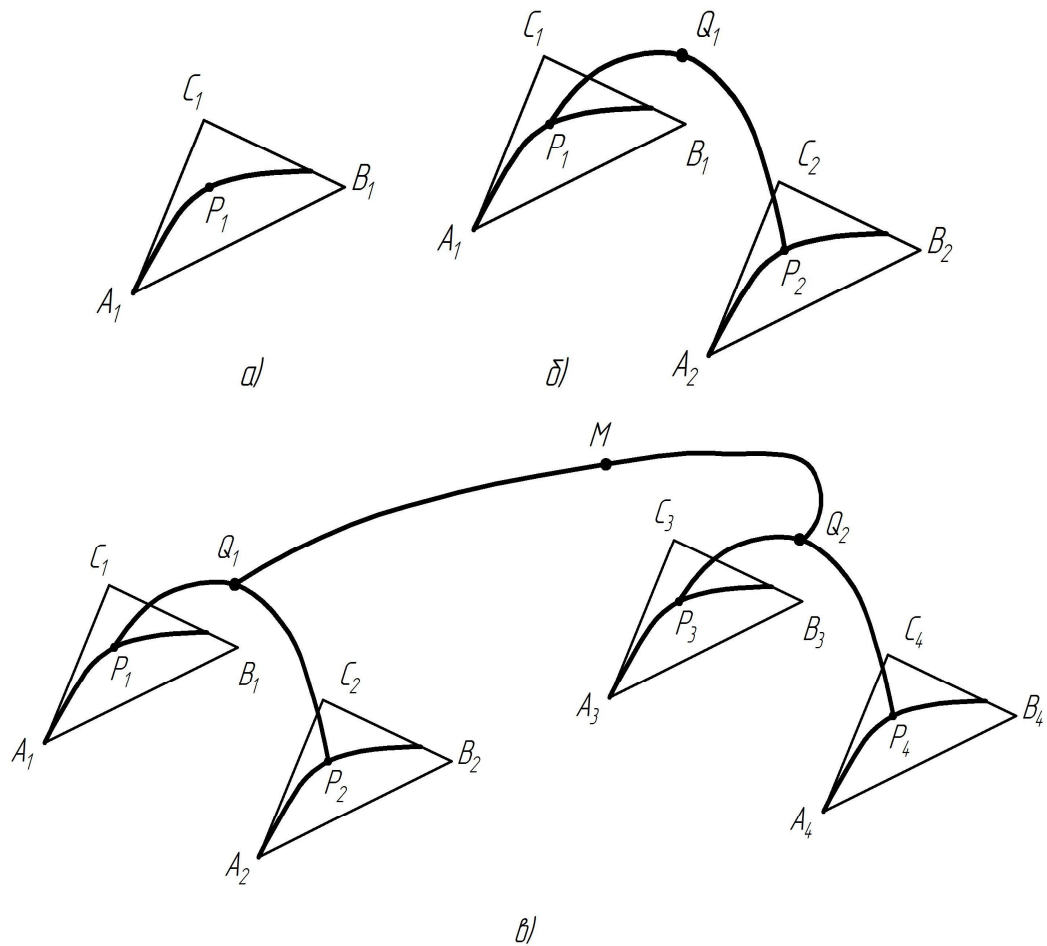


Рисунок 2.12. Геометрическая схема конструирования одно-, двух- и трехпараметрического процесса

Предложенная последовательность точечных уравнений является, по сути, расчетным алгоритмом, который позволяет выполнить необходимый расчет точек с помощью ЭВМ. Подставив уравнения текущих точек P_1 и P_2 в уравнение точки Q_1 , получим точечное уравнение сегмента поверхности, который определен в симплексе трехмерного пространства $A_1B_1C_1C_2$. Но полученное уравнение будет достаточно сложным и объемным, к тому же, необходимо заранее определить точки A_2 и B_2 в симплексе $A_1B_1C_1C_2$ с помощью отношения ориентированных объемов (см. подраздел 1.3 данной диссертационной работы). Каждая из точек, которая определяется в симплексе трехмерного пространства и не является вершиной симплекса, определяется минимум тремя фиксированными параметрами. То есть в состав уравнения (2.148) будут входить 6 фиксированных параметров и 2 текущих, комбинация которых может быть достаточно сложной, в зависимости

от исходных данных моделирования. Также, следует учитывать, что модель двухпараметрического процесса, приведенная на рисунке 2.12б и аналитически реализованная с помощью последовательности точечных уравнений (2.148), это только принципиальная схема конструирования двухпараметрического процесса. В данном случае количество опорных контуров равно двум, но в зависимости от исходных данных процесса, таких как матрица планирования и др., количество опорных контуров может быть больше чем два. Например, геометрическая модель физико-механических свойств дегтебетона, предложена в 4 разделе. В данном случае количество параметров, которые определяют опорные точки, и количество точечных уравнений, аналогичных (2.148), увеличивается в разы, а вместе с этим и сложность полученного итогового уравнения двухпараметрического процесса. Поэтому для удобного программирования и для уменьшения ошибок во время алгебраических преобразований, предлагается следующий расчетный алгоритм определения сегмента поверхности в симплексе трехмерного пространства $A_1B_1C_1C_2$:

1. Выбираем четыре точки, которые будут вершинами симплекса трехмерного пространства. В общем случае вершины симплекса могут не совпадать с исходными точками. Но выбирая симплекс пространства из исходных точек, минимизируем количество операций необходимых для расчета точек симплекса. Это уменьшает на двенадцать количество параметров итогового уравнения и тем самым оптимизирует итоговый расчетный алгоритм в программном смысле.

2. Определяем в симплексе трехмерного пространства точки, которые не вошли в состав точек симплекса, с помощью параметров, которые определяются отношением ориентированных объемов.

3. Далее определяем все необходимые точечные уравнения опорных линий сегмента поверхности. Следует отметить, что уравнения опорных линий могут быть не однотипными и описывать не только дуги алгебраических кривых, а и отрезки прямых, в зависимости от исходных данных процесса. Но движение точек, которые определяют эти геометрические объекты связываются с помощью одного и того же самого параметра u , как было показано в (2.148).

4. Через все опорные линии проводим образующую линию Q_1 (уравнение 2.148), которая определяется с помощью параметра v .

Используя методы обобщения и аналогии, получим сегмент гиперповерхности как трехпараметрическое множество точек в четырехмерном пространстве (рис. 2.12в), который можно представить как трехпараметрический процесс. В этом случае, линии Q_1 и Q_2 , которые являются образующими для соответствующих сегментов поверхностей, и связаны между собой с помощью одних и тех же текущих параметров u и v , одновременно являясь опорными линиями сегмента гиперповерхности, которая определяется движением текущей точки M с помощью текущего параметра w . Аналитически это можно представить следующей последовательностью точечных уравнений:

$$\left[\begin{array}{l} P_1 = (A_1 - C_1)p_1(u) + (B_1 - C_1)q_1(u) + C_1, \\ P_2 = (A_2 - C_2)p_2(u) + (B_2 - C_2)q_2(u) + C_2, \\ P_3 = (A_3 - C_3)p_3(u) + (B_3 - C_3)q_3(u) + C_3, \\ P_4 = (A_4 - C_4)p_4(u) + (B_4 - C_4)q_4(u) + C_4, \\ Q_1 = (P_1 - C_2)\varphi_1(v) + (P_2 - C_2)f_1(v) + C_2, \\ Q_2 = (P_3 - C_4)\varphi_2(v) + (P_4 - C_4)f_2(v) + C_4, \\ M = (Q_1 - C_4)\mu(w) + (Q_2 - C_4)\eta(w) + C_4. \end{array} \right. \quad (2.149)$$

Предложенная последовательность точечных уравнений – это, по сути, расчетный алгоритм определения сегмента гиперповерхности, который можно раскрыть относительно аналогичной последовательности точечных уравнений (2.148), что было приведено выше.

Аналогичным образом можно сконструировать любой геометрический объект и получить его аналитическое представление в виде расчетного алгоритма, представленного последовательностью точечных уравнений.

Таким образом, как видно из эволюции геометрической схемы модели процесса от рисунка 2.12а до рисунка 2.12в, любая сложная геометрическая модель процесса, складывается из нескольких простых моделей, формируя своего рода «дерево» модели процесса, каждая ветвь которого является также моделью процесса, но более низкого порядка относительно общей модели процесса. Используя

такой подход, можно создавать геометрические модели явлений и процессов любой сложности. При этом, количество параметров, задействованных в формировании процесса, будет определять размерность пространства, в котором будет определена геометрическая модель процесса.

Поскольку все опорные линии модели процесса определяются как линии, которые проходят через заданные точки (являются исходными данными), то полученная предложенным способом геометрическая модель процесса является более стойкой относительно к исходным данным в сравнении с регрессионной моделью. Необходимые для этого точечные уравнения дуг кривых и способы их конструирования были рассмотрены выше.

ВЫВОДЫ ПО РАЗДЕЛУ 2

1. Выполнен обзор существующих способов моделирования дуг алгебраических кривых и предложены новые способы моделирования дуг алгебраических кривых в БН-исчислении, которые соответствуют наперед заданным условиям, с целью построения геометрических объектов, как упорядоченного множества точек, воспроизводящего характер протекания процесса. Выполненный анализ подтвердил необходимость и целесообразность применения математического аппарата БН-исчисления, который позволяет решить задачи моделирования сложных процессов, упрощает их программную реализацию и уменьшает затраты ресурсов.

2. Разработаны и исследованы в БН-исчислении способы геометрического моделирования дуг алгебраических кривых, проходящих через заданные точки, что значительно расширило инструментальную базу БН-исчисления, как аппарата геометрического моделирования и дало возможность создания многопараметрических моделей явлений и процессов как многомерных геометрических объектов в многомерном пространстве.

3. Предложен способ геометрического моделирования дуг алгебраических кривых на основе полиномов Бернштейна, который можно эффективно использовать для создания многопараметрических моделей явлений и процессов методом подвижного симплекса. Используя предложенный способ, в БН-исчислении определены параболические дуги кривых с 2-го по 6-й порядок, что значительно расширило инструментарий БН-исчисления и позволяет сразу использовать полученные дуги кривых непосредственно для геометрического моделирования явлений и процессов.

4. Предложен и реализован в БН-исчислении алгоритм построения обвода нулевого порядка гладкости на основе дуги кривой 2-го порядка, которая определяется 5 точками, что позволяет значительно уменьшить «кусочность» опуклых обводов.

5. Получено и исследовано в БН-исчислении точечное уравнение дуги параболы 2-го порядка, которое является основой для интерполяции с помощью пара-

болических дуг кривых, сегментов поверхностей, гиперповерхностей, др., что позволяет создавать адекватные геометрические модели многопараметрических явлений и процессов.

6. Рассмотрена геометрическая сущность и исследованы свойства метода подвижного симплекса, который позволяет конструировать геометрические объекты в пространстве и представлять их как организованные определенным образом множества точек пространства.

7. Разработан в БН-исчислении способ использования геометрических объектов многомерного аффинного пространства для моделирования многопараметрических процессов в БН-исчислении. Этот способ позволяет получить аналитические зависимости в виде точечных уравнений и расчетные алгоритмы на их основе, что обеспечивает эффективное моделирование в многомерном аффинном пространстве, получая при этом относительно несложную программную реализацию.

8. Разработан расчетный алгоритм определения сегмента поверхности в симплексе трехмерного пространства, который позволяет программную реализацию, предложенного выше способа конструирования геометрических моделей двухпараметрических явлений и процессов, на примере которого предложено обобщение для конструирования геометрических моделей многопараметрических явлений и процессов.

9. Установлено, что в качестве симплекса соответствующего геометрической модели размерности пространства необходимо использовать точки, которые являются исходными данными геометрического моделирования явлений и процессов. Это позволяет сократить и оптимизировать итоговый расчетный алгоритм в программном смысле.

РАЗДЕЛ 3

ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ОПТИМИЗАЦИЯ ПАРАМЕТРОВ ТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО ПРОЦЕССА ПРОИЗВОДСТВА ГАЗОБЕТОНА

Основная идея геометрического моделирования многообразия процессов и явлений в БН-исчислении заключается в том, что для любых факторов, влияющих на состояние процесса или явления, ставится в соответствие точки, как геометрические объекты многомерного пространства. При этом наблюдается следующая закономерность.

Размерность пространства n , а, следовательно, и количество координат, определяющих геометрический объект в пространстве, напрямую зависит от количества факторов варьирования k : $n = k + 1$.

Это же утверждение можно перефразировать следующим образом.

Количество факторов варьирования соответствует количеству текущих параметров, определяющих геометрический объект в многомерном пространстве.

Например, геометрической интерпретацией однофакторного эксперимента является дуга кривой или отрезок прямой линии, как однопараметрическое множество точек принадлежащих двумерному пространству. А геометрической интерпретацией двухфакторного эксперимента является отсек поверхности, как двухпараметрическое множество точек принадлежащих трехмерному пространству и т.д.

Например, если планируется провести эксперимент с изменением двух параметров, то кодируемых факторов варьирования будет 6: 3 для одного параметра и 3 для второго, а их комбинаций – 9. Т.е. геометрически задача сводится к определению отсека поверхности, которая проходит через 9 точек и определяется двумя параметрами. Обобщая такой подход, получим необходимое количество

экспериментальных данных: для трёхпараметрического эксперимента – 27, для четырёхпараметрического – 81 и т.д.

Таким образом, получим зависимость необходимого количества исходных данных для моделирования y от количества факторов варьирования:

$$y = x^k,$$

где x – количество измерений, полученных для каждого фактора;

k – количество факторов варьирования.

Следует отметить, что данная зависимость справедлива исключительно для случая, когда количество экспериментов относительно каждого параметра является величиной постоянной, что достаточно часто встречается при исследовании и математическом моделировании физико-механических свойств строительных материалов. Но сам аппарат геометрического моделирования, реализованный в БН-исчислении, является универсальным и может создавать математические модели для любого количества экспериментальных измерений и любого количества параметров. При этом рост количества измерений приводит к увеличению порядка аппроксимирующей кривой, а рост количества параметров – к увеличению размерности пространства в котором рассматривается геометрический объект.

Также само количество экспериментов для каждого конкретного фактора варьирования может быть различным. Минимальное количество экспериментов – один. Для аналитического описания геометрических моделей в зависимости от количества экспериментальных данных для каждого фактора варьирования необходимо иметь многообразие дуг кривых проходящих через наперед заданные точки, которые и соответствуют экспериментальным значениям конкретного фактора варьирования. Эти исследования с необходимым для практики набором дуг кривых приведены во второй главе данных исследований.

Чтобы определить необходимое и достаточное количество экспериментальных значений для последующего геометрического моделирования можно воспользоваться таблицей 3.1.

Таблица 3.1 - Определение необходимого и достаточного количества
экспериментальных данных

Количество факторов варьирования	Количество экспериментов для каждого конкретного фактора						
	2	3	4	5	6	7	8
1	2	3	4	5	6	7	8
2	4	9	16	25	36	49	64
3	8	27	64	125	216	343	512
4	16	81	256	625	1296	2401	4096
5	32	243	1024	3125	7776	16807	32768
6	64	729	4096	15625	46656	117649	262144
7	128	2187	16384	78125	279936	823543	2097152

В таблице 3.1 представлены 49 комбинаций, которые позволяют определить геометрический объект, а, следовательно, и аналитически описать модель процесса в пространстве. Для большего количества экспериментов данные не приводятся, но их можно вычислить аналогичным способом. При этом следует учитывать, что во время моделирования количество факторов варьирования может ограничиваться только размерностью пространства, в котором будет располагаться геометрический объект, соответствующий модели процесса. С другой стороны, увеличение количества экспериментов для каждого конкретного фактора приводит к усложнению линейных геометрических объектов (например, увеличению степени полинома в случае использования полиномиальных функций).

Также следует учесть, что в таблице 3.1 используется, если так можно выразиться, «квадратный план». Т.е. для каждого отдельного фактора варьирования количество экспериментов является одинаковым. Тем не менее, в инженерной практике могут встречаться модели, как на «прямоугольном плане», так и на плане более сложной формы. В таком случае нужно рассматривать каждую конкретную модель отдельно, и она будет иметь своё уникальное решение, в зависимости от исходных данных поставленной задачи.

На основании исследований большого количества статистических данных, исследований зарубежных и отечественных учёных в области математического и экспериментально-статистического моделирования физико-механических свойств композиционных строительных материалов, был сделан вывод о том, что количество изменений факторов варьирования равняется трём: «-1», «0» и «+1». С точки зрения геометрического моделирования такие процессы (явления) лучше всего описываются с помощью параболической дуги кривой второго порядка. Тем не менее, на основании приведенных во второй главе исследований, возможно также использование эллиптических и гиперболических дуг, если они более точно характеризуют протекание процесса.

3.1 Геометрическое моделирование зависимости предела прочности при сжатии образцов газобетона после тепловлажностной обработки от напряженности электростатического поля и длительности электрообработки

В соответствии с [112], для оптимизации параметров электростатической активации газобетонной смеси использован метод планирования эксперимента ПФЭ 2^k . Основными факторами, влияющими на эффективность электростатической активации, являются, знак и величина электрического потенциала, подаваемая на форму от внешнего источника высокого напряжения на стадии интенсивного вспучивания. При постановке плана эксперимента исходная область значений напряженности электрического поля была выбрана согласно данным [139], а также по результатам выполненных ранее исследований кинетики структурообразования газобетонных смесей.

Для построения геометрической модели зависимости предела прочности при сжатии образцов газобетона после ТВО от напряженности электростатического поля и длительности электрообработки были проанализированы и реструктурированы исходные данные, полученные в работе [112], и представленные в виде план-матрицы эксперимента, в которой приведены натуральные и кодируемые значения варьируемых факторов (табл. 3.2). Изначально два исследуемых пара-

метра были закодированы факторами варьирования на трех уровнях: -1, 0 и +1. Всего для проведения полного факторного эксперимента была реализована матрица из 9 комбинаций факторов варьирования. Для геометрического моделирования исследуемой зависимости необходимо было перейти от кодированных значений к натуральным значениям и перестроить исходные данные в необходимом для моделирования виде (табл. 3.2).

Таблица 3.2 - План-матрица эксперимента и значения варьируемых факторов

№ п/п	Значение факторов варьирования				Среднее значение параметра оптимизации
	Кодированные		Натуральные		
	Напряженность электростатического поля, Е, кВ/см	Длительность электрообработки, τ, мин	Напряженность электростатического поля, Е, кВ/см	Длительность электрообработки, τ, мин	Предел прочности при сжатии образцов газобетона после ТВО, Rсж, МПа
1	-1	-1	1,0	10	5,06
2	0	-1	1,5	10	5,03
3	+1	-1	2,0	10	4,39
4	-1	0	1,0	20	5,14
5	0	0	1,5	20	6,79
6	+1	0	2,0	20	4,24
7	-1	+1	1,0	30	5,02
8	0	+1	1,5	30	4,46
9	+1	+1	2,0	30	4,26

В данном случае предел прочности при сжатии газобетона зависит от двух факторов: напряженности электростатического поля и длительности электрообработки. С геометрической точки зрения объект, который определяется с помощью двух параметров, является отсеком поверхности, расположенным в трёхмерном пространстве. Для построения такой поверхности воспользуемся методом под-

вижного симплекса [10] и выделим из девяти имеющихся точек, которым соответствуют натуральные значения факторов варьирования и среднее значение параметра оптимизации, три направляющих дуги, которые соответствуют длительности электрообработки 10 мин., 20 мин. и 30 мин. Воспользуемся точечным уравнением дуги параболы второго порядка, проходящей через три наперед заданные точки [11], для параболической интерполяции экспериментальных данных. Выбор параболической интерполяции обусловлен количеством наперед заданных точек дуги кривой и напрямую зависит от количества проведенных экспериментов. Точечные уравнения направляющих дуг, согласованные с помощью параметра u , будут иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} M_{10} &= A_1^{10}\bar{u}(1-2u) + 4A_{1,5}^{10}\bar{u}u + A_2^{10}u(2u-1), \\ M_{20} &= A_1^{20}\bar{u}(1-2u) + 4A_{1,5}^{20}\bar{u}u + A_2^{20}u(2u-1), \\ M_{30} &= A_1^{30}\bar{u}(1-2u) + 4A_{1,5}^{30}\bar{u}u + A_2^{30}u(2u-1), \end{aligned} \quad (3.1)$$

где A_i^j – соответствует среднему значению параметра оптимизации при i -й напряженности электростатического поля и j -й длительности электрообработки, которые принимаются в соответствии с план-матрицей, представленной в таблице 3.2.

По этим направляющим параболическим дугам движется симплекс трёх точек M_{10} , M_{20} и M_{30} , в котором зададим образующую дугу параболы с помощью аналогичного точечного уравнения:

$$M = M_{10}\bar{v}(1-2v) + 4M_{20}\bar{v}v + M_{30}v(2v-1). \quad (3.2)$$

В результате получим последовательность точечных уравнений, зависящих от двух параметров u и v , которые определяют поверхность, проходящую через девять наперед заданных точек. Причём значению параметра u , который меняется в пределах от 0 до 1, соответствует напряженность электростатического поля, изменяющаяся в пределах от 1 кВ/см до 2 кВ/см, а значению параметра v , который также меняется в пределах от 0 до 1, соответствует длительность электрообработки, изменяющаяся от 10 мин. до 30 мин. Для программной реализации, ап-

робации и визуализации предложенной последовательности однотипных точечных уравнений использован программный пакет *Maple* (рис. 3.1).

Следует отметить, что на рисунке 3.1 для корректной геометрической интерпретации поверхности отклика выбран разный масштаб по осям глобальной декартовой системы координат.

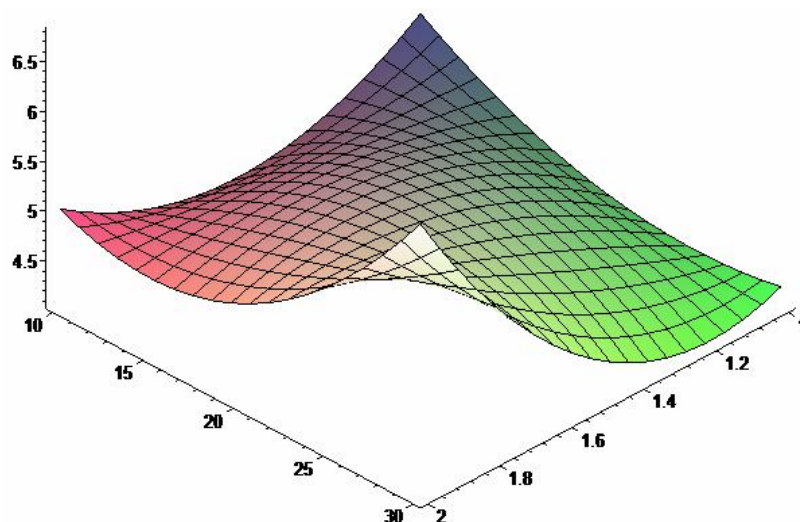


Рисунок 3.1. Графическая визуализация поверхности отклика зависимости предела прочности при сжатии образцов газобетона после ТВО от напряженности электростатического поля и длительности электрообработки

Проанализируем полученные результаты и сравним их с математической моделью, полученной в работе [112]. Результаты анализа приведены в таблице 3.3.

Таблица 3.3 - Сравнительный анализ эффективности математического моделирования зависимости предела прочности при сжатии образцов газобетона после ТВО от напряженности электростатического поля и длительности электрообработки

№ п/п	Напря- женность электро- статиче- ского поля, Е, кВ/см	Длитель- ность электро- обработ- ки, τ, мин	Предел прочности при сжатии образцов газобетона после ТВО, Rсж, МПа			Погрешность, %	
			Нату- ральные значения	Регрес- сионный анализ	Геомет- рическое модели- рование	Регрес- сионный анализ	Геомет- рическое модели- рование
1	-1	-1	5,06	5,119	5,06	1,2	0
2	0	-1	5,03	5,717	5,03	13,7	0
3	+1	-1	4,39	4,387	4,39	0,1	0
4	-1	0	5,14	5,455	5,14	6,1	0
5	0	0	6,79	6,053	6,79	10,9	0
6	+1	0	4,24	4,723	4,24	11,4	0
7	-1	+1	5,02	4,603	5,02	8,3	0
8	0	+1	4,46	5,201	4,46	16,6	0
9	+1	+1	4,26	3,871	4,26	9,1	0

Как видно из таблицы 3.3 регрессионный анализ дал неплохой результат. Его погрешность не превышает 17%. В то же время геометрическое моделирование погрешности не имеет, поскольку все необходимые условия были изначально заложены на стадии формирования поверхности отклика. Также следует отметить, что в работе [112] в процессе моделирования были задействованы не натуральные параметры, а соответствующие им кодированные факторы варьирования, что не даёт возможности осуществить пересчёт результатов моделирования в натуральных параметрах. При этом теряется сам смысл моделирования. Кроме этого в работе [112] приведены номограммы, которые, как утверждает автор, получены

на основе программы «*CurveExpert 1.3*». Результаты, полученные на основе этой программы в работе [112] не приводятся, но приводится расчетный коэффициент корреляции и стандартная ошибка.

ВЫВОДЫ ПО РАЗДЕЛУ 3

1. Сформулирована основная идея геометрического моделирования процессов и явлений в БН-исчислении. Разработаны теоретические основы моделирования процессов и явлений применительно к научной специальности 05.23.05 строительные материалы и изделия, которые позволяют определить необходимое количество экспериментов для построения адекватной геометрической модели процесса.

2. Получена последовательность аналитических зависимостей, определяющих геометрическую модель зависимости предела прочности при сжатии образцов газобетона после ТВО от напряженности электростатического поля и длительности электрообработки, что позволяет использовать полученную модель как средство прогнозирования и дает возможность оптимизировать параметры электростатической активации газобетонной смеси. Кроме этого выполнено сравнение полученной модели с существующими моделями, что подтверждает эффективность применения методов геометрического моделирования при аналитическом описании природных, технических и технологических процессов и явлений.

РАЗДЕЛ 4**ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ОПТИМИЗАЦИЯ СОСТАВА
КОМПОЗИЦИОННЫХ СТРОИТЕЛЬНЫХ МАТЕРИАЛОВ НА ПРИМЕРЕ
КОМБИНИРОВАННОГО ЗАПОЛНИТЕЛЯ МЕЛКОЗЕРНИСТОГО
БЕТОНА**

Физико-механические свойства мелкозернистого бетона, композиционного строительного материала (КСМ), напрямую зависят от его состава. Поэтому оптимизация состава КСМ, является актуальной научной прикладной задачей, которая широко представлена в работах отечественных [139-142, 145] и зарубежных [143, 144, 146, 147] учёных. Вместе с тем возникает вопрос, что понимать под оптимизацией КСМ? С помощью подбора состава КСМ можно добиться повышения качества материала, снижения цены и т.д., но очень часто эти целевые функции оптимизации являются взаимоисключающими. В данной работе предлагается оптимизация состава комбинированного заполнителя мелкозернистого бетона для получения заданных физико-механических эксплуатационных характеристик бетона на основе геометрического моделирования в БН-исчислении [138, 5, 63, 116, 121], с последующим использованием методов математического анализа. Т.о. оптимизация состава определяется таким составом заполнителей, который будет обеспечивать либо минимальную среднюю плотность, либо максимальный предел прочности при сжатии. Оптимизация комбинации целевых функций в данной работе не рассматривается и является перспективным направлением дальнейших исследований авторов.

**4.1 Построение геометрической модели зависимости физико-механических
свойств мелкозернистого бетона от состава комбинированного заполнителя
из отходов промышленности**

Известно, что свойства и технологические показатели мелкозернистого бетона определяются пустотностью заполнителя [113]. Если же этот показатель ос-

тавить неизменным, то характеристика бетона будет зависеть от расхода цемента и воды, а также от структурообразующей роли заполнителя. Как установлено [113], структурообразование смеси заполнителей зависит от кислотно-основных свойств ее ингредиентов. В связи с этим по симплексному плану были изучены зависимости водопотребности и средней плотности бетонной смеси, а также прочности на трехкомпонентной системе заполнителей: шлак мартеновский (МШ) - шлак доменный гранулированный (ГрШ) - горелая порода (ГП). Соотношение заполнитель - цемент М400 6:1. Количество воды подбирали из условия получения бетонной смеси с осадкой конуса 1-4 см. Составы заполнителей и свойства пропаренных бетонов приведены в таблице 4.1.

Таблица 4.1 - Влияние состава заполнителей на свойства мелкозернистого бетона

№ с-ва	Содержание в смеси по массе заполнителей, %			В/Ц	Свойства бетонов	
	МШ	ГрШ	ГП		ρ_0 , кг/м ³	$\sigma_{сж}^{пр}$, МПа
1	0	0	100	0.60	1997	6.4
2	33	0	67	0.66	1939	9.2
3	67	0	33	0.80	1895	6.7
4	100	0	0	0.80	1735	3.8
5	67	33	0	0.80	1691	2.9
6	33	67	0	0.90	1691	2.3
7	0	100	0	0.86	1691	2.1
8	0	67	33	0.76	1910	2.6
9	0	33	67	0.73	1749	6.8
10	33	33	33	0.73	1676	4.1

Данные, полученные в работе [113], показывают, что водопотребность бетонной смеси выше в составах, содержащих доменный гранулированный шлак, который отличается повышенной шероховатостью и открытой пористостью. Для получения подвижной смеси на его основе необходимо увеличение расхода воды

и цемента. При неизменном же соотношении цемент-заполнитель плотность смеси оставалась сравнительно низкой (1691 кг/м³).

В данном случае содержание заполнителей в смеси определяется процентным соотношением и вместе составляет единое целое. Итак, имеем три компонента заполнителя: мартеновский шлак, горелая порода и доменный граншлак, которые составляют единую смесь заполнителя с разным долевым участием. Поскольку суммарное участие всех трёх компонентов всегда составляет 100%, один из компонентов можно исключить. На геометрической схеме (рис. 4.1) в качестве компонентов используется мартеновский шлак и доменный граншлак, что позволяет абсолютно точно определить смесь заполнителя. Далее исключаем лишние комбинации компонентов заполнителя, из условия, чтобы сумма долевого участия всех трёх компонентов всегда была равна 100%. Таким образом, число выполненных экспериментов равно 10 (табл. 4.1). Полученные в результате эксперимента 10 точек распределим следующим образом: первый опорный контур состоит из четырёх точек, второй – из трёх, третий – из двух и четвёртый – из одной точки (рис. 4.1).

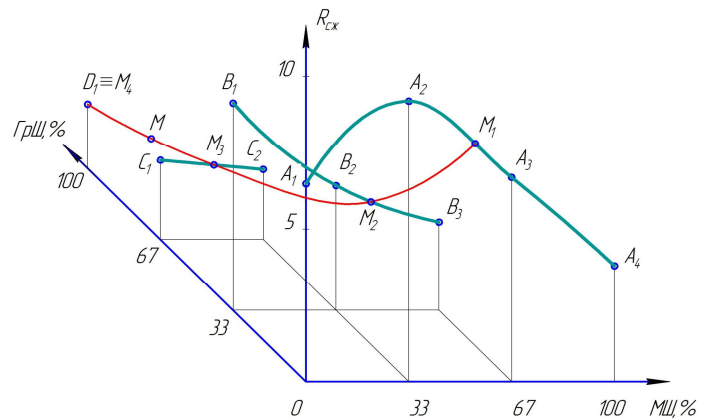


Рисунок 4.1. Геометрическая схема построения модели зависимости мелкозернистого бетона от состава комбинированного заполнителя

Первый опорный контур можно аналитически описать с помощью точечного уравнения дуги кривой третьего порядка, проходящей через четыре наперед заданные точки, которое было получено ранее в [116]. Второй и третий опорные контуры определим соответственно с помощью точечных уравнений параболы [98, 116] и прямой:

$$\begin{aligned}
M_1 &= A_1 [\bar{u}^3 - 2,5\bar{u}^2u + \bar{u}u^2] + A_2 [9\bar{u}^2u - 4,5\bar{u}u^2] + \\
&+ A_3 [-4,5\bar{u}^2u + 9\bar{u}u^2] + A_4 [\bar{u}^2u - 2,5\bar{u}u^2 + u^3]. \\
M_2 &= B_1\bar{u}(1-2u) + 4B_2\bar{u}u + B_3u(2u-1). \\
M_3 &= C_1\bar{u} + C_2u.
\end{aligned} \tag{4.1}$$

Образующую такой поверхности определим с помощью следующего точечного уравнения:

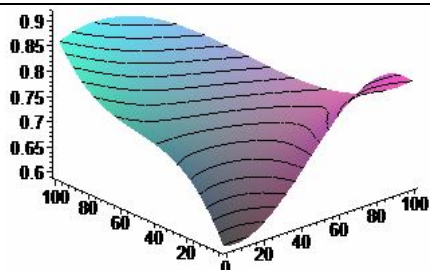
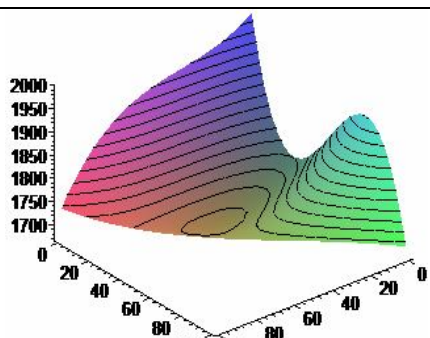
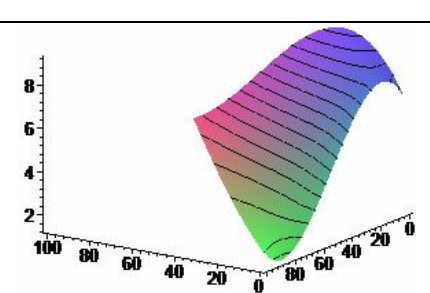
$$\begin{aligned}
M &= M_1 [\bar{v}^3 - 2,5\bar{v}^2v + \bar{v}v^2] + M_2 [9\bar{v}^2v - 4,5\bar{v}v^2] + \\
&+ M_3 [-4,5\bar{v}^2v + 9\bar{v}v^2] + M_4 [\bar{v}^2v - 2,5\bar{v}v^2 + v^3].
\end{aligned} \tag{4.2}$$

В итоге получен вычислительный алгоритм построения поверхности отклика для определения физико-механических свойств мелкозернистого бетона от состава комбинированного заполнителя, который можно записать в виде следующего точечного уравнения:

$$\begin{aligned}
M &= \left(A_1 [\bar{u}^3 - 2,5\bar{u}^2u + \bar{u}u^2] + A_2 [9\bar{u}^2u - 4,5\bar{u}u^2] + \right. \\
&\left. + A_3 [-4,5\bar{u}^2u + 9\bar{u}u^2] + A_4 [\bar{u}^2u - 2,5\bar{u}u^2 + u^3] \right) \times [\bar{v}^3 - 2,5\bar{v}^2v + \bar{v}v^2] + \\
&+ (B_1\bar{u}(1-2u) + 4B_2\bar{u}u + B_3u(2u-1)) \times [9\bar{v}^2v - 4,5\bar{v}v^2] + \\
&+ (C_1\bar{u} + C_2u) [-4,5\bar{v}^2v + 9\bar{v}v^2] + D_1 [\bar{v}^2v - 2,5\bar{v}v^2 + v^3].
\end{aligned} \tag{4.3}$$

В данном случае точечное уравнение (4.3) соответствует геометрической схеме конструирования поверхности отклика и является универсальным по отношению к исходным данным для моделирования, приведенным в таблице 4.1. Подставляя поочерёдно в уравнение (4.3) отношение В/Ц, значения средней плотности бетона и предела прочности при сжатии, получим три геометрических модели, графическая визуализация которых приведена в таблице 4.2.

Таблица 4.2 - Геометрическое моделирование физико-механических свойств мелкозернистого бетона в зависимости от состава комбинированного заполнителя

№ п/п	Физико- механические свой- ства бетона	Графическая визуализация
1	В/Ц	
2	ρ_o , кг/м ³	
3	$\sigma_{сж}^{пр}$, МПа	

Во всех трёх случаях для более наглядного изображения результатов, масштаб по оси z был утрирован и не совпадает с масштабом по осям x и y .

4.2 Оптимизация состава комбинированного заполнителя на основе геометрической модели зависимости физико-механических свойств мелкозернистого бетона

Исследуем полученные отсеки поверхности на наибольшее и наименьшее значение в соответствии с необходимыми физико-механическими свойствами мелкозернистого бетона. Для этого на основе уравнения (4.3) составим систему

уравнений с частными производными для проекции соответствующего отсека поверхности на ось z .

$$\begin{cases} (z_M)'_U = 0; \\ (z_M)'_V = 0. \end{cases} \quad (4.4)$$

Решая эту систему уравнений, получим некоторое количество комбинаций действительных и мнимых пар корней. Из этой выборки пар корней системы уравнений нужно отобрать те, которые соответствуют интервалу значений параметров u и v от 0 до 1. В результате получаем одну или две комбинации параметров u и v , простой подстановкой которых, определяем минимум и максимум отсека поверхности.

Далее необходимо исследовать границы области определения отсека поверхности, которые определяются тремя дугами кривых. Это можно сделать достаточно легко воспользовавшись графической визуализацией поверхности отклика, приведенной в таблице 2, с последующим исследованием необходимой дуги кривой на экстремумы. Для автоматизации процесса исследования использован программный пакет *Maple*. Результаты приведены в таблице 4.3.

Таблица 4.3 - Оптимизация физико-механических свойств мелкозернистого бетона в зависимости от состава комбинированного заполнителя

№ п/п	Физико-механические свойства бетона	Категория значений	Значение целевой функции*	Содержание в смеси заполнителей, %		
				МШ	ГрШ	ГП
1	В/Ц	Min	0,59	0,064	0	99,936
		Max	0,91	81	19	0
2	$\rho_{об}, \text{кг/м}^3$	Min	1671	44,1	31,6	24,3
		Max	1997	0	0	100
3	$\sigma_{сж}^{пр}, \text{МПа}$	Min	1,32	0	86,7	13,3
		Max	9,24	29,4	0	70,6

*Под целевой функцией в данном случае понимается конкретное физико-механическое свойство мелкозернистого бетона, которое соответствует оси z декартовой системы координат (табл. 4.2).

Как видно из анализа экспериментальной информации, обработанной методами геометрического моделирования с последующим применением математического анализа (табл. 4.3), минимальная плотность, а соответственно и минимальная масса мелкозернистого бетона, достигается при следующем соотношении между заполнителем с различными кислотно-основными свойствами: мартеновский шлак (44,1%), доменный граншлак (31,6%) и горелая порода (24,3%). Таким образом, при средней плотности бетона 1671 кг/м^3 предел прочности при сжатии 3,7 МПа. С другой стороны, максимальный предел прочности при сжатии 9,24 МПа при средней плотности 1691 кг/м^3 достигается при следующем составе заполнителей: мартеновский шлак (29,4%) и горелая порода (70,6%). Таким образом, оптимальным, в данном случае, можно считать состав заполнителя: мартеновский шлак (29,4%) и горелая порода (70,6%), который даёт максимальный предел прочности при сжатии и при этом достаточно небольшую плотность бетона. Для автоматизации поиска более оптимальных решений необходимо введение весовых коэффициентов, соответствующих «важности» той или иной целевой функции, что является перспективным направлением дальнейших исследований.

ВЫВОДЫ ПО РАЗДЕЛУ 4

1. Разработан геометрический алгоритм и аналитические зависимости, которые определяют поверхность отклика, описывающую физическое состояние мелкозернистого бетона в зависимости от долевого участия компонентов в составе комбинированного заполнителя из техногенного сырья, что является основой для последующей оптимизации состава заполнителей и получения проектируемых физико-механических свойств мелкозернистого бетона.

2. На основе предложенной методики обработки и анализа экспериментально-статистической информации, получен состав комбинированного заполнителя из отходов промышленности, который является оптимальным для соответствующей целевой функции оптимизации, которая отвечает конкретному физико-механическому свойству мелкозернистого бетона. Установлено, что заполнитель в составе: мартеновский шлак (29,4%) + горелая порода (70,6%), даёт максимальный предел прочности при сжатии 9,24 МПа и при этом достаточно небольшую плотность бетона 1691 кг/м³.

РАЗДЕЛ 5**ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ФИЗИКО-МЕХАНИЧЕСКИХ СВОЙСТВ КОМПОЗИЦИОННЫХ СТРОИТЕЛЬНЫХ МАТЕРИАЛОВ****5.1 Геометрическая модель зависимости средней плотности и прочности цементно-песчаной матрицы от содержания химических добавок**

В работе [114] было установлено, что газообразователь в газобетонах образует сравнительно крупную ячеистую пористость, практически не влияя на капиллярную и гелевую пористость межпоровых бетонных перегородок (бетонной матрицы). Поэтому физико-механические свойства бетонной матрицы определяют свойства ячеистого бетона и одним из основных направлений формирования оптимальной структуры газобетонов является получение бетонной матрицы с максимально возможными прочностью и плотностью, низкими показателями открытой пористости и влажностных деформаций [11, 87]. Учитывая это, а также значительное влияние добавок лигносульфоната натрия (ЛСТ) и гидроксида натрия (NaOH) на процесс образования ячеистой структуры, сложность получения газобетонов с точно воспроизводимой средней плотностью подробные исследования влияния добавок на прочность, пористость и влажностные деформации выполнены именно на непоризованных бетонных матрицах.

Результаты исследования влияния количества добавок и условий твердения на среднюю плотность и прочность образцов бетонной матрицы приведены в табл. 5.1.

Таблица 5.1 - Влияние добавок ЛСТ и NaOH на среднюю плотность и прочность цементно-песчаной матрицы

Расход добавок в % от массы цемента		Средняя плотность, кг/м ³ , после			Предел прочности при сжа- тии, МПа, после		
ЛСТ	NaOH	28 суток н.т.*	пропа- ривания	авто- клави- рования	28 суток н.т.	пропа- ривания	авто- клави- рования
Эталон с 15% из- вести		1230	1230	1235	15,2	11,4	31,7
0	0	1265	1260	1270	19,6	15,2	30,4
0,15	0	1355	1350	1375	22,5	17,8	35,0
0,30	0	1390	1390	1420	25,4	20,2	38,4
0,60	0	1430	1435	1465	18,6	19,8	40,6
0	0,15	1270	1265	1285	21,6	16,8	34,4
0,15	0,15	1380	1375	1400	24,1	19,2	38,5
0,30	0,15	1430	1430	1455	27,4	22,0	42,3
0,60	0,15	1480	1490	1515	23,8	20,2	42,2
0	0,30	1295	1290	1315	20,8	18,4	39,4
0,15	0,30	1385	1390	1410	25,6	21,0	42,7
0,30	0,30	1460	1460	1485	28,4	24,2	44,8
0,60	0,30	1510	1520	1550	30,2	26,0	49,2
0	0,60	1320	1320	1340	14,0	13,4	32,1
0,15	0,60	1405	1405	1430	15,6	12,8	31,6
0,30	0,60	1475	1480	1505	19,2	14,8	35,3
0,60	0,60	1550	1560	1580	21,7	16,3	38,7

*Примечание. Н.Т. – нормальное твердение.

Определим геометрическую модель зависимости средней плотности и прочности цементно-песчаной матрицы от добавок ЛСТ и NaOH, аналогично разделу 3. Отличительной особенностью этой модели является то, что вместо трёх факто-

ров варьирования в данном случае используется четыре. В предыдущих работах для построения подобной модели методами регрессионного анализа было сделано упрощение, которое заключается в уменьшении количества факторов варьирования до трёх. Для построения геометрической модели искомой зависимости в упрощениях необходимости нет, что является её бесспорным преимуществом.

Составим геометрическую схему (рис. 5.1) моделирования зависимости средней плотности и прочности цементно-песчаной матрицы от добавок ЛСТ и NaOH в соответствии с план матрицей эксперимента (табл. 5.1). В данном случае на рисунке 5.1 показана геометрическая схема зависимости средней плотности после 28 суток нормального твердения. Предложенная модель является универсальной и для других физико-механических свойств бетонной матрицы ячеистого бетона, меняются только исходные данные, приведенные в таблице 5.1.

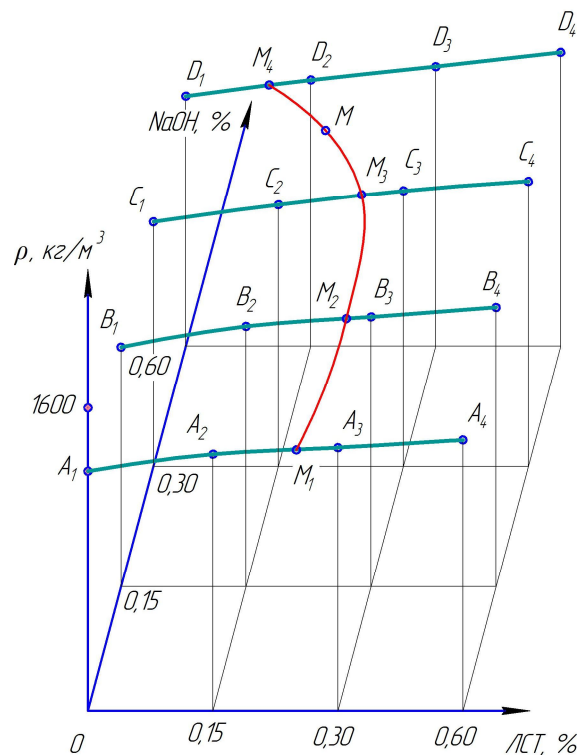


Рисунок 5.1. Геометрическая схема моделирования зависимости средней плотности и прочности цементно-песчаной матрицы от концентрации добавок

В соответствии с точечным уравнением дуги кривой 3-го порядка, проходящей через 4 наперед заданные точки, которая была получена во втором разделе на основе полиномов Бернштейна, определены четыре опорных контура будущего отсека поверхности.

Отметим, что точечным уравнением (5.1) описывается первый из четырех опорных контуров с помощью параметра u . Остальные уравнения имеют аналогичную структуру, меняются только точки, которые соответствуют факторам варьирования план-матрицы эксперимента.

$$\begin{aligned}
 M_1 &= A_1 [\bar{u}^3 - 2,5\bar{u}^2u + \bar{u}u^2] + A_2 [9\bar{u}^2u - 4,5\bar{u}u^2] + \\
 &+ A_3 [-4,5\bar{u}^2u + 9\bar{u}u^2] + A_4 [\bar{u}^2u - 2,5\bar{u}u^2 + u^3]. \\
 M_2 &= B_1 [\bar{u}^3 - 2,5\bar{u}^2u + \bar{u}u^2] + B_2 [9\bar{u}^2u - 4,5\bar{u}u^2] + \\
 &+ B_3 [-4,5\bar{u}^2u + 9\bar{u}u^2] + B_4 [\bar{u}^2u - 2,5\bar{u}u^2 + u^3]. \\
 M_3 &= C_1 [\bar{u}^3 - 2,5\bar{u}^2u + \bar{u}u^2] + C_2 [9\bar{u}^2u - 4,5\bar{u}u^2] + \\
 &+ C_3 [-4,5\bar{u}^2u + 9\bar{u}u^2] + C_4 [\bar{u}^2u - 2,5\bar{u}u^2 + u^3]. \\
 M_4 &= D_1 [\bar{u}^3 - 2,5\bar{u}^2u + \bar{u}u^2] + D_2 [9\bar{u}^2u - 4,5\bar{u}u^2] + \\
 &+ D_3 [-4,5\bar{u}^2u + 9\bar{u}u^2] + D_4 [\bar{u}^2u - 2,5\bar{u}u^2 + u^3].
 \end{aligned} \tag{5.1}$$

Аналогичным образом, определена образующая поверхности с помощью параметра v :

$$\begin{aligned}
 M &= M_1 [\bar{v}^3 - 2,5\bar{v}^2v + \bar{v}v^2] + M_2 [9\bar{v}^2v - 4,5\bar{v}v^2] + \\
 &+ M_3 [-4,5\bar{v}^2v + 9\bar{v}v^2] + M_4 [\bar{v}^2v - 2,5\bar{v}v^2 + v^3].
 \end{aligned} \tag{5.2}$$

5.2 Геометрическое моделирование физико-механических свойств дегтеполимербетона

Структурно-механические свойства дегтеполимербетона, исходя из условий работы его в конструктивных слоях покрытия нежесткой дорожной одежды автомобильных дорог, должны обеспечивать сдвигоустойчивость при высоких положительных и трещиностойкость - при отрицательных температурах, водо-, морозо-, атмосферо- и износостойкость, выносливость, а также расчетные значения модуля упругости и предела прочности на изгиб при растяжении покрытия автомобильной дороги [110, 109, 111].

Повышение долговечности дегтеполимербетона для работы в условиях интенсивного и грузонапряженного движения при воздействии агрессивных факторов окружающей среды возможно при создании структуры дегтеполимербетона, которая рационально сочетает наиболее плотную упаковку полидисперсных частиц минерального остова (микроструктура плавно переходит в мезоструктуру, а затем в макроструктуру) и непрерывную пространственную сетку эластичного вяжущего с высокими значениями адгезии и когезии при минимально возможной толщине асфальтовяжущего вещества. Важнейшей составляющей структуры долговечного дегтеполимербетона является контактная зона - зона взаимодействия органического вяжущего с поверхностью минеральных материалов. Поэтому интенсификация процессов взаимодействия на поверхности раздела фаз «битумополимерное вяжущее - минеральный порошок» позволит значительно повысить физико-механические свойства. Таким образом, в дегтеполимербетоне необходимо создать устойчивый пространственный минеральный каркас, деформационно-релаксирующее с высокими адгезионно-когезийными свойствами асфальтовяжущее вещество, а объем остаточных пор в бетоне должен быть минимальным.

Для определения оптимального состава дегтеполимербетона, который соответствует высоким физико-механическим показателям, в работах [119, 123, 138] выполнен ряд исследований, которые можно классифицировать следующим образом:

1. Оптимизированны составы системы «каменноугольный дорожный деготь-отсев поливинилхлорида – активатор на поверхности минерального порошка».

При оптимизации состава комплексно модифицированного дегтевяжущего вещества изучали влияние на физико-механические свойства: времени механохимической активации минерального порошка в среде олигомера; массовой концентрации олигомера на поверхности минерального порошка; оптимального сочетания компонентов в системе каменноугольное вяжущее - отсев поливинилхлорида - модификатор на поверхности минерального порошка, на примере КФ-МТ (карбамидоформальдегидной смолы).

2. Изучение поверхностных явлений и процессов в системе «дегтеполивинилхлоридное вяжущее - активированный минеральный порошок».

Модифицированный дегтеполимербетон - это не просто комбинация составляющих компонентов. Он имеет только ему присущие свойства. Эти свойства можно регулировать изменением адгезии между дегтеполивинилхлоридным вяжущим и минеральными материалами, заменой того или иного компонента. Адгезия между минеральными материалами и дегтеполимерным вяжущим - это из главных условий для получения композиционного материала с заданным комплексом свойств. Адгезия способствует уплотнению матрицы вследствие образования более плотных слоев на поверхности раздела фаз. Это обеспечивает передачу нагрузок от одной фазы к другой, в результате чего она равномерно распределяется между фазами.

3. Исследование уплотнения дегтеполимербетонных смесей с комплексно модифицированной микроструктурой.

Формирование структуры дегтеполимербетона с комплексно модифицированной микроструктурой начинается с момента объединения минеральных материалов с дегтеполивинилхлоридным вяжущим и завершается при уплотнении уплотняющими средствами и затем автомобильным транспортом. Уплотнение дегтеполимербетонных смесей приводит к сближению минеральных зерен, формированию микроструктурных связей и макроструктуры и обеспечению максимальной плотности.

4. Деформационно-прочностные свойства.

Рассмотрение комплексной модификации микроструктуры дегтеполимербетона на их свойства по сравнению с традиционными [111] показывает, что модификация приводит к повышению плотности и длительной водостойкости дегтеполимербетона, снижения температурной чувствительности механических свойств модифицированных систем по сравнению с горячими дегтебетонами.

5. Атмосферная стойкость дегтеполимербетона с комплексно модифицированной микроструктурой.

Проверялась атмосферная устойчивость дегтеполимербетонов в климатической камере ИП-1. Температура прогрева образцов мелкозернистого дегтеполимербетона составляла 60°C. Образцы подвергались также ультрафиолетовому облучению. В качестве показателя, характеризующего изменение свойств дегтеполимербетона, принят предел прочности при сжатии при 20°C.

Основными контрольными испытаниями дегтеполивинилхлоридного вяжущего (ДПВ) являются: условная вязкость; температуры размягчения и хрупкости; растяжимость и эластичность при 0°C.

Теоретико-экспериментальное изучение свойств модифицированных дегтеполимербетонных смесей и опыт их внедрения определили оптимальные области применения - устройство верхних и нижних слоев дорожных одежд автомобильных дорог II и III категорий.

В результате выполненных исследований получены следующие экспериментальные данные, приведенные в таблицах 5.2 и 5.3, на основе которых были разработаны две геометрические модели зависимости физико-механических свойств асфальтополимербетона от его состава.

Использование первой геометрической модели [117] предлагается при проектировании модифицированных дегтеполимербетонов, для которых большое значение имеет зависимость предела прочности при сжатии от температуры дегтеполимербетона. Анализ этой зависимости позволяет определить необходимое количество модификаторов, а следовательно и состав дегтеполимербетона, от чего зависят его качество и цена. Экспериментальные исследования предела прочности при сжатии дегтеполимербетона выполнены при температуре 0°C, 20°C и 50°C. Но часто на практике возникает необходимость определения свойств дегтеполимербетона при использовании его в других температурных режимах. Во время исследований, совместно с аспирантами кафедры «Автомобильные дороги и аэродромы» Донбасской национальной академии строительства и архитектуры, автором были экспериментально определены следующие физико-механические свойства дегтеполимербетона (табл. 4.1).

Расшифруем некоторые сокращения, которые были использованы в таблице 4.1: ПВХ – поливинилхлорид; МП – модификатор поверхности минерального порошка; КФ-МТ – карбамид-формальдегидная малотоксичная смола.

Таблица 5.2 - Физико-механические свойства дегтеполимербетона

№ п/п	Состав дегтевяжущего вещества в мелкозернистом бетоне (тип В)	Предел прочности при сжатии, МПа, при		
		0°C	20°C	50°C
1	Деготь, $C_{30}^{10} = 195$ с 1,5% ПВХ; МП – доломитовая пыль не активированная	6,0	2,0	0,6
2	Деготь, $C_{30}^{10} = 195$ с 1,5% ПВХ; МП – доломитовая пыль активированная 0,5% КФ-МТ	8,0	3,3	0,9
3	Деготь, $C_{30}^{10} = 195$ с 1,5% ПВХ; МП – доломитовая пыль активированная 1% КФ-МТ	9,0	3,8	1,2
4	Деготь, $C_{30}^{10} = 195$ с 1,5% ПВХ; МП – доломитовая пыль активированная 2% КФ-МТ	8,6	3,3	1,0
5	Деготь, $C_{30}^{10} = 195$ с 1,5% ПВХ; МП – доломитовая пыль активированная 4% КФ-МТ	7,3	3,0	0,9

Рассмотрим геометрическую схему моделирования физико-механических свойств дегтеполимербетона (рис. 5.2). Поскольку графическая визуализация математической модели будет выполняться в программном пакете *Maple*, определим математическую модель в глобальной декартовой системе координат, которая

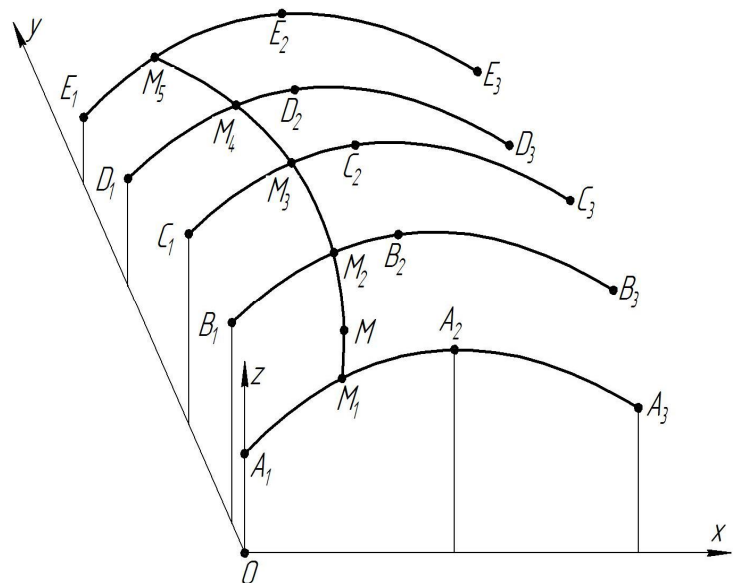


Рисунок 5.2. Геометрическая схема моделирования физико-механических свойств дегтеполимербетона

определяется симплексом пространства $OE_1E_2E_3$. Установим соответствие между осями декартовой системы координат (рис. 5.2) и физико-механическими свойствами дегтеполимербетона (табл. 5.2). Пусть оси Ox декартовой системы координат будет соответствовать температура дегтеполимербетона; оси Oy – концентрация карбомидоформальдегидной смолы (КФ-МТ), которая является модификатором поверхности минерального порошка дегтеполимербетона; оси Oz – предел прочности при сжатии.

С геометрической точки зрения модель, которая графически отображает физико-механические свойства дегтеполимербетона, является отсеком поверхности, которая определяется пятью опорными линиями: $A_1A_2A_3$, $B_1B_2B_3$, $C_1C_2C_3$, $D_1D_2D_3$ и $E_1E_2E_3$. Определим эти линии точечными уравнениями, как дуги парабол 2-го порядка. Для линии $A_1A_2A_3$ точечное уравнение дуги параболы 2-го порядка имеет следующий вид:

$$M_1 = A_1\bar{u}(1-2u) + 4A_2\bar{u}u + A_3u(2u-1), \quad (5.3)$$

где $0 \leq u \leq 1$; $\bar{u} = 1 - u$.

Для других опорных линий точечные уравнения будут аналогичными уравнению (5.3) и также определяться параметром u . Образующую линию отсека поверхности, которая отражает физико-механические свойства дегтеполимербетона, представим как дугу кривой, проходящей через пять точек: M_1 , M_2 , M_3 , M_4 и M_5 , точечное уравнение которой было получено во втором разделе:

$$\begin{aligned} M = M_1 \left(\bar{v}^4 - \frac{13}{3}\bar{v}^3v + \frac{13}{3}\bar{v}^2v^2 - \bar{v}v^3 \right) + M_2 \left(16\bar{v}^3v - \frac{64}{3}\bar{v}^2v^2 + \frac{16}{3}\bar{v}v^3 \right) + \\ + M_3 \left(-12\bar{v}^3v + 40\bar{v}^2v^2 - 12\bar{v}v^3 \right) + M_4 \left(\frac{16}{3}\bar{v}^3v - \frac{64}{3}\bar{v}^2v^2 + 16\bar{v}v^3 \right) + \\ + M_5 \left(-\bar{v}^3v + \frac{13}{3}\bar{v}^2v^2 - \frac{13}{3}\bar{v}v^3 + v^4 \right). \end{aligned} \quad (5.4)$$

Учитывая все вышесказанное, получим расчетный алгоритм построения геометрической модели физико-механических свойств дегтеполимербетона:

1. Вводим все необходимые исходные данные из таблицы 5.2.

2. Определяем опорные линии $A_1A_2A_3$, $B_1B_2B_3$, $C_1C_2C_3$, $D_1D_2D_3$ и $E_1E_2E_3$ в соответствии с уравнением (5.3).

3. С помощью уравнения (5.4) определяем текущую точку сегмента поверхности, которая графически отображает физико-механические свойства дегтеполимербетона.

Воспользуемся программным пакетом *Maple* для визуализации полученной геометрической модели физико-механических свойств дегтеполимербетона (рис. 5.3). Листинг программы визуализации приведен в приложении В.1.

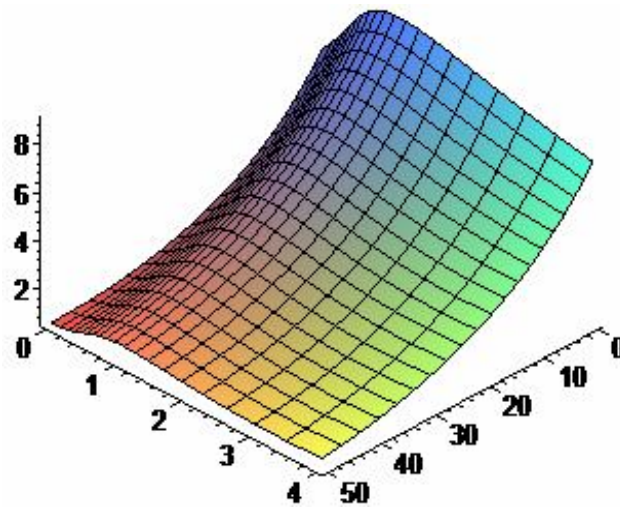


Рисунок 5.3. Визуализация геометрической модели физико-механических свойств дегтеполимербетона

5.3 Геометрическая модель зависимости предела прочности при сжатии от четырех факторов

Вторая, предложенная в диссертационной работе, геометрическая модель [121,122] построена на основе экспериментальных данных (табл. 5.3) зависимости предела прочности при сжатии от четырех факторов: вязкости дегтя – C_{30}^{10} , концентрации отсева поливинилхлорида в каменноугольном дорожном дегте – $C_m^{ПВХ}$, концентрации активатора на поверхности минерального порошка – $\tilde{N}_m^{\hat{E}\hat{I} - \hat{i} \hat{o}}$ и температуры образцов мелкозернистого дегтеполимербетона.

Таблица 5.3 - Экспериментальные данные зависимости предела прочности при сжатии от четырех факторов

№ п/п	C_{30}^{10}, c	$C_m, \%$ ПВХ	$C_m, \%$ КМ-МТ	$R_0,$ МПа	$R_{20},$ МПа	$R_{50},$ МПа
1	2	3	4	5	6	7
1	52	0,5	0	4,9	1,8	0,5
2	52	0,5	0,5	5,6	2,0	0,6
3	52	0,5	1,0	5,8	2,4	0,8
4	52	1,25	0	5,5	2,9	1,0
5	52	1,25	0,5	5,3	2,7	0,95
6	52	1,25	1,0	6,0	3,0	1,2
7	52	2,0	0	5,6	2,2	0,7
8	52	2,0	0,5	6,0	3,0	0,8
9	52	2,0	1,0	7,3	2,9	1,0
10	130	0,5	0	7,3	3,0	1,1
11	130	0,5	0,5	7,5	3,1	1,0
12	130	0,5	1,0	7,6	3,2	1,0
13	130	1,25	0	7,3	2,9	0,9
14	130	1,25	0,5	10,0	4,0	1,3
15	130	1,25	1,0	8,6	3,8	1,2
16	130	2,0	0	9,8	4,1	1,0
17	130	2,0	0,5	11,0	5,1	1,4
18	130	2,0	1,0	10,2	4,9	1,3
19	208	0,5	0	7,1	3,0	0,9
20	208	0,5	0,5	8,0	3,5	1,2
21	208	0,5	1,0	9,2	3,8	1,3
22	208	1,25	0	8,7	4,3	1,3
23	208	1,25	0,5	9,7	4,5	1,5
24	208	1,25	1,0	10,2	4,9	1,6

Продолжение таблицы 5.3

1	2	3	4	5	6	7
25	208	2,0	0	9,2	3,8	1,2
26	208	2,0	0,5	10,1	4,2	1,5
27	208	2,0	1,0	12,0	5,4	1,6

Как видно из таблицы 5.3 предел прочности при сжатии был определен при температурах $0^{\circ}\text{C} - R_0$, при $20^{\circ}\text{C} - R_{20}$ и при $50^{\circ}\text{C} - R_{50}$.

Здесь следует остановиться на существующей матрице планирования эксперимента. Дело в том, что при использовании регрессионного анализа значения факторов варьирования кодируется тремя значениями: -1, 0 и +1. С геометрической точки зрения, если речь идёт об однопараметрическом объекте, который соответствует однопараметрическому процессу, то задача сводится к определению дуги кривой проходящей через три точки. Точечные уравнения таких дуг, были исследованы автором во второй главе. Они позволяют интерполировать эти три точки с помощью параболической дуги кривой, что достаточно точно соответствует характеру протекания процесса.

Если планируется провести эксперимент с изменением двух факторов, то кодируемых факторов варьирования будет 6: 3 для одного фактора и три для второго, а их комбинаций – 9. Т.е. геометрически задача сводится к определению отсечка поверхности, которая проходит через 9 точек и определяется двумя параметрами. Обобщая такой подход, получим необходимое количество экспериментальных данных: для трёхпараметрического эксперимента – 27 и т.д.

Поскольку в данном случае исследуется зависимость физико-механических свойств мелкозернистого дегтеполимербетона от четырех факторов, то количество таких экспериментов должно быть 81.

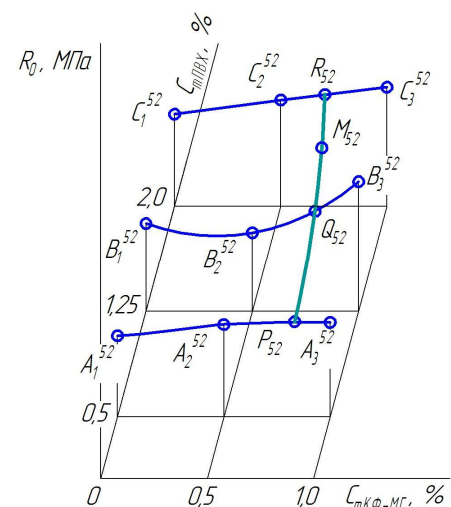


Рисунок 5.4. Установление зависимости двух факторов

Для лучшего понимания построения математической модели процесса определения предела прочности при сжатии, представим геометрическую модель, которая зависит от четырех факторов, в виде трех этапов. Во-первых, установим зависимость предела прочности при сжатии от концентрации активатора на поверхности минерального порошка и концентрации отсева поливинилхлорида в органическом вяжущем при температуре 0°C (рис. 5.4). Поскольку количество точек опорных и образующих дуг равно трем, используем для геометрического моделирования точечное уравнение дуги параболы (5.3), которая проходит через три точки. Полученный отсек поверхности фактически является поверхностью типа «лупа» и выражается следующей последовательностью аналитических зависимостей в виде точечных уравнений:

$$\begin{cases} P_{52} = A_1^{52}\bar{u}(1-2u) + 4A_2^{52}\bar{u}u + A_3^{52}u(2u-1), \\ Q_{52} = B_1^{52}\bar{u}(1-2u) + 4B_2^{52}\bar{u}u + B_3^{52}u(2u-1), \\ R_{52} = C_1^{52}\bar{u}(1-2u) + 4C_2^{52}\bar{u}u + C_3^{52}u(2u-1), \\ M_{52} = P_{52}\bar{v}(1-2v) + 4Q_{52}\bar{v}v + R_{52}v(2v-1). \end{cases} \quad (5.5)$$

Во-вторых, установим соответствие между предыдущими двумя факторами это: концентрация отсева поливинилхлорида в органическом вяжущем (C_m^{PBX}) и концентрация активатора на поверхности минерального порошка ($\tilde{N}_m^{\dot{E}i-i\dot{O}}$), и третьим фактором – вязкостью дегтя. Для этого необходимо трижды построить поверхность типа «лупа» при вязкости дегтя 52, 130 и 208 при температуре 0°C (рис. 5.5), трижды используя последовательность точечных уравнений (5.3).

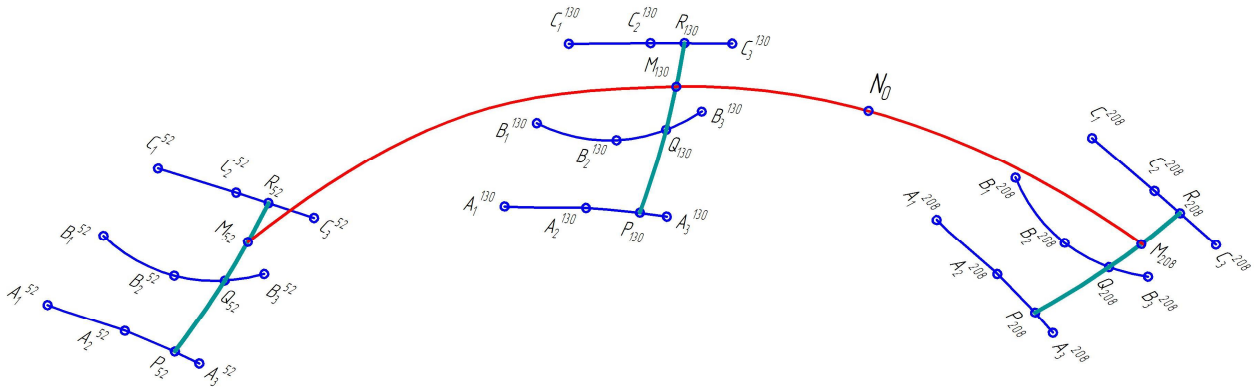


Рисунок 5.5. Установление зависимости трех факторов

Из геометрической схемы (рис. 5.5) видно, что опорными контурами отсека гиперповерхности есть образующие дуги трех отсеков поверхности типа «лупа». Поскольку количество опорных контуров равно трем, используем в качестве образующей отсека гиперповерхности дугу параболы 2-го порядка, которая будет проходить через 3 точки, образуя гиперповерхности типа «гиперлупа»:

$$\begin{cases} M_{52} = P_{52} \bar{v}(1 - 2v) + 4Q_{52} \bar{v}v + R_{52} v(2v - 1), \\ M_{130} = P_{130} \bar{v}(1 - 2v) + 4Q_{130} \bar{v}v + R_{130} v(2v - 1), \\ M_{208} = P_{208} \bar{v}(1 - 2v) + 4Q_{208} \bar{v}v + R_{208} v(2v - 1), \\ N_0 = M_{52}^0 \bar{w}(1 - 2w) + 4M_{130}^0 \bar{w}w + M_{208}^0 w(2w - 1). \end{cases} \quad (5.6)$$

В-третьих, установим зависимость между четвертым фактором с предыдущими тремя. Для этого нужно трижды использовать полученную ранее гиперповерхность типа «гиперлупа» при температурах 0°C, 20°C и 50°C (рис. 5.6). В данном случае опорными контурами будут три образующие гиперповерхности, а образующей – дуга параболы 2-го порядка, проходящей через три точки. Эта последовательность аналитических зависимостей представлена точечными уравнениями в (5.7).

$$\begin{cases} N_0 = M_{52}^0 \bar{w}(1 - 2w) + 4M_{130}^0 \bar{w}w + M_{208}^0 w(2w - 1), \\ N_{20} = M_{52}^{20} \bar{w}(1 - 2w) + 4M_{130}^{20} \bar{w}w + M_{208}^{20} w(2w - 1), \\ N_{50} = M_{52}^{50} \bar{w}(1 - 2w) + 4M_{130}^{50} \bar{w}w + M_{208}^{50} w(2w - 1), \\ T = N_0 \bar{w}(1 - 2w) + 4N_{20} \bar{w}w + N_{50} w(2w - 1). \end{cases} \quad (5.7)$$

Таким образом, имеем расчетный алгоритм (в виде последовательностей точечных уравнений) математической модели зависимости предела прочности при сжатии от концентрации активатора на поверхности минерального порошка, концентрации отсева поливинилхлорида в органическом вяжущем, вязкости дегтя и температуры испытания.

Как видно из последовательностей точечных уравнений (5.5), (5.6) и (5.7), все тройки точек увязаны с помощью однотипного уравнения дуги параболы 2-го порядка, что облегчает программирование такого расчетного алгоритма. В диссертационной работе была разработана программная реализация предложенной ма-

тематической модели в программном пакете *Maple* для расчета предела прочности при сжатии в зависимости от четырех переменных факторов, которая приведена в приложении В.2. Все необходимые исходные данные для программирования приведены в таблице 5.3. Также по результатам этих исследований был получен акт внедрения в производство ООО ГАК «Автомобильные дороги Украины».

Предложенные математические модели являются примером использования математического аппарата БН-исчисления для моделирования многопараметрических явлений и процессов. В данном случае использовались те исходные данные, которые были получены в практике проектирования асфальтобетонных дорожных покрытий. Аналогичным образом количество увязанных между собой факторов может быть больше, чем четыре.

Следует отметить, что предложенный выше расчетный алгоритм состоит из точечных уравнений, которые, по сути, являются символьной записью, а для перехода к системе параметрических уравнений нужно сделать покоординатный расчет точек (подраздел 1.3 первого раздела). Но, как видно из рисунка 1.3 первого раздела при параллельном проецировании, если одна из трех координат трехмерного пространства равна нулю, то получим проекцию геометрического объекта на одну из плоскостей проекций, а если две из трех координат трехмерного пространства равны нулю, то получим проекцию - на одну из осей проекций прямоугольной декартовой системы. Обобщая эту логическую последовательность, можно сделать вывод, что для определения любой из характеристик процесса, используя особые уравнения БН-исчисления, достаточно произвести расчет только по необходимой характеристике, то есть по одной координате многомерной системы координат. Например, если нужно определить предел прочности при сжатии R_0 мелкозернистого дегтеполимербетона, то нет смысла делать покоординатный расчет для всех пяти координат пятимерного пространства, к которому принадлежит геометрическая модель процесса (рис. 5.6), достаточно сделать расчет только по одной координате, которая характеризует предел прочности при сжатии R_0 .

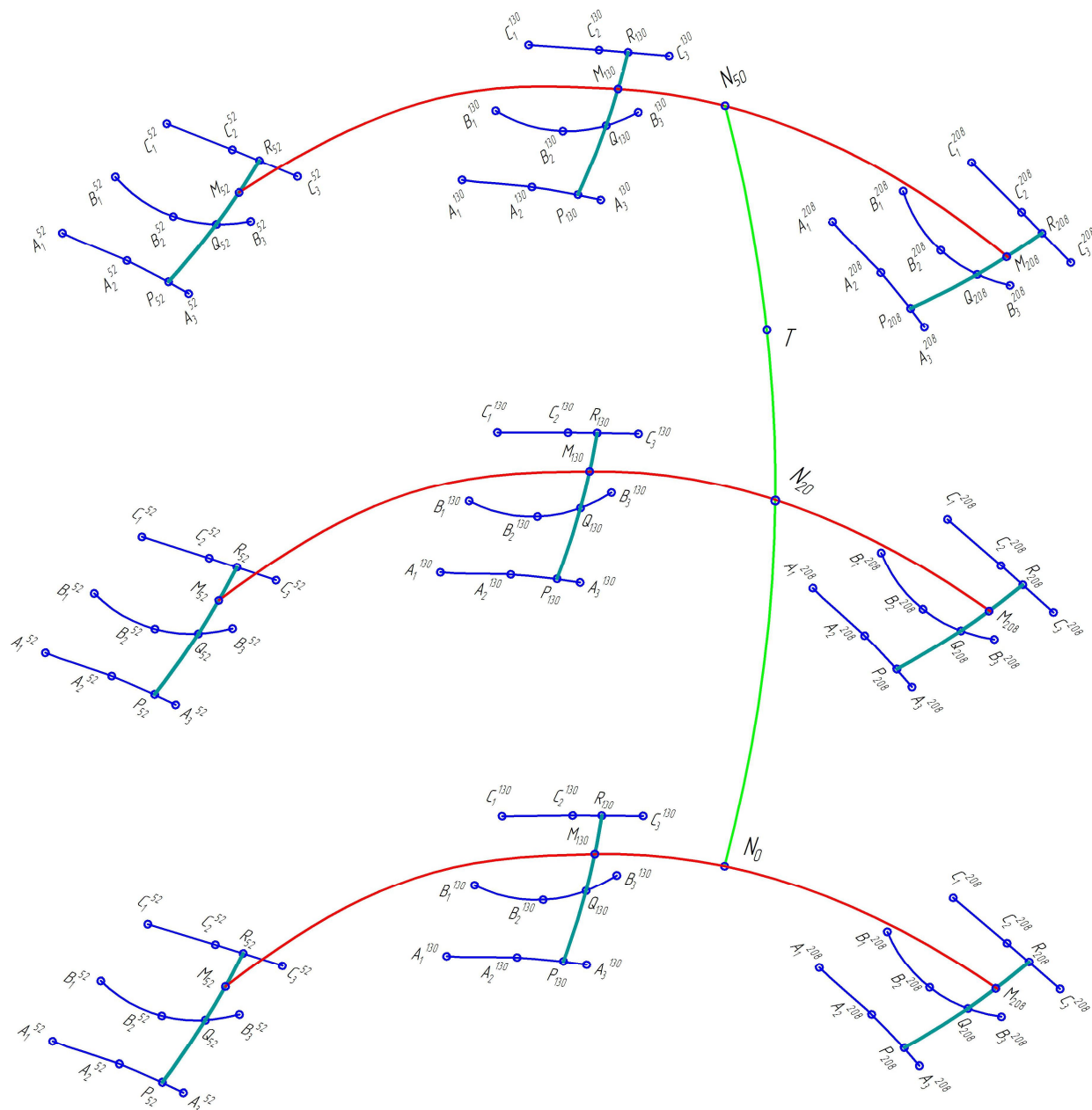


Рисунок 5.6. Установление зависимости четырех факторов

В качестве примера использования предложенной модели решим задачу: рассчитать предел прочности при сжатии R_0 мелкозернистого дегтеполимербетона, если вязкость дегтя $C_{30}^{10} = 150\text{с}$, концентрация отсева поливинилхлорида в органическом вяжущем $\tilde{N}_m^{i\hat{A}\hat{O}} = 1\%$, концентрация активатора поверхности минерального порошка $\tilde{N}_m^{\hat{E}\hat{I}-i\hat{O}} = 0,3\%$ и температура дегтеполимербетона $T = 35^\circ\text{C}$.

Решение. По геометрическому смыслу параметров, u , v , w и t , входящих в состав соответствующих однотипных точечных уравнений (5.5), (5.6) и (5.7), который вытекает из уравнения (2.53) и геометрической схемы конструирования дуги параболы 2-го порядка (рис. 2.7) второго раздела, видно, что соответствующие параметры изменяются линейно в пределах $[0;1]$. Рассмотрим по очереди их соответствие физико-механическим факторам, влияющим на состояние дегтеполимербетона. Так параметру u прямо пропорционально соответствует концентрация активатора на поверхности минерального порошка $\tilde{N}_m^{\hat{E}i - i \hat{O}}$, которая также меняется в пределах $[0;1]$, следовательно $u = 0,3$. Аналогично параметру v соответствует концентрация отсева поливинилхлорида в каменноугольном вяжущем $\tilde{N}_m^{i \hat{A} \hat{O}}$, которая меняется в пределах $[0.5;2]$. То есть значению концентрации отсева поливинилхлорида в каменноугольном вяжущем $\tilde{N}_m^{i \hat{A} \hat{O}} = 1\%$ соответствует значение параметра $v \approx 0,33$. Параметру w соответствует вязкость дегтя C_{30}^{10} , которая изменяется в пределах $[52;208]$. Тогда вязкости дегтя $C_{30}^{10} = 150$ с соответствует значение параметра $w \approx 0,63$. И наконец, параметру t соответствует температура дегтеполимербетона T , которая меняется в пределах $[0;50]$. А значит значению температуры $T = 35^\circ\text{C}$ соответствует значение параметра $t = 0,7$.

Подставив полученные значения параметров u , v , w и t в программу, листинг которой приведен в приложении В.2, получим следующее значение предела прочности при сжатии $R_0 \approx 2,31$ МПа. Проанализировав экспериментальные данные, приведенные в таблице 5.3, можно сделать вывод об адекватности полученной геометрической модели и, полученного на ее основе, расчетного алгоритма.

ВЫВОДЫ ПО РАЗДЕЛУ 5

1. Получена геометрическая модель зависимости средней плотности и прочности цементно-песчаной матрицы от концентрации добавок ЛСТ и NaOH в соответствии с существующей план-матрицей эксперимента. Установлено, что ранее для построения подобной модели методами регрессионного анализа было сделано упрощение, которое заключается в уменьшении количества факторов варьирования до трёх. Для построения геометрической модели искомой зависимости в упрощениях необходимости нет, что является её бесспорным преимуществом.

2. Разработаны две геометрические модели физико-механических свойств дегтеполимербетона в зависимости от состава и количества его компонентов, как пример возможностей БН-исчисления для геометрического моделирования многопараметрических явлений и процессов, что позволяет уменьшить количество необходимых и дорогостоящих экспериментов для аналитического описания и исследования необходимых свойств.

3. Получены аналитические зависимости, определяющие расчетный алгоритм геометрической модели физико-механических свойств дегтеполимербетона, что помогает инженеру-проектировщику определить необходимое количество модификаторов, а значит и состав дегтеполимербетона, от чего напрямую зависят его цена и качество.

4. Получен на базе БН-исчисления, расчетный алгоритм, который позволяет рассчитать предел прочности при сжатии мелкозернистого дегтеполимербетона в зависимости от концентрации активатора на поверхности минерального порошка, концентрации отсева поливинилхлорида в каменноугольном вяжущем, вязкости дегтя и температуры.

5. Внедрены результаты работы в производство для геометрического моделирования многопараметрических явлений и процессов, а также в учебный процесс Донбасской национальной академии строительства и архитектуры, что подтверждает актуальность темы и завершенность проведенных исследований.

ВЫВОДЫ

Диссертация посвящена геометрическому моделированию физико-механических свойств композиционных строительных материалов. Полученные в работе модели представлены упорядоченным множеством точек многомерного пространства в БН-исчислении методом подвижного симплекса.

При этом получены результаты, имеющие научную и практическую ценность:

1. Выполнен критический анализ существующих способов математического моделирования показателей физико-механических свойств многокомпонентных КСМ. Установлено, что для оптимизации составов и структур КСМ используется регрессионный анализ, который имеет ряд недостатков и ограничений. Критический анализ подтвердил необходимость и целесообразность применения математического аппарата БН-исчисления, который позволяет решать задачи моделирования многопараметрических процессов, упрощает их программную реализацию и уменьшает затраты ресурсов.

2. Разработаны и исследованы в БН-исчислении способы аналитического определения дуг алгебраических кривых, проходящих через наперёд заданные точки, что значительно расширило инструментальную базу БН-исчисления, как аппарата геометрического моделирования многопараметрических явлений и процессов.

3. Разработан в БН-исчислении способ использования геометрических объектов многомерного аффинного пространства для моделирования многопараметрических процессов в БН-исчислении. Этот способ позволяет получить аналитические зависимости в виде точечных уравнений и расчетные алгоритмы на их основе, что обеспечивает эффективное моделирование в многомерном аффинном пространстве, получая при этом относительно несложную программную реализацию. На основе предложенного способа моделирования в работе получено пять оптимальных геометрических моделей физико-механических свойств композицион-

ных строительных материалов в зависимости от состава и от параметров технологических режимов.

4. Разработана методика оптимального планирования эксперимента с учётом его дальнейшего аналитического описания с помощью геометрических моделей многомерного пространства, что даёт значительную экономию материальных, временных и вычислительных ресурсов.

5. На основе предложенной методики обработки и анализа экспериментально-статистической информации, получен состав комбинированного заполнителя из техногенного сырья, который является оптимальным для соответствующей целевой функции оптимизации, которая отвечает конкретному физико-механическому свойству мелкозернистого цементного бетона. Установлено, что комбинированный заполнитель состава: мартеновский шлак (29,4%) - горелая порода шахтных отвалов (70,6%) обеспечивает максимальный предел прочности при сжатии 9,24 МПа и при этом достаточно высокую плотность бетона 1691 кг/м³.

6. Разработан комплекс геометрических и компьютерных моделей зависимости показателей физико-механических свойств дегтеполимербетона от состава и структуры, которые наглядно демонстрируют возможности БН-исчисления как аппарата геометрического моделирования многофакторных процессов и явлений, что позволяет уменьшить количество дорогостоящих экспериментов для аналитического описания и исследования необходимых свойств композиционных строительных материалов с последующей оптимизацией их состава.

7. Результаты работы внедрены в ООО ГАК «Автомобильные дороги Украины» для геометрического моделирования процесса физико-механических свойств асфальтобетона в зависимости от состава при строительстве автомобильных дорог с нежесткими дорожными одеждами, а также в учебный процесс Донбасской национальной академии строительства и архитектуры, при подготовке бакалавров по направлению 08.03.01 «Строительство» в дисциплинах «Физико-химическая механика строительных материалов», «Инженерная графика» и аспирантов по направлению подготовки 09.06.01 «Информатика и вычислительная техника» по дисциплине «Геометрическое моделирование процессов и явлений».

СПИСОК ИСПОЛЬЗУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Конопацький, Є.В. Крива третього порядку як лінія перетину поверхонь другого порядку / Є.В. Конопацький, В.М. Верещага // Праці / Таврійський державний агротехнологічний університет. Вип. 4. Прикладна геометрія та інженерна графіка. – Т. 52. – Мелітополь: ТДАТУ, 2012. – С.60-65.
2. Вертинская, Н.Д. Математическое моделирование много-факторных и многопараметрических процессов в многокомпонентных системах на базе конструктивной геометрии / Международный журнал экспериментального образования, № 4- Москва, 2009.
3. Вертинская, Н.Д. Математическое моделирование многофакторных и многопараметрических процессов в многокомпонентных системах на базе конструктивной геометрии (Курс лекций) – Иркутск: Изд-во ИрГТУ, 2009 – ч.1. – 230 с.
4. Гумен, Н.С. Геометрические основы теории многообразий евклидового n -пространства применительно к геометрическому моделированию многопараметрических систем: автореф. дис. на здобуття наук. ступеня доктора техн. наук: спец. 05.01.01 "Прикладна геометрія, інженерна графіка" / М.М.Гумен. – К., 1992. - 53 с.
5. Найдыш, А.В. Теоретические основы геометрического моделирования физико-механических свойств асфальтобетонов методами БН-исчисления / А.В. Найдыш, Е.В. Конопацький, А.И. Бумага // Науковий вісник Мелітопольського державного педагогічного університету імені Богдана Хмельницького. Серія: Математика. Геометрія. Інформатика /гол. ред. кол. А.В. Найдиш. – Мелітополь: МДПУ ім. Б. Хмельницького, 2014.– Т.1. – С.111-117.
6. Подгорный, А.Л. Геометрическое моделирование пространственных конструкций: дис. ... докт. техн. наук: 05.01.01 / А.Л. Подгорный. – К.: КИСИ, 1975. – 295 с.
7. Алгебраїчна дуга AB третього порядку, її графічний та розрахунковий алгоритм в n -вимірному просторі / І.Г. Балюба, В.І. Поліщук, Б.Ф. Горягін и др. //

Праці / Таврійська державна агротехнічна академія. Вип. 4. Прикладна геометрія та інженерна графіка. Мелітополь: ТДАТА, 2007. – Т. 34. – С.15-20.

8. Балюба, И.Г. Конструирование кривых линий по заданным условиям / И.Г. Балюба, В.М. Верещага // Прикладная геометрия и инженерная графика. Вип. 50. К.: Будівельник, 1990. - С.128-130.

9. Балюба, И.Г. Конструктивная геометрия многообразий в точечном исчислении: дис. ... докт. техн. наук: 05.01.01 / И.Г. Балюба. – Макеевка: МИСИ, 1995. – 227 с.

10. Балюба, І.Г. Основи математичного апарату точкового числення / І.Г. Балюба, В.І. Поліщук, Т.П. Малютіна // Праці. Таврійська державна агротехнічна академія. Вип. 4. Прикладна геометрія та інженерна графіка. Мелітополь: ТДАТА, 2005. – Т. 29. – С.22-30.

11. Балюба, І.Г. Спеціальне точкове рівняння структурованого простору / І.Г. Балюба, Б.Ф. Горягін // Праці. Таврійська державна агротехнічна академія. Вип. 4. Прикладна геометрія та інженерна графіка. Мелітополь: ТДАТА, 2001. - Т.12. – С.37-39.

12. Балюба, І.Г. Точкове числення в нарисній геометрії. / І.Г. Балюба, Т.П. Малютіна, З.О. Намінас // Праці. Таврійська державна агротехнічна академія. Вип. 4. Прикладна геометрія та інженерна графіка. Мелітополь: ТДАТА, 2002. - Т.17. – С.60-62.

13. Балюба, І.Г. Площа трикутника і точкові співвідношення в геометрії. / І.Г. Балюба, Т.П. Малютіна // Праці. Таврійська державна агротехнічна академія. Вип. 4. Прикладна геометрія та інженерна графіка. Мелітополь: ТДАТА, 2003.– Т. 19. – С.23-25.

14. Балюба, І.Г. Точкове числення в нарисній геометрії / І.Г. Балюба, Т.П. Малютіна, З.О. Намінас // Праці. Таврійська державна агротехнічна академія. Вип. 4. Прикладна геометрія та інженерна графіка. Мелітополь: ТДАТА, 2002. - Т.17. – С.60-62.

15. Балюба, И.Г. Специальная параметризация плоских кривых и ее приложения / И.Г. Балюба, Т.П. Малютина, О.В. Гревцов // Прикладна геометрія та

інженерна графіка. Міжвідом. науково-тех. збірка. Вип.62. Київ: КДТУБА, 1997. - С. 45-49.

16. Балюба, И.Г. Моделирование плоских и пространственных кривых / И.Г. Балюба. – Макеевка., ДонНАСА, 1994. - 28с. Рукопись деп. в ГНТБ Украины, № 2368-Ук 94.

17. Балюба, И.Г. Символический язык геометрического моделирования / И.Г. Балюба. – Макеевка., ДонНАСА, 1994. - 42с. Рукопись деп. в ГНТБ Украины, № 2367-Ук 94.

18. Балюба, И.Г. Теоретические основы точечного исчисления / И.Г. Балюба. – Макеевка., ДонНАСА, 1994. - 32с. Рукопись деп. в ГНТБ Украины, № 1919-Ук 94.

19. Балюба, И.Г. Конструирование кривых линий по заданным условиям / И.Г. Балюба, В.М. Верещага // Прикладная геометрия и инженерная графика. Вып. 50. К.: Будівельник, 1990. - С.128-130.

20. Балюба, И.Г. Задание линейных многообразий точечной геометрии / И.Г. Балюба // Новые исследования в строительстве. Макеевка, 1993. – С.91-93.

21. Балюба, И.Г. Описание кривых линий n-мерного пространства / И.Г. Балюба // Новые исследования в строительстве. – Макеевка, 1993. – С.88-90.

22. Балюба, И.Г. Определение порядка алгебраической поверхности, заданной линией пространства параметров / И.Г. Балюба // Прикладная геометрия и инженерная графика. Вып. 26. К.: Будівельник, 1978. - С. 42-44.

23. Балюба, И.Г. Точечная геометрия и ее основная теорема / И.Г. Балюба // Новые исследования в строительстве. Макеевка, 1993. – С.84-87.

24. Балюба, И.Г. Задание линейчатых многообразий трехмерного пространства с помощью специальных соответствий / И.Г. Балюба, В.М. Найдыш // Совершенствование процессов и рабочих органов сельскохозяйственных машин. Научные труды УСХА. К: 1977. – С. 48-51.

25. Балюба, И.Г. Конструирование линейчатых поверхностей перенесением в пространство параметров / И.Г. Балюба, В.М. Найдыш // Прикладная геомет-

рия и инженерная графика. Реферативная информация, вып.2. К: Вища школа, 1978. – С. 27-28.

26. Балюба, И.Г. Развертывающиеся линейчатые поверхности, заданные линией пространства параметров / И.Г. Балюба, В.М. Найдыш // Прикладная геометрия и инженерная графика. Вып. 27. К.: Будівельник, 1979. - С. 89-90.

27. Балюба, И.Г. Особые точки точечного исчисления / И.Г. Балюба. – Макеевка., ДонНАСА, 1994. – 2 с. Рукопись деп. в ГНТБ Украины, № 1920-Ук 94.

28. Балюба, И.Г. Точечные отношения для отрезка / И.Г. Балюба. - Макеевка., ДонНАСА, 1994. – 2 с. Рукопись деп. в ГНТБ Украины, № 1921-Ук 94.

29. Балюба, И.Г. Уравнение кривых двоякой кривизны в n -мерном пространстве / И.Г. Балюба, С.Л. Корнилов // Моделирование процессов и технологического оборудования в сельском хозяйстве: материалы международной научно-практической конференции., - Мелитополь, 1994.- С.52.

30. Балюба, И.Г. Описание графических изображений средствами точечной геометрии / Балюба И.Г. // Материалы всеукраинской научно-методической конференции “Перспективы развития машинной графики в преподавании графических дисциплин”. – Одесса, ОПИ, 1992. – с.25.

31. Балюба, И.Г. Основная теорема точечной геометрии / И.Г. Балюба // Материалы научно-практического семинара “Компьютерная графическая подготовка специалистов”. – Витебск, 1992. – С.73-74.

32. Балюба, И.Г. Символический способ задания проективных кривых / И.Г. Балюба // Материалы научно-практического семинара “Компьютерная графическая подготовка специалистов”. – Витебск, 1992. – С.75-76.

33. Балюба, И.Г. Проведение кривых через k точек n -пространства / И.Г. Балюба // Моделирование процессов и технологического оборудования в сельском хозяйстве. – Мелитополь, 1994. - Т.2.–С.53.

34. Балюба, И.Г. Проведение поверхности через m кривых, заданных множеством дискретных точек / И.Г. Балюба // Моделирование процессов и технологического оборудования в сельском хозяйстве.– Мелитополь, 1994. – Т.2. - С.51.

35. Балюба, І.Г. Умови визначення дотичної кривої подвійної кривини. / І.Г. Балюба, Т.П. Малютина // Праці Таврійської державної агротехнічної академії: Тематич. науково-техн. зб. М-во агропромислового комплексу. – Мелітополь: ТДАТА, – 1999. - Вип.4. Прикладна геометрія та інженерна графіка. - Т7. - С.26-29.
36. Балюба, І.Г. Построение сети оболочки, заданной на прямоугольном плане / И.Г. Балюба, Т.П. Малютина // Вісник Донбаської державної академії будівництва і архітектури: Зб. наукових пр. – Макіївка: ДонДАБА, – 2000. - Вип. 2000-1(21). - С.144-146.
37. Балюба, І.Г. Первое уравнение равновесия сил в точечном исчислении / И.Г. Балюба, В.О. Шангін // Сб. трудов IV междунар .науч. практ. конф. «Соврем. пробл. геометр. модел.». Ч.2. – Мелітополь: ТДАТА, 1997. - С. 28-31.
38. Балюба, І.Г. Ближайшие точки двух прямых многомерного пространства / И.Г. Балюба, С.Л. Корнилов // Прикладна геом. та інж. графіка. Міжвідом. науко-вотехн. збірка. Вип.61. – Київ: КДТУБА, 1997. - С. 50-52.
39. Балюба, І.Г. Специальная параметризация плоских кривых и ее приложения / И.Г. Балюба, Т.П. Малютина, В.В. Гревцов // Прикладна геом. та інж. графіка. Міжвідом. науково-тех. збірка. Вип.62. – Київ: КДТУБА, 1997. - С.45-49.
40. Балюба, І.Г. Геометрическая сущность кривых Безье и их аналитическое представление / И.Г. Балюба // Зб. праць міжнародної науково-практичної конференції «Сучасні проблеми геометричного моделювання». – Харків: ХІПБ МВС України, 1998. - Ч.1. - С.178-182.
41. Балюба, І.Г. Конструирование сетчатой оболочки стационарного покрытия над трибунами стадионов / И.Г. Балюба, И.П. Давыденко // Прикладная геометрия и инженерная графика. Труды ТДАТА. Вып. 4. – Мелітополь, 1999. - Т.10 - С.41-42.
42. Балюба, І.Г. Символический язык геометрического моделирования / И.Г. Балюба // Монография. – Макеевка, ДонНАСА, 1994. – 42 с.
43. Бумага А.И. Точечное уравнение параболической дуги кривой второго порядка / А.И. Бумага, И.Г. Балюба // Збірник тез доповідей і повідомлень VI Мі-

жнародної наукової конференції молодих вчених, аспірантів і студентів. - Макіївка: ДонНАБА, 2007. - С.64.

44. Конопацкий, Е.В. Точечное задание множества плоскостей пространства / Е.В. Конопацкий, В.И. Полищук, И.Г. Балюба // Геометричне та комп'ютерне моделювання. Збірник наукових праць. Вип. 17. – Харьков: ХДУХТ, - 2007. – С. 122-127.

45. Конопацький, Є.В. Конструювання плоских і просторових алгебраїчних кривих системою лінійних точкових рівнянь / Є.В. Конопацький, І.Г. Балюба, Ж.В. Старченко // Праці. Таврійська державна агротехнічна академія. Вип. 4. Прикладна геометрія та інженерна графіка. - Мелітополь: ТДАТА, 2002. - Т.17. – С. 66-67.

46. Конопацкий, Е.В. Алгоритм представления дуги кривой третьего порядка / Е.В. Конопацкий, В.И. Полищук, И.Г. Балюба // Збірник тез доповідей і повідомлень VI міжнародної наукової конференції молодих вчених, аспірантів і студентів. – Макіївка: ДонНАБА, - 2007. – С.62.

47. Метод подвижного симплекса при конструировании 2-поверхностей многомерного пространства / И.Г. Балюба, Б.Ф. Горягин, Е.В. Конопацкий и др. // Моделювання та інформаційні технології: Матеріали Міжнародної наукової конференції «Моделювання – 2010», 12 -14 травня 2010 р., м. Київ, Інститут проблем моделювання в енергетиці ім. Г.Є. Пухова НАН України. – Київ: 2010. - Т.1. – С.310 - 318.

48. Найдиш, В.М. Алгебра БН-исчисления / В.М. Найдыш, И.Г. Балюба, В.М. Верещага // Прикладна геометрія та інженерна графіка. Міжвідомчий науково-технічний збірник. Вип. 90. – К.: КНУБА, 2012. – С.210-215.

49. Поверхня трьох напрямних з афінно-відповідними перерізами / І.Г. Балюба, А.І. Бумага, І.П. Давиденко, та інші // Праці Таврійської державної агротехнологічної академії. Вип. 4. Прикладна геометрія та інженерна графіка. – Мелітополь: ТДАТУ, 2012. – Т. 55. – С.20-25.

50. Проективне визначення дуги кривої третього порядку у точковому численні Балюби-Найдиша / В.М. Верещага, А.В. Найдиш, І.Г. Балюба та інші // Пра-

ці. Таврійський державний агротехнологічний університет. Вип. 4. Прикладна геометрія та інженерна графіка. – Мелітополь: ТДАТУ, 2012. – Т. 54. – С.101-109.

51. Точечное исчисление – математический аппарат параллельных вычислений для решения задач математического и компьютерного моделирования геометрических форм. / И.Г. Балюба, В.И. Полищук, Б.Ф. Горягин та інші // Материалы Международной научной конференции «Моделирование – 2008», 14-16 мая 2008 р., г. Киев / Институт проблем моделирования в энергетике им. Г.Е. Пухова НАН Украины. – Киев: 2008. - Том 2. – С.286-290.

52. Точечное исчисление геометрических форм и его место в ряду других существующих исчислений / И.Г. Балюба, Т.П. Малютина, Е.В. Конопацкий и другие // Комп'ютерно-інтегровані технології: освіта, наука, виробництво. Науковий журнал №6. – Луцьк: ЛНТУ, 2011. – С. 24-29.

53. Точкові рівняння дуг кривих визначених однією просторовою конфігурацією / І.Г. Балюба, Б.Ф. Горягін, Є.В. Конопацький та інші // Праці. Таврійський державний агротехнологічний університет. Вип. 4. Прикладна геометрія та інженерна графіка. – Мелітополь: ТДАТУ, 2011. – Т. 50. – С.36-40.

54. Точкові рівняння параболи четвертого порядку у різних поданнях / І.Г. Балюба, Б.Ф. Горягін, А.В. Найдиш та інші // Праці. Таврійський державний агротехнологічний університет. Вип. 4. Прикладна геометрія та інженерна графіка. – Мелітополь: ТДАТУ, 2009. – Т.44. – С.32-37.

55. Бездітний, А.О. Варіативне дискретне геометричне моделювання на основі геометричних співвідношень у точковому численні Балюби-Найдиша: Дис. ... канд. техн. наук: 05.01.01. / А.О. Бездітний. – Мелітополь, 2012. – 191 с.

56. Верещага, В.М. Побудова сітки у плані для поверхні, отриманої наземним лазерним скануванням / В.М. Верещага, А.О. Бездітний, В.В. Кучеренко // Міжвідомчий науково-технічний збірник «Прикладна геометрія та інженерна графіка». – Вип. 87.– К.: КНУБА, 2011.– С.111-115.

57. Конопацький, Є.В. Смуга параболічних перерізів в точковому представленні / Є.В. Конопацький, В.М. Верещага, А.В. Найдиш // Праці. Таврійський

державний агротехнологічний університет. Вип. 4. Прикладна геометрія та інженерна графіка. – Мелітополь: ТДАТУ, 2012. – Т. 52. – С.3-6.

58. Горягин, Б.Ф. Описание некоторых проективных соответствий в точечном исчислении. Специальный комплексный чертеж симплекса и его применение. / Б.Ф. Горягин // Современные проблемы геометрического моделирования. Материалы второй укр.-росс. науч.-практ. конф., 24-27 апреля 2007 г., г. Харьков / Спец выпуск. – Харьков: ХДУХТ, 2007. – С.145-150.

59. Горягин, Б.Ф. Кривая 2-го порядка в точечном описании / Б.Ф. Горягин // Прикладная геометрия и инженерная графика. – Вып.4, Мелитополь: ТГАТА, 1998. – Т.4. – С. 23-26.

60. Конопацкий, Е.В. Проведение дуги параболы 3-го и 4-го порядка через заданные точки / Е.В. Конопацкий, Б.Ф. Горягин // Геометрическое моделирование и компьютерный дизайн: труды VII Междунар. науч.-практ. конф., 21-23 апреля 2010г., г.Одесса / Вып. 85. – Одесса: 2010, – Т. 2. - С.25-28.

61. Конопацкий, Е.В. Определение порядка алгебраической кривой в точечном исчислении / Е.В. Конопацкий, Б.Ф. Горягин // Геометрическое и компьютерное моделирование: энергосбережение, экология, дизайн: материалы VII Крымской междунар. науч.-практ. конф., 27 сентября - 1 октября 2010г., г. Симферополь / Міжвідомчий науково-технічний збірник. Прикладна геометрія та інженерна графіка (спецвипуск). Вип.86. – К.: КНУБА, 2010. – С. 271-274.

62. Давиденко, І.П. Точкове задання кривих другого порядку у різноманітній параметризації / І.П. Давиденко // Праці Таврійської державної агротехнічної академії. Вип. 4: Прикладна геометрія та інженерна графіка. –Мелітополь: ТДАТА, 2006. — Т. 31. – С. 128-132.

63. Давыденко, И.П. Конструирование поверхностей пространственных форм методом подвижного симплекса: Дис. ... канд. техн. наук: 05.01.01. / И.П. Давыденко. – Макеевка, 2012. – 186 с.

64. Давиденко, І.П. Точкове задання кривої другого порядку по п'ятьох точках / І.П. Давиденко // Праці Таврійської державної агротехнічної академії. – Ме-

літополь: ТДАТА, 2003. – Вип. 4: Прикладна геометрія та інженерна графіка. – Т. 22. – С. 128-132.

65. Конопацький, Є.В. Геометричне моделювання алгебраїчних кривих та їх використання при конструюванні поверхонь у точковому численні Балюби-Найдиша. Дис. ... канд. техн. наук: 05.01.01. / Є.В. Конопацький. – Мелітополь, 2012. – 164 с.

66. Конопацький, Є.В. Відсік поверхні заданих опорних контурів / Є.В. Конопацький / Праці. Таврійський державний агротехнологічний університет. Вип. 4. Прикладна геометрія та інженерна графіка. – Мелітополь: ТДАТУ, 2009. – Т.42. – С.103-107.

67. Конопацький, Є.В. Геометричне моделювання поверхні резервуару для зберігання нафтопродуктів з урахуванням недосконалостей методами БН-числення / Є.В. Конопацький, А.І. Бумага, О.А. Крисько // Прикладна геометрія, дизайн та об'єкти інтелектуальної власності: Матер. II міжнар. наук.-практ. конф. студ., аспір. та мол. вч., 22-23 квіт. 2013р., м. Київ, – К.: ДІЯ, 2013. – Вип. 2 – С. 118-122.

68. Конопацький, Є.В. Конструювання однопараметричної множини ліній в n-вимірному просторі / Є.В. Конопацький, А.І. Бумага // Праці. Таврійська державна агротехнічна академія. Вип. 4. Прикладна геометрія та інженерна графіка. – Мелітополь: ТДАТА, 2007. – Т. 36 – С.106-111.

69. Конопацький, Є.В. Дуга просторової кривої 3-го порядку з двома не-власними точками / Є.В. Конопацький, А.І. Бумага // Праці. Таврійський державний агротехнологічний університет. Вип. 4. Прикладна геометрія та інженерна графіка. – Мелітополь: ТДАТУ, 2013. – Т. 56. – С.88-95.

70. Конопацький, Є.В. Геометрическая модель зависимости предела прочности при сжатии модифицированного мелкозернистого дегтебетона от четырёх параметров / Е.В. Конопацкий, А.И. Бумага, В.А. Бочоришвили // Современные

строительные материалы: Вестник ДонНАСА: Макеевка. – 2016. – Вып. 2016-1(117). – С. 55-61.

71. Конопацький, Є.В. Геометричне моделювання залежності межі міцності при стисканні зразків газобетону після тепло-вологої обробки / Є.В. Конопацький, А.І. Бумага, В.С. Єремєєв // Сучасні проблеми моделювання: зб. наук. праць / МДПУ ім. Б. Хмельницького. – Мелітополь: Видавництво МДПУ ім. Б. Хмельницького, 2016. – Вип. 5. – С.71-77.

72. Конопацкий, Е.В. Некоторые вопросы математического моделирования физико-механических свойств строительных материалов / Е.В. Конопацкий, А.И. Бумага // Вестник ДонНАСА: Макеевка. – 2016. - Выпуск 2016-3(119): Здания и сооружения с применением новых материалов и технологий. - С. 79-84.

73. Поліщук, В.І. Побудова просторової дуги кривої третього порядку / Є.В. Конопацький, В.І. Поліщук // Матеріали VIII Міжнародної наукової конференції молодих вчених, аспірантів і студентів. Вип. 2009-5(79). Макіївка: ДонНАБА, 2009. – Т. 2. - С.169-172.

74. Поліщук, В.І. Теоретичні основи точкового визначення поверхонь зі змінним симплексом. / Є.В. Конопацький, В.І. Поліщук // Наукові нотатки. Міжвузівський збірник. Випуск 22. Частина 2. – Луцьк: ЛДТУ. 2008. – С.276-281.

75. Теоретические основы конструирования геометрических объектов многомерного пространства в БН-исчислении / А.В. Найдыш, Е.В. Конопацкий, А.И. Бумага и другие // Научные итоги: достижения, проекты, гипотезы: Сборник докладов XVIII Юбилейной международной научно-практической конференции. Выпуск 18. – Минеральные Воды, 2013. – С. 151-154.

76. Кучеренко, В.В. Формалізовані геометричні моделі нерегулярної поверхні для гіперкількісної дискретної скінченої множини точок: Дис. ... канд. техн. наук: 05.01.01. / В.В. Кучеренко. – Мелітополь, 2013. – 234 с.

77. Малютина, Т.П. Интерпретация вычислительной геометрии плоских фигур в точечном исчислении: Дис. ... канд. техн. наук: 05.01.01. / Т.П. Малютина. – Макеевка, 2012. – 161 с.

78. Найдиш, А.В. Геометричне моделювання дискретних точкових множин на основі перенесення до простору параметрів: автореф. дис. ... докт. техн. наук: 05.01.01 / А.В. Найдиш. - К., 1998.- 244 с.

79. Найдыш, А.В. Методи узагальнення і аналогії БН-числення на прикладі визначення основи перпендикуляру / А.В. Найдиш, В.М. Верещага, В.В. Шацький та інші // Праці. Таврійський державний агротехнологічний університет. Вип. 4. Прикладна геометрія та інженерна графіка. – Мелітополь: ТДАТУ, 2012. – Т. 55. – С.163-168.

80. Теоретические основы конструирования геометрических объектов многомерного пространства в БН-исчислении / А.В. Найдыш, Е.В. Конопацкий, А.И. Бумага и др. // Сборник докладов XVIII Юбилейной международной научно-практической конференции «Научные итоги: достижения, проекты, гипотезы». Выпуск 18. – Минеральные Воды, 2013. – С. 151-154.

81. Найдыш, А.В. Теоретические основы геометрического моделирования физико-механических свойств асфальтобетонов методами БН-исчисления / А.В. Найдыш, Е.В. Конопацкий, А.И. Бумага // Науковий вісник Мелітопольського державного педагогічного університету імені Богдана Хмельницького. Серія: Математика. Геометрія. Інформатика. – Мелітополь: МДПУ ім. Б. Хмельницького, 2014. – Т.1. – С.111-117.

82. Найдыш, В.М. Методы и алгоритмы формирования поверхностей и обводов по заданным дифференциально-геометрическим условиям: Дисс. ... докт. техн. наук: 05.01.01 / В.М. Найдыш. – Мелітополь, 1982. – 512 с.

83. Скидан, І.А. Математичне моделювання геометричних образів у баріцентричних координатах / І.А. Скидан, О.Г. Гайдар // Труды Таврической государственной агротехнической академии. Вып. 4. Прикладная геометрия и инженерная графика. – Мелітополь: ТГАА, 1999. – Т. 7. – С. 30-36.

84. Братчун, В.И. Дорожные асфальтополимерсеробетоны для устройства покрытий дорожных одежд с высокой интенсивностью и грузонапряженностью движения / В.И. Братчун, Эль-Хаг Адиль Ибрагим // Автодорожний комплекс України в сучасних умовах: Проблеми і шляхи розвитку. – К.: ПВКП “Укртиип-проект”, 1998. – С.163-166.

85. Братчун, В.И. Повышение долговечности бетонов на органических вяжущих регулированием свойств микроструктуры / В.И. Братчун // Вестник Харьковского автомобильно-дорожного технического университета. – Харьков: 2000 – Вып. 12-13. – С. 141-144.

86. Братчун, В.И. Модифицированные асфальтобетоны повышенной сдвигоустойчивости и долговечности / В.И. Братчун, Эль-Хаг Адиль Ибрагим // Автошляховик України, 1998. – № 2 – С.51-52.

87. Братчун, В.И. Асфальтополимербетоны повышенной долговечности / В.И. Братчун, А.Г. Доля, Эль-Хаг Адиль Ибрагим // Современные проблемы строительства. – Донецк: Украинская государственная строительная корпорация «Укрстрой», 1997. – С.110-111.

88. Братчун, В.И. Модифицированные дегти и дегтебетоны повышенной долговечности / В.И. Братчун, В.А. Золотарев // – Макеевка: МОН Украины, ДонГАСА, 1998. – С. 226.

89. Бумага, А.И. Оптимизация состава комбинированного заполнителя мелкозернистого бетона методами БН-исчисления / А.И. Бумага, В.И. Братчун, Е.В.Конопацкий // Современное промышленное и гражданское строительство. – 2016. – Т.12, №2. – С. 92-98.

90. Зайченко, Н.М. Высокопрочные тонкозернистые бетоны с комплексно-модифицированной микроструктурой: Автореф. дис. ... докт. техн. наук: – 05.23.05 / Н.М. Зайченко.- Макеевка, 2009. – 356с.

91. Зайченко, Н.М. Высокопрочные тонкозернистые бетоны с комплексно-модифицированной микроструктурой / Н.М. Зайченко. – Монография. - Макеевка: ДонНАСА, 2009 – 207 с.
92. Королев, И.В. Исследование уплотнения асфальтовых бетонов теплого типа / И.В. Королев // Труды Хабаровского автомобильно-дорожного института. – Хабаровск, 1962. – вып.. 2. – С. 35-40.
93. Королев, И.В. Модель строения битумной плёнки на минеральных зёрнах в асфальтобетоне / И.В. Королев // Известия вузов. Строительство и архитектура. – 1981. – №8. – С. 63-67.
94. Матвиенко, В.А. Электрические явления и активационные воздействия в технологии бетона / В.А. Матвиенко, С.М. Толчин. – Монография. - Макеевка: ДонНАСА, 1998 – 154 с.
95. Соколов, Б.Ф. Моделирование эксплуатационно-климатических воздействий на асфальтобетон / Б.Ф. Соколов, С.М. Маслов // – Воронеж: Издательство Воронежского университета, 1987. – 103 с.
96. О моделировании битумной пленки в асфальтобетоне, ее структуре и прочности / А.Ф. Фролов, Е.А. Фролова, А.Г. Степанков и др. // Химия и технология топлив и масел. – 1984. – №9. – С. 33-34.
97. Полимерно-битумные вяжущие и асфальтобетоны на основе битумов, модифицированных Элвалоем / В.А. Золотарев, С.В. Ефремов, Я.И. Пыриг и др. // Вестник Харьковского автомобильно-дорожного университета. – Харьков: 2002. – Вып. 19. – С. 88-93.
98. Золотарев, В.А. Обобщенные температурно-пенетрационные зависимости дорожных битумов / В.А. Золотарев // Наука и техника в дорожной отрасли, 2000. – №1 – С. 24-26.
99. Золотарев, В.А. Оценка качества асфальтобетона по критериям его линейного поведения / В.А. Золотарев, Ю.П. Ткачук // Тезисы докладов на VII Всесоюзном совещании дорожников. – М.: 1981. – С. 30-31.

100. Золотарев, В.А. Закономерности деформирования и разрушения битумов и асфальтобетонов как основа улучшения и регулирования их свойств: Автореф. дис... д-ра техн. наук: – 05.23.05 / ВЗИСИ – М.: 1983. – 36 с.
101. Золотарев, В.А. Долговечность дорожных асфальтобетонов. – Харьков: Вища шк., 1977. – 115 с.
102. Технология бетона. Учебник. Ю.М. Баженов – М.: Изд. АСВ, 2002 – 500 с. с иллюстр.
103. Вознесенский, В. А. Современные методы оптимизации композиционных материалов / В. А. Вознесенский, В.Н. Выровой, С.В. Коваль, Т.В. Ляшенко и др.; Под ред. В.А. Вознесенского. – К.: Будівельник, 1983. – 144 с.
104. Вознесенский, В.А. Численные методы решения строительно-технологических задач на ЭВМ / В.А. Вознесенский, Т.В. Ляшенко, Б.Л. Огарков - К.: Вища школа, 1989. - 328с.
105. Дворкин, Л.И. Решение строительно-технологических задач методами математического планирования эксперимента / Л.И. Дворкин, О.Л. Дворкин, В.В. Житковский. – Ровно: НУВХП, 2011. - 174с.
106. Dvorkin L., Dvorkin O., Ribakov Y. Mathematical Experiments Planning in Concrete Technology. Nova Science Publishers, New York, USA, 2012, 173p.
107. Кровяков, С.А. Оптимизация состава мелкозернистого бетона с учетом критериев локального разрушения: Дис. ... канд.. тех..наук: 05.23.05 /С.А. Кровяков. - Макеевка, 1999. – 131с.
108. Смирнов, В.А. Моделирование и инструментальные средства численного анализа в нанотехнологии материаловедения: обзор / В.А. Смирнов, Е.В. Королев, А.В. Евстигнеев // Нанотехнологии в строительстве. 2014. – Том 6, № 5. – С. 34–58.
109. Самойлова, Е.Э. Дорожные асфальтобетоны с комплексно-модифицированной микроструктурой с использованием реакционно-способного

термопласта Элвалой АМ: дис. ... кандидата технических наук: 05.23.05/ Е.Э. Самойлова. – Макеевка, 2007. – 171 с.

110. Рыбалко, И.Ф. Минеральный порошок из шлама нейтрализации травильных растворов: дис. ... кандидата технических наук: 05.23.05 / И.Ф. Рыбалко. – Макеевка, 1999. – 137 с.

111. Ходун, В.Н. Дёгтебетоны с комплексно-модифицированной микроструктурой: дис. ... кандидата технических наук: 05.23.05/ В.Н. Ходун. – Макеевка, 1999. – 146 с.

112. Мартынова, В.Б. Модифицированный неавтоклавный газополистиролбетон с повышенными физическими и механическими свойствами: дисс.... канд. техн. наук: 05.23.05/ В.Б. Мартынова. - Макеевка, 2012. – 197 с.

113. Толчин, С.М. Мелкозернистые бетоны на комбинированных заполнителях из отходов промышленности: дис. ... кандидата технических наук: 05.23.05/ С.М. Толчин. – Одесса, 1997. – 101 с.

114. Аль-Шамси Халед Али Саид. Модифицированные неавтоклавные газобетоны на основе смесей низкой водопотребности: дис. ... кандидата технических наук: 05.23.05/ Аль-Шамси Халед Али Саид. – Макеевка, 1999. – 116с.

115. Большаков, В.И., Основы теории и методологии многопараметрического проектирования составов бетона / В.И. Большаков, Л.И. Дворкин, О.Л. Дворкин. - Днепропетровск, ПГАСА, 2006. - 360с.

116. Бумага, А.І. Точкове рівняння дуги параболи другого порядку / Бумага А.І. // Геометрическое и компьютерное моделирование: энергосбережение, экология, дизайн: Мат. IX Крымской междунар. науч.-практ. конф. г. Симферополь (24 сент. - 28 сент. 2012 г.). – Міжвідомчий науково-технічний збірник. Прикладна геометрія та інженерна графіка (спецвипуск). – К.: КНУБА, 2012. – Вип.90. – С. 49-52.

117. Бумага, А.І. Геометричне моделювання фізико-механічних властивостей дьогтебетону / А.І. Бумага // Строительство и техногенная безопасность: Сб.

науч. труд. по мат. X Межд. крым. науч. конф. (Симферополь, 07-11 окт. 2013 г.) – Симферополь: НАПКС, 2013. – Вип.48. – С. 24-28.

118. Бумага, А.І. Алгоритм побудови опуклого обводу нульового порядку гладкості за допомогою дуг кривих другого порядку, які визначаються п'ятьма точками / А.І. Бумага // Научный журнал «Сборник научных трудов SWorld». – Вип. 3, Т. 12. – Иваново: МАРКОВА АД, 2013. – С. 82-86.

119. Бумага, А.І. Конструирование дуги кривой второго порядка, проходящей через пять точек / А.И. Бумага // Вісник Донбаської національної академії будівництва та архітектури. Будівлі та конструкції із застосуванням нових матеріалів та технологій: зб. наук. пр. Макіївка: ДонНАБА, – 2013. – Вип. 2013-3(101). – С. 92-95.

120. Бумага, А.И. Использование дуги параболы 2-го и 3-го порядков при анализе состава почвы в системе точного земледелия / А.И. Бумага // Вопросы образования и науки в XXI веке: сб. науч. тр. по матер. Междунар. науч.-практ. конф. (Тамбов, 29 апр. 2013 г.). – Изд-во ТРОО «Бизнес-Наука-Общество». – Ч. 7. – 2013. – С. 34-35.

121. Бумага, А.І. Геометрична модель залежності фізико-механічних властивостей асфальтобетону від чотирьох параметрів у БН-численні [Текст] / А.И. Бумага // Сучасні проблеми моделювання: зб. наук. праць. – Мелітополь: Видавництво МДПУ ім. Б. Хмельницького, 2014. – Вип. 3. – С. 28-33.

122. Бумага, А.И. Геометрическое моделирование физико-механических свойств асфальтобетона / А.И. Бумага, А.В. Найдыш, Е.А. Гавриленко // Математическое моделирование: сб. науч. тр. по матер. XV Междунар. конф. (Херсон, 16-20 сент. 2014 г.) - Вестник Херсонского национального технического университета. – Херсон: ХНТУ, 2014. – Вип. 3(50). – С. 567-570.

123. Бумага, А.І. Розрахунковий алгоритм визначення залежності межі міцності при стисканні дрібнозернистого дьогтебетону в залежності від 4х параметрів / А.І. Бумага // Зб. наук. пр. Наукові нотатки, Луцьк: ЛНТУ, 2015. - №48. – С.41-44.

124. Вертинская, Н.Д. Математическое моделирование многофакторных и многопараметрических процессов в многокомпонентных системах / Фундаментальные исследования, № 2, 2009, г. Москва.

125. Lyashenko, T.V. Multicriterion optimisation of autoclaved aerated concrete properties and expenditure of energy resources / T.V.Lyashenko, V.A.Voznesensky, V.P.Gavriliuk // Brittle Matrix Composites 9 : Proc. 9th Int. Symp. BMC9. - Warsaw: Woodhead Publ. Ltd., IFTR PAS, 2009. - P. 219-226.

126. Носов, В.П. Прогнозирование повреждений жестких слоев дорожных одежд на основе математического моделирования: Дис. ... докт. техн. наук: 05.23.11/ В.П. Носов. – Москва, 1997. – 412с.

127. Салих, Ф. Моделирование свойств самоуплотняющегося бетона при поэтапном введении добавок / Ф. Салих, С. Коваль // Хімія, хімічна технологія та екологія. Вісник НТУ «ХПІ», 2013. - №57(1030) - С.38-44.

128. Балюба, И.Г. Точечное исчисление: учебное пособие / И.Г. Балюба, В.М. Найдыш; – Мелитополь: МГПУ им. Б. Хмельницкого, 2015. – 236 с.

129. Матвиенко, В.А. Электрическая активация в технологии бетона и изделий: Дис. ... док. техн. наук: 05.23.05/ В.А. Матвиенко. – Харьков, 1993. – 345 с.

130. Несветаев, Г. В. Бетоны: Учебное пособие / Г. В. Несветаев. – Ростов н/Д : Феникс, 2011. – 381 с.

131. Коваль, С. В. Моделирование и оптимизация состава и свойств модифицированных бетонов / С. В. Коваль. – Одесса : Астропринт, 2012. – 424 с.

132. Цементы и бетоны на основе топливных зол и шлаков / П. В. Кривенко, Е. К. Пушкарева, В. И. Гоц, Г. Ю. Ковальчук. – Киев : ООО ИПК Экспресс-Полиграф, 2012. – 258 с.

133. Characterisation of Solid Wastes from Circulating Fluidised Bed Combustion / E. J. Anthony, G. G. Ross, E. E. Berry, R. T. Hemings, R. K. Kissel // J. Energy Resour. Technol. 1995. Volume 117, Issue 1. P. 180–190.

134. Locher, Friedrich W. Cement: Principles of production and use [Текст] / Friedrich W. Locher. – Düsseldorf, Germany : Verlag Bau + Technik GmbH, 2006. – 540 s. – ISBN 3-7640-0420-7.
135. Ушеров-Маршак, А. В. Современные бетоны / А. В. Ушеров-Маршак, Т. В. Бабаевская; Под ред. А. В. Ушера-Маршака. – Запорожье: [б. и.], 2007. – 226 с.
136. Morgan, P. The Shell Bitumen Industrial Handbook / P. Morgan, A. Mulder. – Surrey, U. K.: Shell Bitumen, 1995. – 338 p.
137. Petersen, J. A review of the fundamentals of asphalt oxidation: chemical, physicochemical, physical property, and durability relationships / J. Claine Peterse. – Washington, DC: Transportation Research Board, 2009. – 68 p. – (Transportation Research E Circular, no. E C140).
138. Глаголев, Н.А. Проективная геометрия / Глаголев Н.А. // Государственное издание «Высшая школа» - Москва, 1963. – 344 с.
139. Стечкин, С.Б. Сплайны в вычислительной математике / С.Б. Стечкин, Ю.Н.Субботин // Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука» - М., 1976. – 248с.
140. Скочко, В.І. Спеціальні геометричні моделі процесів, що розвиваються в суцільному середовищі: Дис. ... канд. техн. наук: 05.01.01 / В.І. Скочко. – Київ, 2013. – 269 с.
141. Хомченко, А.Н. Геометричне моделювання гексагональних базисів / А.Н. Хомченко, С.В. Моїсеєнко // Прикл. геом. та інж. граф. - К.: КНУБА, 2006. - Вып.76. - С.37-43.
142. Хомченко, А.Н. Модифікація сплайнів на основі поліномів С.Н. Берштейна / А.Н. Хомченко, Г.Я. Тулученко // Праці Таврійської державної агротехнологічної академії. - Мелітополь: ТДАТА, 2004. - Вип.4. - Т.24. - С.57-61.
143. Смеси дегтебетонные дорожные и дегтебетон. Технические условия: ГОСТ 25877-83 [Действующий с 1983-10-06 по 1995-06-30]. – М.: Госстандарт РФ, 1983. - 16 с.

Приложение А

Копии документов о внедрении результатов исследований

ООО ГАК
«Автомобильные
дороги Украины»
дочернее предприятие
Донецкий облавтодор

УТВЕРЖДАЮ:

Начальник филиала
Красноармейского
автодора



Соловьев Е.Н.

2014 г.

АКТ

внедрения способа геометрического моделирования процесса зависимости физико-механических свойств асфальтобетона от состава, разработанного на кафедре градостроительства и инженерной графики Донбасской национальной академии строительства и архитектуры ассистентом Бумагой А.И.

Настоящий акт выдан соискателю Бумаге А.И. в том, что разработанный ею способ геометрического моделирования процесса зависимости физико-механических свойств асфальтобетона в зависимости от состава его компонентов принят для внедрения при строительстве автомобильных дорог с нежесткими дорожными одеждами.

Предложенный автором способ геометрического моделирования позволяет исследовать одновременное влияние нескольких факторов, а именно: вязкости дёгтя, концентрации отсева поливинилхлорида, концентрации активатора поверхности минерального порошка карбамидо-формальдегидной смолы и температуры образцов мелкозернистого дёгтебетона, на его предел прочности при сжатии. Предложенная геометрическая модель адаптирована под существующие методы получения экспериментальных данных при составлении матрицы планирования эксперимента, что позволяет использовать полученные аналитические зависимости без нарушения производственного процесса.

Представители:

Донбасской национальной академии
строительства и архитектуры

Зав. кафедрой «Автомобильные
дороги и аэродромы»
д.т.н., профессор

_____ Братчун В.И.

Ассистент кафедры градостроительства
и инженерной графики

_____ Бумага А.И.

Представители:

Красноармейского филиала
автодора

Главный бухгалтер

_____ Полиенко А.Н.

ЗАТВЕРДЖУЮ:

Проректор з навчальної роботи
Донбаської національної академії
будівництва і архітектури,
д.т.н., професор


« 17 » М.М. Зайченко
2014 р.

АКТ щодо впровадження в навчальний процес наукових результатів

Експериментально-статистичні моделі, що одержані в кандидатській дисертаційній роботі асистента кафедри «Містобудування та інженерна графіка» Бумаги А.І. на тему: «Геометричне моделювання апаратом БН-числення фізико-механічних властивостей асфальтобетонів», дозволяють оцінити вплив концентрації доломітового пилу і температури асфальтобетонної суміші на межу міцності при стиску, дослідити зміну межі міцності при стиску залежно від зміни чотирьох факторів: концентрації активатора поверхні мінерального порошку, концентрації відсіву полівінілхлориду, в'язкості дьогтю і температури.


Методами БН-числення можна отримати і досліджувати геометричну модель процесу, яка може розглядатися в просторі будь-якої розмірності факторів оптимізації, що дозволяє під час досліджень одночасно врахувати всі необхідні параметри, які впливають на процес.

Дослідження Бумаги А.І. рекомендовані до впровадження в навчальний процес при підготовці фахівців зі спеціальності 7.06010105 «Автомобільні дороги і аеродроми» в дисциплінах «Фізико-хімічна механіка будівельних матеріалів» та «Комп'ютерна графіка».

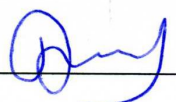
Завідувач кафедри «Містобудування
та інженерна графіка»
д.т.н., академік


Балюба І.Г.

Завідувач кафедри «Автомобільні
дороги і аеродроми»
д.т.н., професор


Братчун В.І.

Директор будівельного інституту
д.т.н., професор


Губанов В.В.



**Министерство образования и науки
Донецкой Народной Республики**

**Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Донбасская национальная академия
строительства и архитектуры»**

86123, г. Макеевка, ул. Державина, 2, тел.: (062) 340-15-80,
(0623) 22-24-67, факс (0623) 22-77-19, email: mailbox@donnasa.ru, идент. код 02070795

от 04.06.16 № 4-04-57
на № _____ от _____

Диссертационный совет Д01.006.02
при ГОУ ВПО «Донбасская
национальная академия строительства
и архитектуры»

СПРАВКА

о внедрении результатов исследований диссертационной работы в учебный процесс Бумаги А.И. на тему «Геометрическое моделирование физико-механических свойств композиционных строительных материалов в БН-исчислении» на соискание ученой степени кандидата технических наук по специальности 05.23.05 – Строительные материалы и изделия и 05.01.01 – Инженерная геометрия и компьютерная графика

Разработанные Бумагой А.И. теоретические основы геометрического моделирования позволяют создавать расчетно-графические алгоритмы конструирования алгебраических кривых, проходящих через наперед заданные точки, с помощью которых стало возможным не только конструирование геометрических объектов, удовлетворяющих наперед заданным условиям, но и геометрическое моделирование, с последующей оптимизацией, многофакторных процессов и явлений как геометрических объектов многомерного пространства.

Исследования Бумаги А.И. рекомендованы к внедрению в учебный процесс при чтении лекций и проведении практических занятий при подготовке бакалавров по направлению 08.03.01 «Строительство» в дисциплине «Инженерная графика» и аспирантов по направлению подготовки 09.06.01 «Информатика и вычислительная техника» по дисциплине «Геометрическое моделирование процессов и явлений».

Проректор по учебной работе

ГОУ ВПО «Донбасская национальная
академия строительства и архитектуры»
д.т.н., профессор

Директор строительного института,
д.э.н., доцент

Заведующий кафедрой
«Специализированные информационные
технологии и системы», к.т.н., доцент



Н.М. Зайченко

В.Г. Севка

Я.В. Назим

Приложение Б

**Анализ эффективности использования регрессионного анализа
по сравнению с исходными данными на примере математического
моделирования зависимости физико-механических свойств
композиционного строительного материала**

Б.1. По результатам диссертационной работы Рыбалко И.Ф. [110].

№ з/п	C_{30}^{10}, c	C_m ОПВХ, %	C_m ПОЕС, %	$Y_1(R_0), \text{МПа}$			$Y_2(R_{20}), \text{МПа}$			$Y_3(R_{50}), \text{МПа}$		
				\bar{Y}_1	Y_1	%	\bar{Y}_2	Y_2	%	\bar{Y}_3	Y_3	%
1	0,051	1	0,5	7,8	12,10	55,1	3,1	5,95	47,9	1,15	1,74	33,8
2	0,133	1	1,5	11,8	12,29	4,2	5	6,41	22,0	1,56	1,85	15,7
3	0,215	1	2,5	12	12,49	4,0	6	6,87	12,6	1,65	1,96	15,9
4	0,051	1,5	1,5	9,1	12,46	37,0	4,1	6,54	37,3	1,5	1,89	20,7
5	0,133	1,5	2,5	12,3	12,66	2,9	5,7	7,00	18,6	1,65	2,00	17,7
6	0,215	1,5	0,5	12,8	12,85	0,4	6,2	6,38	2,8	1,7	1,82	6,5
7	0,051	2	2,5	9,8	12,83	30,9	4,5	7,13	36,9	1,62	2,05	20,9
8	0,133	2	0,5	11,1	13,02	17,3	5	6,51	23,2	1,5	1,86	19,3
9	0,215	2	1,5	15,2	13,22	-13,1	7,1	6,97	-1,9	1,9	1,97	3,7
10	0,051	1	2,5	8,1	12,10	49,4	4,2	6,67	37,0	1,58	1,94	18,4
11	0,215	1	0,5	12,7	12,49	-1,7	5,5	6,15	10,5	1,6	1,76	9,2
12	0,051	2	0,5	9	12,83	42,6	4,4	6,41	31,4	1,6	1,85	13,4
13	0,215	2	2,5	14,6	13,22	-9,5	7,4	7,33	-1,0	2	2,07	3,5

Зеленым цветом выделена наименьшая погрешность.

Красным цветом выделена наибольшая погрешность.

C_{30}^{10}, c – вязкость дегтя.

C_m ОПВХ, % – концентрация вязкого дегтеполивинилхлорида.

C_m ПОЕС, % – концентрация полимерсодержащего отхода производства эпоксидных смол на поверхности шлама нейтрализации Харцизского сталепроволочно-канатного завода.

\bar{Y}_i – значение предела прочности при сжатии полученные в ходе эксперимента, которые являются исходными данными для регрессионного анализа.

Y_i – значение предела прочности при сжатии полученные на основе уравнений регрессии.

% – отклонение экспериментальных данных от тех, что получены на основе уравнений регрессии.

Б.2. По результатам диссертационной работы Самойловой Е.Э. [109].

№ з/п	$\Pi_{25},$ <i>град</i>	C_m EI, %	C_m ПОЕС, %	$Y_1(R_0), \text{МПа}$			$Y_2(R_{20}), \text{МПа}$			$Y_3(R_{50}), \text{МПа}$		
				\bar{Y}_1	Y_2	%	\bar{Y}_2	Y_2	%	\bar{Y}_3	Y_2	%
1	0,15	1,5	0,5	8,8	13,89	57,8	2,1	2,64	20,4	1,1	1,39	20,8
2	0,1	1,5	1,5	10,6	13,32	25,6	2,2	2,82	22,0	1,25	1,48	15,4
3	0,05	1,5	2,5	10,1	11,56	14,5	2,9	3,00	3,5	1,1	1,57	30,0
4	0,15	2	1,5	8,2	16,00	95,2	2,3	2,88	20,1	1,15	1,50	23,1
5	0,1	2	2,5	10,5	14,24	35,6	2,6	3,06	15,0	1,3	1,59	18,0
6	0,05	2	0,5	8,8	16,30	85,3	2,5	2,64	5,5	1,1	1,42	22,6
7	0,15	2,5	2,5	11	17,58	59,8	2,7	3,12	13,4	1,5	1,60	6,3
8	0,1	2,5	2,5	10	17,47	74,7	2,6	3,10	16,1	1,4	1,61	13,1
9	0,15	2,5	1,5	13	19,25	48,1	3,2	2,92	-9,7	1,2	1,52	21,1
10	0,15	1,5	2,5	10	11,73	17,3	2,5	3,04	17,7	1,3	1,55	16,2
11	0,05	1,5	0,5	9,3	13,72	47,6	2,8	2,60	-7,5	1,1	1,40	21,2
12	0,15	2,5	0,5	9,1	19,74	116,9	2,1	2,72	22,7	1,1	1,44	23,6
13	0,05	2,5	2,5	13,5	17,36	28,6	3,1	3,08	-0,5	1,3	1,62	19,8
14	0,1	2	1,5	9,7	15,91	64,0	2,5	2,86	12,6	1,4	1,50	6,8

Зеленым цветом выделена наименьшая погрешность.

Красным цветом выделена наибольшая погрешность.

$\Pi_{25}, \text{град}$ – вязкость (пенетрация) битума.

C_m EI, % – концентрация термополимера Элвалой АМ в битуме,

C_m ПОЕС, % – концентрация полимерсодержащего отхода производства эпоксидных смол на поверхности шлама нейтрализации Харцизского сталепроволочно-канатного завода.

\bar{Y}_i – значение предела прочности при сжатии полученные в ходе эксперимента, которые являются исходными данными для регрессионного анализа.

Y_i – значение предела прочности при сжатии полученные на основе уравнений регрессии.

% – отклонение экспериментальных данных от тех, что получены на основе уравнений регрессии.

Б.3. По результатам диссертационной работы Ходун В.Н. [111].

№ п/п	C_{30}^{10}, \tilde{n}	$C_m, \%$ ПВХ	$C_m, \%$ КФ- МГ	$Y_1(R_{20}), \text{МПа}$			$Y_2(R_{50}), \text{МПа}$			$Y_3(R_0), \text{МПа}$		
				\bar{Y}_1	Y	%	\bar{Y}_2	Y	%	\bar{Y}_3	Y	%
1	0,208	0,5	0	3	4,30	30,3	0,9	1,34	33,0	7,1	9,96	28,7
2	0,052	2	0	2,2	5,00	56,0	0,7	1,51	53,8	5,6	13,2	57,6
3	0,052	0,5	1	2,4	4,06	40,9	0,8	1,26	36,7	5,8	10,00	42,0
4	0,208	2	1	5,4	5,15	-4,9	1,6	1,51	-5,7	12	14,25	15,8
5	0,208	0,5	1	3,8	4,25	10,5	1,3	1,30	0,3	9,2	10,30	10,7
6	0,052	2	1	2,9	4,91	41,0	1	1,47	32,1	7,3	13,88	47,4
7	0,208	2	0	3,8	5,20	27,0	1,2	1,55	22,8	8,7	13,52	35,7
8	0,052	0,2	0	1,8	3,98	54,8	1,5	1,26	-18,9	4,9	9,30	47,3
9	0,208	1,25	0,5	4,5	4,95	9,0	1,5	1,48	-1,2	9,7	12,00	19,2
10	0,052	1,25	0,5	2,7	4,75	43,2	0,95	1,44	34,1	5,3	11,70	54,7
11	0,13	2	0,5	4,8	5,29	9,2	1,4	1,57	10,6	11	14,02	21,5
12	0,13	0,5	0,5	3,1	4,41	29,7	1	1,36	26,3	7,5	10,29	27,1
13	0,13	1,25	1	3,8	4,59	17,3	1,2	1,39	13,6	8,6	11,82	27,2
14	0,13	1,25	0	2,9	4,66	37,8	0,9	1,43	37,0	7,3	11,32	35,5
15	0,13	1,25	0,5	4	4,85	17,5	1,3	1,46	11,0	10	11,86	15,7

Зеленым цветом выделена наименьшая погрешность.

Красным цветом выделена наибольшая погрешность.

C_{30}^{10}, \tilde{n} - вязкость дегтя.

$C_m, \%$, ПВХ – отсев поливинилхлорида.

$C_m, \%$, КФ-МГ – активатор поверхности минерального порошка.

$Y_1(R_{20}), \text{МПа}$ – предел прочности на сжатие при $20 \pm 0,5^\circ \text{C}$, R_{20} .

\bar{Y}_i – значение предела прочности при сжатии полученные в ходе эксперимента, которые являются исходными данными для регрессионного анализа.

Y_i – значение предела прочности при сжатии полученные на основе уравнений регрессии.

% – отклонение экспериментальных данных от тех, что получены на основе уравнений регрессии.

Б.4. По результатам диссертационной работы Аль-Шамси Халед Али Саида [114].

№ з/П	Расход ЛСТ, от массы цемента, %	Расход NaOH, от массы це- мента, %	$Y_1(R_1)$, МПа			$Y_2(R_2)$, МПа		
			\bar{Y}_1	Y_1	%	\bar{Y}_2	Y_2	%
1	0	0	15,2	23,9	36,4	30,4	45,2	32,7
2	0	0,30	18,4	22,8	19,3	39,4	44,3	11,0
3	0	0,60	13,4	20,6	34,9	32,1	41,8	23,3
4	0,30	0	20,2	24,5	17,6	38,4	46,4	17,3
5	0,30	0,30	24,2	23,4	-3,5	44,8	45,4	1,4
6	0,30	0,60	14,8	21,1	29,9	35,3	42,9	17,7
7	0,60	0	19,8	24,8	20,2	40,6	47,4	14,4
8	0,60	0,30	26,0	23,7	-9,9	49,2	46,4	-6,1
9	0,60	0,60	16,3	21,4	23,7	38,7	43,8	11,6

Зеленым цветом выделена наименьшая погрешность.

Красным цветом выделена наибольшая погрешность.

ЛСТ – лигносульфонат натрия.

NaOH – гидроксид натрия.

\bar{Y}_1 – значение предела прочности при сжатии после пропаривания полученные в ходе эксперимента, которые являются исходными данными для регрессионного анализа.

Y_1 – значение предела прочности при сжатии после пропаривания полученные на основе уравнений регрессии.

\bar{Y}_2 – значение предела прочности при сжатии после автоклавирования полученные в ходе эксперимента, которые являются исходными данными для регрессионного анализа.

Y_2 – значение предела прочности при сжатии после автоклавирования полученные на основе уравнений регрессии.

% – отклонение экспериментальных данных от тех, что получены на основе уравнений регрессии.

Приложение В

**Листинг программ по компьютерной апробации результатов
исследований в программном пакете *Maple***

В.1. Визуализация геометрической модели физико-механических свойств дегтеполимербетона

```

> restart:

> x1:=xa1*(1-u)*(1-2*u)+4*xa2*u*(1-u)+xa3*u*(2*u-1);
> y1:=ya1*(1-u)*(1-2*u)+4*ya2*u*(1-u)+ya3*u*(2*u-1);
> z1:=za1*(1-u)*(1-2*u)+4*za2*u*(1-u)+za3*u*(2*u-1);
> x2:=xb1*(1-u)*(1-2*u)+4*xb2*u*(1-u)+xb3*u*(2*u-1);
> y2:=yb1*(1-u)*(1-2*u)+4*yb2*u*(1-u)+yb3*u*(2*u-1);
> z2:=zb1*(1-u)*(1-2*u)+4*zb2*u*(1-u)+zb3*u*(2*u-1);
> x3:=xc1*(1-u)*(1-2*u)+4*xc2*u*(1-u)+xc3*u*(2*u-1);
> y3:=yc1*(1-u)*(1-2*u)+4*yc2*u*(1-u)+yc3*u*(2*u-1);
> z3:=zc1*(1-u)*(1-2*u)+4*zc2*u*(1-u)+zc3*u*(2*u-1);
> x4:=xd1*(1-u)*(1-2*u)+4*xd2*u*(1-u)+xd3*u*(2*u-1);
> y4:=yd1*(1-u)*(1-2*u)+4*yd2*u*(1-u)+yd3*u*(2*u-1);
> z4:=zd1*(1-u)*(1-2*u)+4*zd2*u*(1-u)+zd3*u*(2*u-1);
> x5:=xe1*(1-u)*(1-2*u)+4*xe2*u*(1-u)+xe3*u*(2*u-1);
> y5:=ye1*(1-u)*(1-2*u)+4*ye2*u*(1-u)+ye3*u*(2*u-1);
> z5:=ze1*(1-u)*(1-2*u)+4*ze2*u*(1-u)+ze3*u*(2*u-1);
> x:=x1*((1-v)^4-(13*v*(1-v)^3)/3+(13*v^2*(1-v)^2)/3-(1-
v)*v^3)+x2*(16*v*(1-v)^3-(64*(1-v)^2*v^2)/3+(16*(1-
v)*v^3)/3)+x3*(-12*v*(1-v)^3+40*v^2*(1-v)^2-12*(1-
v)*v^3)+x4*((16*(1-v)^3*v)/3-(64*(1-v)^2*v^2)/3+16*(1-
v)*v^3)+x5*(-v*(1-v)^3+(13*v^2*(1-v)^2)/3-(13*v^3*(1-
v))/3+v^4);
> y:=y1*((1-v)^4-(13*v*(1-v)^3)/3+(13*v^2*(1-v)^2)/3-(1-
v)*v^3)+y2*(16*v*(1-v)^3-(64*(1-v)^2*v^2)/3+(16*(1-
v)*v^3)/3)+y3*(-12*v*(1-v)^3+40*v^2*(1-v)^2-12*(1-
v)*v^3)+y4*((16*(1-v)^3*v)/3-(64*(1-v)^2*v^2)/3+16*(1-

```

```

v)*v^3)+y5*(-v*(1-v)^3+(13*v^2*(1-v)^2)/3-(13*v^3*(1-
v))/3+v^4);
> z:=z1*((1-v)^4-(13*v*(1-v)^3)/3+(13*v^2*(1-v)^2)/3-(1-
v)*v^3)+z2*(16*v*(1-v)^3-(64*(1-v)^2*v^2)/3+(16*(1-
v)*v^3)/3)+z3*(-12*v*(1-v)^3+40*v^2*(1-v)^2-12*(1-
v)*v^3)+z4*((16*(1-v)^3*v)/3-(64*(1-v)^2*v^2)/3+16*(1-
v)*v^3)+z5*(-v*(1-v)^3+(13*v^2*(1-v)^2)/3-(13*v^3*(1-
v))/3+v^4);
> xa1:=0;xb1:=0;xc1:=0;xd1:=0;xe1:=0;
xa2:=20;xb2:=20;xc2:=20;xd2:=20;xe2:=20;
xa3:=50;xb3:=50;xc3:=50;xd3:=50;xe3:=50;
> ya1:=0;ya2:=0;ya3:=0; yb1:=0.5;yb2:=0.5;yb3:=0.5;
yc1:=1;yc2:=1;yc3:=1; yd1:=2;yd2:=2;yd3:=2;
ye1:=4;ye2:=4;ye3:=4;
> za1:=6;za2:=2;za3:=0.6; zb1:=8;zb2:=3.3;zb3:=0.9;
zc1:=9;zc2:=3.8;zc3:=1.2; zd1:=8.6;zd2:=3.3;zd3:=1;
ze1:=7.3;ze2:=3;ze3:=0.9;
> plot3d([x,y,z],v=0..1,u=0..1,grid=[20,20]);

```

В.2. Расчет предела прочности при сжатии мелкозернистого дегтеполимербетона в зависимости от концентрации активатора поверхности минерального порошка, концентрации отсева поливинилхлорида, вязкости дегтя и температуры.

```

> restart:
> A1520:=4.9;A2520:=5.6;A3520:=5.8;
B1520:=5.5;B2520:=5.6;B3520:=6;
C1520:=5.6;C2520:=6;C3520:=7.3;
A11300:=7.3;A21300:=7.5;A31300:=7.6;
B11300:=7.3;B21300:=10;B31300:=8.6;
C11300:=9.8;C21300:=11;C31300:=10.2;

```



```

A12080:=7.1;A22080:=8;A32080:=9.2;
B12080:=8.7;B22080:=9.7;B32080:=10.2;
C12080:=9.2;C22080:=10.1;C32080:=12;
A15220:=1.8;A25220:=2;A35220:=2.4;
B15220:=2.9;B25220:=2.7;B35220:=3;
C15220:=2.2;C25220:=3;C35220:=2.9;
A113020:=3;A213020:=3.1;A313020:=3.2;
B113020:=2.9;B213020:=4;B313020:=3.8;
C113020:=4.1;C213020:=5.1;C313020:=4.9;
A120820:=3;A220820:=3.5;A320820:=3.8;
B120820:=4.3;B220820:=4.5;B320820:=4.9;
C120820:=3.8;C220820:=4.2;C320820:=5.4;
A15250:=0.5;A25250:=0.6;A35250:=0.8;
B15250:=1;B25250:=0.95;B35250:=1.2;
C15250:=0.7;C25250:=0.8;C35250:=1;
A113050:=1.1;A213050:=1;A313050:=1;
B113050:=0.9;B213050:=1.3;B313050:=1.2;
C113050:=1;C213050:=1.4;C313050:=1.3;
A120850:=0.9;A220850:=1.2;A320850:=1.3;
B120850:=1.3;B220850:=1.5;B320850:=1.6;
C120850:=1.2;C220850:=1.5;C320850:=1.6;
> u:=0.3; v:=0.33; w:=0.63; t:=0.7;
> P520:=A1520*(1-u)*(1-2*u)+4*A2520*u*(1-u)+A3520*u*(2*u-1);
> Q520:=B1520*(1-u)*(1-2*u)+4*B2520*u*(1-u)+B3520*u*(2*u-1);
> R520:=C1520*(1-u)*(1-2*u)+4*C2520*u*(1-u)+C3520*u*(2*u-1);
> P1300:=A11300*(1-u)*(1-2*u)+4*A21300*u*(1-u)+A31300*u*(2*u-1);

```

```

> Q1300:=B11300*(1-u)*(1-2*u)+4*B21300*u*(1-
u)+B31300*u*(2*u-1);
> R1300:=C11300*(1-u)*(1-2*u)+4*C21300*u*(1-
u)+C31300*u*(2*u-1);
> P2080:=A12080*(1-u)*(1-2*u)+4*A22080*u*(1-
u)+A32080*u*(2*u-1);
> Q2080:=B12080*(1-u)*(1-2*u)+4*B22080*u*(1-
u)+B32080*u*(2*u-1);
> R2080:=C12080*(1-u)*(1-2*u)+4*C22080*u*(1-
u)+C32080*u*(2*u-1);
> P5220:=A15220*(1-u)*(1-2*u)+4*A25220*u*(1-
u)+A35220*u*(2*u-1);
> Q5220:=B15220*(1-u)*(1-2*u)+4*B25220*u*(1-
u)+B35220*u*(2*u-1);
> R5220:=C15220*(1-u)*(1-2*u)+4*C25220*u*(1-
u)+C35220*u*(2*u-1);
> P13020:=A113020*(1-u)*(1-2*u)+4*A213020*u*(1-
u)+A313020*u*(2*u-1);
> Q13020:=B113020*(1-u)*(1-2*u)+4*B213020*u*(1-
u)+B313020*u*(2*u-1);
> R13020:=C113020*(1-u)*(1-2*u)+4*C213020*u*(1-
u)+C313020*u*(2*u-1);
> P20820:=A120820*(1-u)*(1-2*u)+4*A220820*u*(1-
u)+A320820*u*(2*u-1);
> Q20820:=B120820*(1-u)*(1-2*u)+4*B220820*u*(1-
u)+B320820*u*(2*u-1);
> R20820:=C120820*(1-u)*(1-2*u)+4*C220820*u*(1-
u)+C320820*u*(2*u-1);

```

```

> P5250:=A15250*(1-u)*(1-2*u)+4*A25250*u*(1-
u)+A35250*u*(2*u-1);
> Q5250:=B15250*(1-u)*(1-2*u)+4*B25250*u*(1-
u)+B35250*u*(2*u-1);
> R5250:=C15250*(1-u)*(1-2*u)+4*C25250*u*(1-
u)+C35250*u*(2*u-1);
> P13050:=A113050*(1-u)*(1-2*u)+4*A213050*u*(1-
u)+A313050*u*(2*u-1);
> Q13050:=B113050*(1-u)*(1-2*u)+4*B213050*u*(1-
u)+B313050*u*(2*u-1);
> R13050:=C113050*(1-u)*(1-2*u)+4*C213050*u*(1-
u)+C313050*u*(2*u-1);
> P20850:=A120850*(1-u)*(1-2*u)+4*A220850*u*(1-
u)+A320850*u*(2*u-1);
> Q20850:=B120850*(1-u)*(1-2*u)+4*B220850*u*(1-
u)+B320850*u*(2*u-1);
> R20850:=C120850*(1-u)*(1-2*u)+4*C220850*u*(1-
u)+C320850*u*(2*u-1);
> M520:=P520*(1-v)*(1-2*v)+4*Q520*v*(1-v)+R520*v*(2*v-1);
> M1300:=P1300*(1-v)*(1-2*v)+4*Q1300*v*(1-v)+R1300*v*(2*v-
1);
> M2080:=P2080*(1-v)*(1-2*v)+4*Q2080*v*(1-v)+R2080*v*(2*v-
1);
> M5220:=P5220*(1-v)*(1-2*v)+4*Q5220*v*(1-v)+R5220*v*(2*v-
1);
> M13020:=P13020*(1-v)*(1-2*v)+4*Q13020*v*(1-
v)+R13020*v*(2*v-1);
> M20820:=P20820*(1-v)*(1-2*v)+4*Q20820*v*(1-
v)+R20820*v*(2*v-1);

```

```

> M5250:=P5250*(1-v)*(1-2*v)+4*Q5250*v*(1-v)+R5250*v*(2*v-1);
> M13050:=P13050*(1-v)*(1-2*v)+4*Q13050*v*(1-v)+R13050*v*(2*v-1);
> M20850:=P20850*(1-v)*(1-2*v)+4*Q20850*v*(1-v)+R20850*v*(2*v-1);
> N0:=M520*(1-w)*(1-2*w)+4*M1300*w*(1-w)+M2080*w*(2*w-1);
> N20:=M5220*(1-w)*(1-2*w)+4*M13020*w*(1-w)+M20820*w*(2*w-1);
> N50:=M5250*(1-w)*(1-2*w)+4*M13050*w*(1-w)+M20850*w*(2*w-1);
> T:=N0*(1-t)*(1-2*t)+4*N20*t*(1-t)+N50*t*(2*t-1);

```